


SIGILLVM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG
VE RI TAS
CHRISTO ET ECCLESIAE

ANWENDUNG
DER
DIFFERENTIAL- UND INTEGRAL-RECHNUNG
AUF
GEOMETRIE

VON

DR. GEORG SCHEFFERS,
O. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU DARMSTADT.

ZWEITER BAND.
EINFÜHRUNG IN DIE THEORIE DER FLÄCHEN.



LEIPZIG,
VERLAG VON VEIT & COMP.
1902

EINFÜHRUNG

IN DIE

THEORIE DER FLÄCHEN

VON

DR. GEORG SCHEFFERS,
O. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE ZU DARMSTADT.

MIT VIELEN FIGUREN IM TEXT.



LEIPZIG,
VERLAG VON VEIT & COMP.
1902

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

Vorwort.

Diesem zweiten, abschliessenden Bande der Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie seien zunächst einige Bemerkungen über die Art der Benutzung des Buches durch Lernende vorausgeschickt.

Der Inhalt des ersten Bandes wird als bekannt vorausgesetzt. Es ist aber auch möglich, dass man unmittelbar mit diesem zweiten Bande beginne, sobald man nur die wichtigeren Sätze der Curventheorie anderswo schon kennen gelernt hat. Zwar ist es am besten, die vier Abschnitte, in die dies Buch zerfällt, der Reihenfolge nach durchzunehmen; aber der dritte, schwierigste, Abschnitt braucht nur zum Teil vor dem vierten studiert zu werden. Man findet die nötigen Hinweise darüber an den betreffenden Stellen im Buche und im Inhaltsverzeichnis. Der vierte Abschnitt ist überdies zum grössten Teil von dem dritten unabhängig, kann also gleichzeitig mit diesem begonnen werden. Damit die Theorie deutlicher hervortrete, sind die Beispiele, wenn sie nicht ganze Paragraphen umfassen, in kleineren Lettern gedruckt worden. Ist es auch nicht unbedingt nötig, dass der Leser alle Beispiele beachte, so muss er doch dessen gewärtig sein, dass ihre Ergebnisse später zuweilen in der allgemeinen Theorie benutzt werden. Ausserdem ist zu bedenken, dass gerade die Beispiele dem Anfänger die beste Gelegenheit zur Übung in der Anwendung der Theorie geben.

Der Umfang des Buches möge den Anfänger nicht erschrecken, denn nur bei entsprechendem Raume ist es möglich, die Dinge so ausführlich zu behandeln, dass sie vollkommen verständlich werden. Jedenfalls habe ich aufs Ernsteste nach leichter Verständlichkeit des Buches gestrebt. —

Es sei mir gestattet, mich noch hinsichtlich einiger Punkte den Fachgenossen gegenüber zu äussern:

Dem Haupttitel des Werkes entsprechend habe ich auch in diesem Bande grundsätzlich die analytische Methode benutzt und rein geometrische Betrachtungen nur zum Erleichtern des Verstehens, bei der Andeutung weiterer Ausblicke, ferner da, wo sie besonders interessant sind, und endlich noch hin und wieder da, wo ihre rechnerische Wiedergabe auf der Hand liegt, eingefügt. Aber die Tendenz des Ganzen ist doch eine geometrische, indem ich solche Probleme aus der Flächentheorie ausgewählt habe, die in erster Linie von geometrischem Interesse sind. Man wird daher manche schöne Anwendung der Analysis auf die Geometrie vermissen, möge aber bedenken, dass das Gebiet der Flächentheorie so gross ist, dass dem Verfasser eine individuelle Auswahl daraus wohl gestattet ist. Manches, was andere elementare Lehrbücher bringen, fehlt hier; andererseits bringe ich manches, was andere Bücher nicht haben. Ich erwähne z. B. die Anwendung auf die Herstellung geographischer Karten, das Congruenzproblem für Flächen und die geodätische Abbildung.

Am besten wird man aus dem ausführlichen Sachregister am Schlusse dieses Bandes erkennen, welche einzelnen Probleme der Flächentheorie behandelt worden sind. Probleme, die nicht eigentlich einzelne Flächen als vielmehr Flächenscharen betreffen, wurden überhaupt beiseite gelassen.

Zwei grundsätzliche Abweichungen von den sonstigen elementaren Lehrbüchern sind hier diese: Erstens die beständige Mit-

berücksichtigung des Imaginären, zweitens die infolge hiervon unabweisliche Mitberücksichtigung derjenigen Flächen, die eine Schar von Minimalgeraden enthalten, da auf diesen Flächen z. B. die EULER'sche Krümmungstheorie nicht gilt. (Vgl. den „zweiten speciellen Fall" von S. 113 an.)

Eine Hauptschwierigkeit für den Anfänger in der Flächentheorie ist die Fülle der Formeln und der stehenden Bezeichnungen. In Hinsicht auf das Eine habe ich die Sache durch den Anhang von Formeltafeln zu erleichtern versucht, in Hinsicht auf das Andere dadurch, dass ich nur ziemlich wenige stehende Zeichen, diese aber beständig, benutzt habe. Ich denke, ein Kenner der Flächentheorie wird beim Blättern in diesem Buche überall orientiert sein, sobald er nur weiss, dass u, v die Parameter auf der Fläche, E, F, G und L, M, N ihre Fundamentalgrössen, X, Y, Z die Richtungscosinus der Flächennormale, R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien, K das GAUSSische Krümmungsmaass und H die mittlere Krümmung bedeutet. In Tafel XXIV findet man übrigens eine vergleichende Zusammenstellung der Bezeichnungen bei verschiedenen Autoren.

Noch muss ich hervorheben, dass ich es für ausgeschlossen halte, dem Anfänger die Flächentheorie als Invariantentheorie zweier quadratischer Differentialformen beibringen zu wollen. Das kann er später aus den grossen Werken, wie z. B. aus BIANCHI's Differentialgeometrie, lernen; für den Anfang bietet die Geometrie der Flächen selbst schon fast zu viel des Neuen und Ungewohnten.

Bezüglich der litterarischen Hinweise, die übrigens in den „Berichtigungen und Zusätzen" einige Ergänzungen erfahren haben, muss ich wie beim ersten Bande um Nachsicht bitten. Ich möchte überhaupt, um mich nicht zu wiederholen, auf das Vorwort zum ersten Bande verweisen.

Nach der freundlichen Aufnahme, die dem ersten Bande seitens der Kritik, so weit ich davon Kenntnis erhalten habe, geworden

ist, habe ich einige Zweifel, ob dieser zweite Band, der etwas knapper im Texte und doch bedeutend umfangreicher ausgefallen ist, eine ähnliche anerkennende Beurteilung erfährt. Der Verfasser selbst ist ja am wenigsten geeignet, sich über die Aufnahme seines Buches eine richtige Vorstellung zu machen.

Es ist mir schliesslich eine angenehme Pflicht, der Verlagshandlung für ihr bereitwilliges Eingehen auf alle meine Wünsche und für die musterhafte Drucklegung, die das Corrigieren der Bogen wesentlich erleichterte, hier zu danken.

Darmstadt, im Januar 1902.

Georg Scheffers.

Inhalt.

Erster Abschnitt.

Das Bogenelement der Fläche.

Zweiter Abschnitt.

Die Krümmung der Fläche.

Dritter Abschnitt.

Die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie.

Vierter Abschnitt.

Curven auf der Fläche.

Anhang.

* Vorläufig überschlagbar, vgl. die Anm. zu S. 310.

Erster Abschnitt.

Das Bogenelement der Fläche.

§ 1. Analytische Darstellung von Flächen.

Die einfachste analytische Darstellung einer Fläche ist die durch eine Gleichung zwischen den drei rechtwinkligen Punktcoordinaten x, y, z des Raumes:

$$F(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

vgl. I S. 162.[1] Insbesondere benutzt man gern die Auflösung der Gleichung nach einer der drei Coordinaten, namentlich die nach z:

$$z = f(x, y). \tag{2}$$

Bei der Darstellungsweise (2) einer Fläche haben sich Bezeichnungen für die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von z nach x und y eingebürgert, die wir gelegentlich benutzen wollen und daher hier angeben. Man pflegt zu setzen:

$$\left\{\begin{aligned} p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q &= \frac{\partial z}{\partial y}; \\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, & \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}. \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Allerdings muss man diese Abkürzungen da vermeiden, wo z. B. schon eine Bogenlänge s oder ein Radius r oder ein Parameter t auftritt.

Beispiele zur Darstellung einer Fläche mittels einer Gleichung (1) zwischen den Coordinaten x, y, z sind: die Gleichung einer Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

und die Gleichung einer Kugel

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$

---

[1] Die Zahl I soll den ersten Band bezeichnen.

Die Darstellungsform (2) ist unmöglich, wenn die Gleichung (1) der Fläche von z frei ist:

$$F(x, y) = 0.$$

Diese Gleichung wird zunächst von den Punkten (x, y) einer gewissen Curve in der xy-Ebene erfüllt, dann aber auch von allen denjenigen Punkten, deren Projectionen auf die xy-Ebene gerade auf jener Curve liegen; mit anderen Worten: die Gleichung stellt einen Cylinder dar, dessen Mantellinien der z-Axe parallel sind. (Vgl. I S. 161.)

Die bequeme Darstellungsform (2) ist demnach nicht erschöpfend, da sie jene Cylinder nicht mit umfasst. Dies thut nun zwar die Darstellungsform (1), aber diese ist wiederum nicht sehr bequem. Wir wollen daher die Flächen auf eine andere Art analytisch darstellen. Zu dieser anderen Art werden wir geführt, wenn wir einen Rückblick auf einige im ersten Bande betrachtete Flächen werfen:

Die Tangentenfläche einer Curve

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t)$$

mit dem Parameter t wurde durch drei Gleichungen gegeben:

$$(4) \quad x = \varphi(t) + \tau\varphi'(t), \quad y = \chi(t) + \tau\chi'(t), \quad z = \psi(t) + \tau\psi'(t).$$

Vgl. I S. 261. Legt man den beliebig veränderlichen Grössen t und τ irgend welche bestimmte Werte bei, so liefern die drei Gleichungen (4) die Coordinaten x, y, z eines Punktes auf der Tangente der Stelle (t) der gegebenen Curve. Die Veränderliche τ lässt sich leicht eliminieren. Es bleiben dann zwei Gleichungen zwischen x, y, z und t. Siehe I S. 262. Wenn man aus ihnen dann noch die Veränderliche t eliminieren würde, so bliebe eine Gleichung zwischen x, y und z übrig, sodass man zu einer Darstellungsform der Tangentenfläche gelangen würde, die sich der Form (1) unterordnet.

Wir erinnern ferner daran, dass wir in I S. 300 die Coordinaten x, y, z der Punkte derjenigen Ebene, die durch einen bestimmten Punkt (x_0, y_0, z_0) geht und zwei zu einander senkrechte Richtungen mit den Cosinus α, β, γ und l, m, n enthält, in dieser Form dargestellt haben:

$$(5) \quad x = x_0 + \alpha\mathfrak{x} + l\mathfrak{y}, \quad y = y_0 + \beta\mathfrak{x} + m\mathfrak{y}, \quad z = z_0 + \gamma\mathfrak{x} + n\mathfrak{y}.$$

Dabei bedeuten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ (vgl. die Fig. 61 dort) die gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten des Punktes (x, y, z) in demjenigen Axenkreuz, dessen Anfangspunkt der Punkt (x_0, y_0, z_0) ist und dessen Axen die erwähnten beiden Richtungen haben. Jedem Wertepaar

$\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ entspricht also ein Punkt (x, y, z) jener Ebene, und umgekehrt: zu jedem Punkte (x, y, z) der Ebene gehört ein bestimmtes Wertepaar $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$. Die Coordinaten aller Punkte (x, y, z) jener Ebene werden also hier durch zwei Veränderliche $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ ausgedrückt, die eine einfache geometrische Bedeutung haben.

Endlich erinnern wir daran, dass man auf der **Kugel**, aufgefasst als Erd- oder Himmelskugel, zur Festlegung eines Punktes die **Breite** β und **Länge** λ benutzt. Ist r der Radius der Kugel, die Ebene des Äquators die xy-Ebene, die Nordsüd-Axe die z-Axe und setzt man fest, dass die xz-Ebene die des Längenkreises Null sein soll, so sind (siehe Fig. 1):

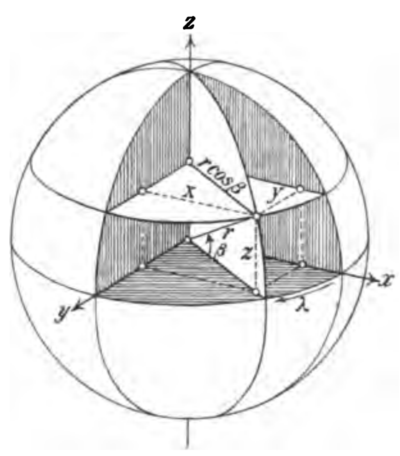


Fig. 1.

$$(6) \qquad x = r\cos\beta\cos\lambda, \qquad y = r\cos\beta\sin\lambda, \qquad z = r\sin\beta$$

die rechtwinkligen Coordinaten desjenigen Kugelpunktes, dessen Breite β und Länge λ ist. Um im Einklang mit unseren früheren Festsetzungen zu bleiben, haben wir die Länge positiv im Sinne der Drehung von der x-Axe zur y-Axe und die Breite β vom Äquator nach der positiven z-Axe hin positiv gerechnet. Natürlich kann man dann β auf das reelle Gebiet

$$-\frac{\pi}{2} < \beta < +\frac{\pi}{2}$$

und λ auf das reelle Gebiet

$$-\pi < \lambda < +\pi$$

beschränken; aber innerhalb dieses Gebietes sind β und λ beliebig wählbar, da zu jedem Wertepaar β, λ ein Punkt (x, y, z) der Kugel gehört. Auf die Beschränkung der Veränderlichen β und λ auf bestimmte Bereiche kommen wir nachher noch einmal zurück. In (6) ist die Kugel durch drei Gleichungen dargestellt, vermöge deren die Punktcoordinaten x, y, z als Functionen zweier anderer Veränderlichen, β und λ, gegeben werden. Zur Vereinfachung des Ausdrucks werden wir auch später mit Nordpol und Südpol diejenigen Punkte bezeichnen, in denen die positive und negative z-Axe die Kugel trifft.

In den Formeln (4), (5) und (6) haben wir analytische Darstellungsarten einer Tangentenfläche, einer Ebene und einer Kugelfläche vor uns, die Eins mit einander gemein haben: Jedesmal werden die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z der Punkte der betreffenden Fläche als Functionen von zwei anderen Veränderlichen gegeben, nämlich von t, τ bez. $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bez. β, λ.

Diese Thatsache führt uns zu der allgemeinen Frage: Es seien die Punktcoordinaten x, y, z als irgend welche Functionen von zwei anderen Veränderlichen, sagen wir u und v, gegeben:

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v). \tag{7}$$

Was ist dann der geometrische Ort aller Punkte (x, y, z), die sich hieraus ergeben, wenn die Veränderlichen u und v alle möglichen Werte erhalten? Wir setzen dabei voraus, dass die Functionen φ, χ, ψ wenigstens in einem gewissen Bereiche für u und v — in dem wir alsdann verbleiben — endlich, eindeutig, stetig und differenzierbar seien.

Bei der Beantwortung der aufgeworfenen Frage sind drei Fälle zu unterscheiden:

Erstens: Die Functionen φ, χ und ψ sind in Wirklichkeit frei von u und v, also Constanten. Dann stellt (7) nur einen Punkt dar.

Zweitens: Die Functionen φ, χ und ψ sind nicht sämtlich constant, aber je zwei sind von einander abhängig. Nach I S. 82, 83 sind alsdann φ, χ, ψ Functionen von nur einer Function ω von u und v, sodass die Gleichungen (7) die Form haben:

$$x = X(\omega), \qquad y = Y(\omega), \qquad z = Z(\omega).$$

Nehmen nun u und v alle möglichen Werte an, so gilt dasselbe von der Function ω von u und v. Es sind also x, y, z drei Functionen einer Veränderlichen ω, d. h. es liegt die Parameterdarstellung einer Curve mit dem Parameter ω vor.

Drittens: Zwei der drei Functionen φ, χ, ψ sind von einander unabhängig, z. B. φ und χ. Wenn wir alsdann den Coordinaten x und y irgend welche Werte vorschreiben, so bestimmen die beiden ersten Gleichungen (7):

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \tag{8}$$

da sie nach u und v theoretisch auflösbar sind, wenigstens ein Wertepaar u, v. Setzen wir dies in die dritte Gleichung (7):

$$z = \psi(u, v) \tag{9}$$

ein, so giebt sie einen Wert z. Jetzt gehört also zu jedem Wertepaar x, y ein Wert z wie bei (2), d. h. alle Punkte (x, y, z), die durch (7) bei beliebiger Veränderlichkeit von u und v bestimmt werden, erfüllen eine Fläche. Will man diese Fläche in der Form (2) darstellen, so muss man die beiden Gleichungen (8) nach u und v auflösen und die dadurch hervorgehenden Functionen u und v von x und y in die Gleichung (9) einsetzen.

Satz 1: Drei Gleichungen von der Form:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

mit den beliebig veränderlichen Grössen u und v bestimmen dann und nur dann die Punkte (x, y, z) einer Fläche, wenn zwei der drei Functionen φ, χ, ψ von einander unabhängig sind.

Dies ist die allgemeine Parameterdarstellung einer Fläche;[1] u und v heissen die Parameter oder Hülfsveränderlichen.

Oben haben wir in (4), (5) und (6) drei Beispiele hierzu gehabt, nämlich eine Parameterdarstellung einer Tangentenfläche, einer Ebene und einer Kugelfläche. Dabei waren die Parameter statt mit u, v mit t, τ bez. $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ bez. β, λ bezeichnet.

Man erkennt umgekehrt, wie man jede in der Form (1) gegebene Fläche:

$$F(x, y, z) = 0$$

mit Hülfe zweier Parameter u und v darstellen kann. Man verstehe nämlich z. B. unter φ und χ irgend zwei von einander unabhängige Functionen von u und v und setze:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v).$$

Führt man sie in $F = 0$ für x und y ein, so geht eine Gleichung zwischen u, v und z hervor, deren Auflösung nach z eine dritte Gleichung

$$z = \psi(u, v)$$

liefert. Nach der Entstehung dieser Gleichung ist sicher, dass die Punkte (x, y, z), die durch

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

[1] Diese Parameterdarstellung wurde von Gauss eingeführt in seinen grundlegenden und noch öfters zu erwähnenden „Disquisitiones generales circa superficies curvas", Commentationes Soc. Scient. Gottingensis recentiores Vol. VI (ad a. 1823—1827), Göttingen 1828. Siehe auch Gauss' Werke, 4. Bd., und die Übersetzung in Ostwald's Klassikern Nr. 5.

bei beliebiger Veränderlichkeit von u und v bestimmt werden, der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ genügen, und nach Satz 1 wissen wir auch, dass sie thatsächlich die ganze Fläche $F = 0$ und nicht nur eine Curve auf der Fläche bestimmen, da wir vorausgesetzt haben, dass φ und χ von einander unabhängig seien.

Dies Verfahren wäre nur dann hinfällig, wenn die Gleichung $F = 0$ von z frei wäre. Aber dann könnten wir etwa x und z an die Stelle von x und y in unserer Betrachtung treten lassen, sodass also nur scheinbar eine Ausnahme vorliegt.

Diese Überlegung zeigt überdies, dass **jede Fläche auf unendlich viele Arten in Parameterdarstellung gegeben werden kann**, da die Wahl der Functionen φ und χ — abgesehen von der ausbedungenen Unabhängigkeit — ganz beliebig blieb.

Künftig werden wir meistens die bequeme Parameterdarstellung (7) an Stelle der ersten Darstellungen (1) oder (2) einer Fläche benutzen. Wie in dem obigen Beispiel der Kugel (6), bei der β und λ die Parameter waren, kann auch bei anderen Flächen die Veränderlichkeit der Parameter u, v — obgleich sie zwei unabhängige Veränderliche sind — auf gewisse Gebiete eingeschränkt werden, wenn man nur reelle Punkte der Fläche betrachten will oder wenn man Stellen vermeiden will, an denen die Functionen φ, χ, ψ die oben gemachten Voraussetzungen der Stetigkeit u. s. w. nicht erfüllen. Auch ist zu beachten, dass trotz der Unabhängigkeit, die wir zweien der drei Functionen φ, χ, ψ vorschreiben mussten, doch für gewisse Wertepaare u, v die Auflösung von zwei der drei Gleichungen (7) nach u und v unmöglich sein kann.

Denn wenn z. B. die Functionen φ und χ von einander unabhängig sind, so heisst dies doch nach I S. 83 nur, dass ihre Functionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \chi_u & \chi_v \end{vmatrix}$$

für **beliebig** gewählte Wertepaare u, v nicht gleich Null sein soll. Für **gewisse** Wertepaare u, v — ja im Allgemeinen sogar für ∞^1 Wertepaare u, v — kann die Auflösbarkeit aufhören, da das Nullsetzen der Functionaldeterminante im Allgemeinen eine Gleichung zwischen u und v liefert. **Wir beschränken uns daher in der Folge stillschweigend immer auf einen solchen Bereich für die unabhängig veränderlichen Grössen u und v, innerhalb dessen die vorausgesetzte Unabhängigkeit zweier der drei Functionen φ, χ, ψ wirklich statt hat.** Und wenn wir

auch der Kürze halber einfach sagen: u und v sollen beliebig veränderlich sein oder alle möglichen Werte annehmen, so meinen wir doch, dass dies nur innerhalb eines erlaubten Bereiches geschehe. Bei jeder speciellen Anwendung ist dieser Bereich besonders festzustellen.

Aus unseren Betrachtungen geht hervor: Ist eine Fläche mittels zweier Parameter u, v in der Form (7) dargestellt, so gehört nicht nur zu jedem Wertepaar der Parameter u, v ein bestimmter Punkt (x, y, z) der Fläche, sondern auch umgekehrt: zu jedem bestimmten Punkte (x, y, z) der Fläche gehört ein bestimmtes Wertepaar der Parameter u, v.

Wir hoben vorhin hervor, dass eine Fläche unendlich viele Parameterdarstellungen hat. Es mögen nun:

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \chi(u,v), \quad z = \psi(u,v)$$

und

$$x = \Phi(\bar{u},\bar{v}), \quad y = X(\bar{u},\bar{v}), \quad z = \Psi(\bar{u},\bar{v})$$

zwei Parameterdarstellungen ein und derselben Fläche sein und zwar mit den Parametern u, v bez. $\bar{u}, \bar{v}$. Zu jedem Wertepaar u, v gehört vermöge der drei ersten Gleichungen ein Punkt (x, y, z) der Fläche und zu diesem vermöge der drei letzten Gleichungen ein Wertepaar $\bar{u}, \bar{v}$. Der Schluss ist auch umgekehrt zu machen, sodass folgt: Es muss zu jedem Wertepaar u, v ein Wertepaar $\bar{u}, \bar{v}$ und umgekehrt zu jedem Wertepaar $\bar{u}, \bar{v}$ ein Wertepaar u, v gehören. Dies aber heisst: Es müssen u und v zwei von einander unabhängige Functionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ sein:[1]

$$u = \lambda(\bar{u},\bar{v}), \quad v = \mu(\bar{u},\bar{v}). \tag{10}$$

Hieraus folgt:

Satz 2: Liegt eine Darstellung

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \chi(u,v), \quad z = \psi(u,v)$$

einer Fläche mittels der Parameter u und v vor, so ergiebt sich aus ihr die allgemeinste Parameterdarstellung derselben Fläche dadurch, dass u und v irgend zweien von einander unabhängigen Functionen zweier neuer Parameter $\bar{u}, \bar{v}$ gleich gesetzt:

$$u = \lambda(\bar{u},\bar{v}), \quad v = \mu(\bar{u},\bar{v})$$

[1] Abgesehen von der geometrischen Bedeutung ist der Zusammenhang zwischen u, v und $\bar{u}, \bar{v}$ hier genau derselbe wie in I S. 106 der Zusammenhang zwischen u, v und x, y.

und diese Functionen in die gegebenen Gleichungen statt u und v eingeführt werden.

Die Parameter, mittels deren man eine Fläche darstellt, nennt man auch krummlinige Coordinaten der Fläche. Das Beiwort: krummlinig soll den Unterschied gegenüber den beiden gewöhnlichen Coordinaten x und y ausdrücken:

Liegt nämlich die Fläche in der Form

$$z = f(x, y)$$

vor, so sind x und y solche Coordinaten, deren Angabe zur Bestimmung eines Flächenpunktes genügt, da das zugehörige z aus der Gleichung gewonnen wird. Wählt man für x einen bestimmten Wert x_0, lässt aber y noch beliebig, so erhält man zunächst ∞^1 Punkte (x_0, y) in der xy-Ebene, nämlich die Punkte einer Parallelen zur y-Axe, und zu jedem dieser Punkte gehört ein Punkt (x_0, y, z) der Fläche. Mit anderen Worten: Wir betrachten (siehe Fig. 2) eine solche Curve auf der Fläche, deren senkrechte Projection auf die xy-Ebene eine Gerade parallel zur y-Axe ist. Analoges gilt,

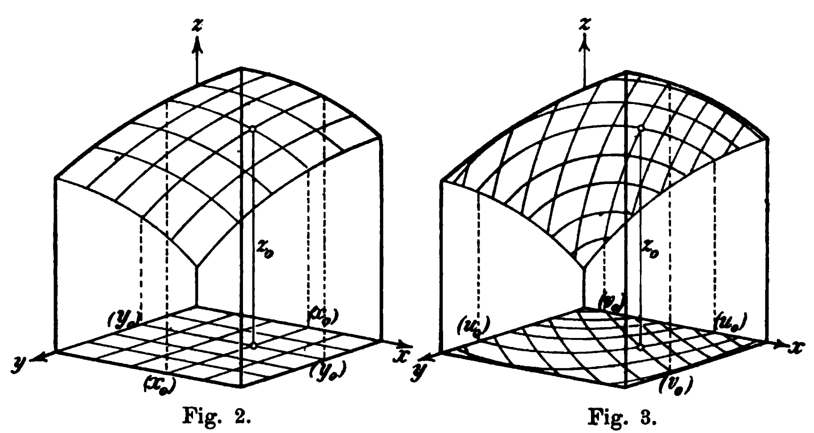


Fig. 2. Fig. 3.

wenn y statt x bestimmt gewählt und x beliebig gelassen wird. Jeder Punkt (x, y, z) der Fläche erscheint hiernach als Schnittpunkt zweier Curven auf der Fläche, und die senkrechten Projectionen aller dieser Curven auf die xy-Ebene sind die Parallelen zur y- und x-Axe. Die Fläche ist demnach mit einem gewissen Netz von unendlich vielen Curven überzogen zu denken, die, auf die xy-Ebene projiciert, ein orthogonales Netz von geraden Linien liefern.

Liegt dagegen die Fläche in Parameterdarstellung vor:

$$(11) \qquad x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

so sind u und v die Bestimmungsstücke. Geben wir u einen bestimmten Wert u_0, während wir v veränderlich lassen, so ergeben sich diejenigen Punkte (x, y, z) der Fläche, für die

$$x = \varphi(u_0, v), \quad y = \chi(u_0, v), \quad z = \psi(u_0, v)$$

ist. Hierin kommt rechts nur die eine Veränderliche v vor. Es liegt hier also eine Curve vor und zwar dargestellt mittels des Parameters v. Diese Curve liegt auf der Fläche und ist durch die Angabe des Wertes u_0, den wir u beilegten, völlig bestimmt. Sie heisst daher die Parameterlinie (u_0) der Fläche. Ihre Projection auf die xy-Ebene wird durch die beiden Gleichungen

$$x = \varphi(u_0, v), \quad y = \chi(u_0, v)$$

mit dem Parameter v dargestellt (siehe Fig. 3, S. 8) und ist im allgemeinen eine krumme Linie. Geben wir zweitens dem Parameter v einen bestimmten Wert v_0, während u beliebig veränderlich sein soll, so heisst dies, dass wir diejenigen Punkte (x, y, z) auf der Fläche betrachten, die auf der Curve

$$x = \varphi(u, v_0), \quad y = \chi(u, v_0), \quad z = \psi(u, v_0)$$

mit dem Parameter u liegen. Diese Curve auf der Fläche heisst die Parameterlinie (v_0) der Fläche, und ihre Projection auf die xy-Ebene ist die im allgemeinen krumme Linie

$$x = \varphi(u, v_0), \quad y = \chi(u, v_0)$$

mit dem Parameter u. Wollen wir einen Punkt auf der Fläche bestimmt wählen, so haben wir u und v bestimmte Werte u_0, v_0 zu erteilen. Der zugehörige Punkt:

$$x_0 = \varphi(u_0, v_0), \quad y_0 = \chi(u_0, v_0), \quad z_0 = \psi(u_0, v_0)$$

liegt dann im Schnitt der beiden Parameterlinien (u_0) und (v_0). Mithin haben wir uns die Fläche mit einem Netz von Parameterlinien (u_0) und (v_0) überzogen zu denken, und die Projection dieses Netzes auf die xy-Ebene liefert ein im allgemeinen krummliniges Curvennetz

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v) \tag{12}$$

in der Ebene. Vgl. I, 1. Abschn. § 16 u. 17, wo wir die ebenen Curvennetze ausführlich behandelt haben. Es ist hiernach klar, dass wir einen Punkt auf der Fläche statt als Punkt (x, y, z) auch als Punkt (u, v) bezeichnen können.

Die Bestimmung (11) der ∞^2 Punkte einer Fläche vermöge zweier Parameter u und v ist die natürliche Verallgemeinerung der

Bestimmung der ∞^2 Punkte einer Ebene vermöge zweier Parameter u und v. Es tritt eben bei der Fläche zu den zwei Gleichungen (12) noch eine dritte $z = \psi(u, v)$ hinzu, die bei der xy-Ebene — diese im Raum betrachtet — einfach durch $z = 0$ zu ersetzen wäre.

1. Beispiel: Die Tangentenfläche (4) einer Curve hat, wenn wir jetzt statt t und τ die Zeichen u und v gebrauchen, die Darstellung:

$$x = \varphi(u) + v\varphi'(u), \quad y = \chi(u) + v\chi'(u), \quad z = \psi(u) + v\psi'(u).$$

Geben wir u einen bestimmten Wert u_0, so heisst dies: Wir betrachten einen bestimmten Punkt der Gratlinie

$$x = \varphi(u), \quad y = \chi(u), \quad z = \psi(u)$$

und seine Tangente. Die Parameterlinie (u_0) ist demnach eine der Geraden der Fläche, während jede Parameterlinie (v_0) krummlinig ist. Wenn z. B. u direct die Bogenlänge der Gratlinie ist, so bedeutet ja v die Strecke, die auf der Tangente des Punktes (u) der Gratlinie abgetragen wird, nach I S. 262. Die Linie (v_0) ist daher der Ort der Punkte, die sich ergeben, wenn man auf allen Tangenten der Gratlinie die Strecke v_0 vom Berührungspunkte aus abträgt. Die Parameterlinie $(v = 0)$ ist die Gratlinie selbst.

2. Beispiel: Bezeichnen wir die Breite β und die Länge λ auf der Kugel (6) mit u bez. v, so liegt die Kugel vor:

$$x = r\cos u \cos v, \quad y = r\cos u \sin v, \quad z = r\sin u.$$

Die Parameterlinie (u_0) ist die Curve constanter Breite u_0, d. h. ein Breitenkreis, und die Parameterlinie (v_0) ist die Curve constanter Länge v_0, d. h. ein Meridian auf der Kugel.

Eine geometrisch gegebene Fläche kann willkürlich mit Curvennetzen, d. h. mit zwei Scharen von je ∞^1 Curven, überzogen werden. Dem entspricht es, dass man ein und dieselbe Fläche auf beliebig viele Weisen mittels Parameter darstellen kann. Zu jeder Parameterdarstellung gehören ganz bestimmte Scharen von Parameterlinien, aber nicht umgekehrt: Wir erkennen vielmehr wie früher in der Ebene, I S. 112, dass die Scharen der Parameterlinien nur dann ungeändert bleiben, wenn man statt der alten Parameter u und v solche neue Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ einführt, von denen jeder nur von einem der beiden alten Parameter abhängt:

$$\bar{u} = A(u), \quad \bar{v} = B(v).$$

Diese Bemerkung kann man gelegentlich zur Vereinfachung der Parameterstellung benutzen, wenn man Wert darauf legt, die Natur der Parameterlinien selbst nicht zu ändern.

Eine beliebige Curve auf der Fläche

$$(13) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

wird erhalten, wenn die Coordinaten x, y, z nur noch von einer ver-

änderlichen Grösse t abhängen, wenn also u und v gleich zwei Functionen eines Parameters t gesetzt werden:

$$u = A(t), \quad v = B(t), \tag{14}$$

sodass (13) die Curve:

$$x = \varphi[A(t), B(t)], \quad y = \chi[A(t), B(t)], \quad z = \psi[A(t), B(t)]$$

mit dem Parameter t liefert. Statt t können wir aber auch wie in I S. 159 eine Function von t, z. B. auch $u = A(t)$, als Parameter längs der Flächencurve einführen. t ist dann eine Function von u; wird sie in die zweite Gleichung (14) eingesetzt, so wird auch v eine Function von u:

$$v = \omega(u), \tag{15}$$

sodass nunmehr:

$$x = \varphi[u, \omega(u)], \quad y = \chi[u, \omega(u)], \quad z = \psi[u, \omega(u)]$$

die Gleichungen der Flächencurve sind. Allerdings ist hierbei vorausgesetzt, dass sich aus $u = A(t)$ auch t als Functivon von u berechnen lasse, was nicht geht, wenn u längs der Curve constant ist. Die Parameterlinien (u) der Fläche entziehen sich also der letzten Darstellungsform. Besser bleibt daher die Art der Elimination von t aus (14) dahingestellt, sodass wir statt (15) die unaufgelöste Gleichung schreiben:

$$\Omega(u, v) = 0. \tag{16}$$

Satz 3: Auf einer Fläche mit den Parametern u, v wird jede Curve durch eine Gleichung

$$\Omega(u, v) = 0$$

zwischen u und v definiert.

Die Gleichung (16) bestimmt zu jedem Werte u einen Wert v, ordnet also jeder Parameterlinie (u) eine Parameterlinie (v) zu. Der Ort der Schnittpunkte jedes solchen Paares ist die Curve, die durch (16) analytisch gegeben wird. (Siehe Fig. 4.)

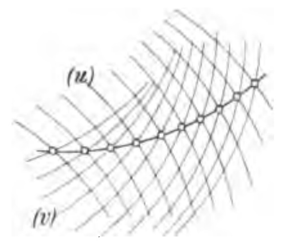


Fig. 4.

Wie in der xy-Ebene eine Schar von ∞^1 Curven durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen den beiden Veränderlichen x und y definiert wird (siehe I, 1. Abschn. § 14), so wird eine Schar von ∞^1 Curven auf der Fläche durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zwischen u und v definiert:

$$U(u, v)\,dv - V(u, v)\,du = 0. \tag{17}$$

Denn diese Gleichung integrieren, heisst — rein rechnerisch ausgesprochen — nach I S. 88 alle diejenigen Functionen $v = \varphi(u)$ finden, die zusammen mit ihren Differentialquotienten $dv : du = \varphi'(u)$ die Gleichung (17) oder

$$\frac{dv}{du} = \frac{V(u,v)}{U(u,v)} \tag{18}$$

für jeden Wert von u erfüllen, und diese Functionen heissen **Lösungen** von (17) oder (18). Aus Satz 59, I S. 90, können wir ferner entnehmen, dass die Differentialgleichung (17) oder (18) nur **ein** wesentliches **Integral** $f(u,v)$ hat, das, gleich einer willkürlichen Constanten gesetzt:

$$f(u,v) = \text{Const.} \tag{19}$$

Lösungen $v = \varphi(u, \text{Const.})$ definiert, deren jede nach Satz 3 eine Curve auf der Fläche darstellt. Die Gleichung (19) definiert also eine Schar von ∞^1 Curven auf der Fläche.

Liegt umgekehrt eine Schar von ∞^1 Curven auf der Fläche vor:

$$f(u,v) = \text{Const.},$$

so folgt hieraus:

$$\frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = 0,$$

also eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in u und v. Somit:

Satz 4: Eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in u und v:

$$U(u,v)\,dv - V(u,v)\,du = 0$$

definiert eine Schar von ∞^1 Curven auf der Fläche mit den Parametern u, v; und umgekehrt kann jede Schar von ∞^1 Curven auf der Fläche analytisch durch eine solche Differentialgleichung definiert werden.

Sehr häufig werden wir auf Gleichungen stossen, die in du und dv homogen und quadratisch sind:

$$A(u,v)\,du^2 + 2B(u,v)\,du\,dv + C(u,v)\,dv^2 = 0. \tag{20}$$

Sie sind als quadratische Gleichungen

$$A(u,v) + 2B(u,v)\frac{dv}{du} + C(u,v)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 = 0$$

für $\frac{dv}{du}$ aufzufassen und liefern also zwei Gleichungen:

$$\frac{dv}{du} = \lambda(u,v), \quad \frac{dv}{du} = \mu(u,v). \tag{21}$$

Jede definiert eine Schar von ∞^1 Curven, nach Satz 4. Mithin definiert die Gleichung (20) zwei Scharen von je ∞^1 Curven auf der Fläche.

Die Differentialgleichungen (21) der beiden Scharen finden wir auch, wenn wir die linke Seite von (20) in ihre hinsichtlich du und dv linearen Factoren zerspalten:

$$\left[A\,du + \left(B + \sqrt{B^2 - AC}\right)dv\right]\left[A\,du + \left(B - \sqrt{B^2 - AC}\right)dv\right] = 0.$$

Es sind dann die beiden Gleichungen:

$$A\,du + \left(B \pm \sqrt{B^2 - AC}\right)dv = 0.$$

Nur wenn $B^2 - AC = 0$, d. h. die linke Seite von (20) ein vollständiges Quadrat hinsichtlich du und dv ist, fallen beide Differentialgleichungen zusammen. Es gilt der

Satz 5: Zwei Scharen von je ∞^1 Curven auf einer Fläche mit den Parametern u, v können stets durch eine in du und dv quadratische homogene Gleichung

$$A(u,v)\,du^2 + 2\,B(u,v)\,du\,dv + C(u,v)\,dv^2 = 0$$

definiert werden. Diese Gleichung lässt sich in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung in u und v zerspalten:

$$A\,du + \left(B \pm \sqrt{B^2 - AC}\right)dv = 0.$$

Nur dann, wenn die linke Seite jener quadratischen Gleichung ein vollständiges Quadrat ist, wenn also $B^2 - AC = 0$ ist, fallen beide Curvenscharen zusammen.

Z. B. die Gleichung $du\,dv = 0$ definiert die beiden Scharen von Parameterlinien.

§ 2. Die Fundamentalgrössen erster Ordnung auf einer Fläche.

Werden die Punkte der Ebene durch rechtwinklige Coordinaten x, y bestimmt, so wird das Quadrat des Bogenelementes ds, d. h. das Quadrat der Entfernung zweier unendlich benachbarter Punkte (x, y) und $(x + dx, y + dy)$ von einander gegeben durch die Formel:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

In der Formel (6), I S. 109, fanden wir den Ausdruck von ds^2 für ein bestimmtes Parametersystem u, v in der Ebene, wobei

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \psi(u,v)$$

war, in der Form:

$$ds^2 = (\varphi_u^2 + \psi_u^2)\,du^2 + 2(\varphi_u\varphi_v + \psi_u\psi_v)\,du\,dv + (\varphi_v^2 + \psi_v^2)\,dv^2.$$

Allgemein also ist das Quadrat des Bogenelementes in der Ebene eine ganze homogene quadratische Function der Differentiale du und dv. Die Coefficienten dieser Function sind dabei Functionen der krummlinigen Coordinaten u und v selbst.

Eine ähnliche Erscheinung zeigt sich bei einer Fläche. Liegt die Fläche zunächst in der einfachen Darstellung vor:

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

und sind (x, y, z) und $(x + dx, y + dy, z + dz)$ zwei unendlich benachbarte Punkte der Fläche, so ist

$$dz = f_x\,dx + f_y\,dy,$$

sodass das Quadrat der Entfernung der beiden Punkte von einander, also das Quadrat des Bogenelementes der Fläche, nämlich:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

den Ausdruck annimmt:

$$ds^2 = (1 + f_x^2)\,dx^2 + 2 f_x f_y\,dx\,dy + (1 + f_y^2)\,dy^2.$$

Es ist also auch eine ganze homogene quadratische Function von den Differentialen der beiden unabhängigen Bestimmungsstücke x und y der Flächenpunkte. Benutzen wir die auf S. 1 angegebenen Abkürzungen (3), so können wir hier auch schreiben:

$$ds^2 = (1 + p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2. \tag{2}$$

Liegt die Fläche in allgemeiner Parameterdarstellung vor:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v), \tag{3}$$

so haben zwei unendlich benachbarte Flächenpunkte (x, y, z) und $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$ unendlich wenig von einander abweichende Parameterpaare u, v und $u + du,\ v + dv$. Es ist dann:

$$dx = \varphi_u\,du + \varphi_v\,dv, \quad dy = \chi_u\,du + \chi_v\,dv, \quad dz = \psi_u\,du + \psi_v\,dv, \tag{4}$$

sodass das Quadrat des Bogenelementes den Wert hat:

$$\begin{aligned} ds^2 = (\varphi_u^2 + \chi_u^2 + \psi_u^2)\,du^2 &+ \\ + 2(\varphi_u\varphi_v + \chi_u\chi_v + \psi_u\psi_v)\,du\,dv &+ \\ + (\varphi_v^2 + \chi_v^2 + \psi_v^2)\,dv^2&. \end{aligned} \tag{5}$$

Diese Formel ist von grundlegender Bedeutung. Da sie sehr oft

angewandt wird, empfiehlt es sich, zur Abkürzung neue Bezeichnungen einzuführen. Wir setzen:[1]

$$(6)\qquad \begin{cases} E = \varphi_u^2 + \chi_u^2 + \psi_u^2, \\ F = \varphi_u \varphi_v + \chi_u \chi_v + \psi_u \psi_v, \\ G = \varphi_v^2 + \chi_v^2 + \psi_v^2 \end{cases}$$

oder, was dasselbe ist:[2]

$$(7)\qquad \begin{cases} E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = \mathbf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = \mathbf{S}\, x_u^2, \\ F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = \mathbf{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = \mathbf{S}\, x_u x_v, \\ G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = \mathbf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = \mathbf{S}\, x_v^2. \end{cases}$$

Diese drei Grössen heissen die Fundamentalgrössen erster Ordnung auf der Fläche (3), und zwar deshalb erster Ordnung, weil sie nur die ersten partiellen Differentialquotienten von x, y, z nach u und v enthalten. Mit ihrer Hülfe nimmt die Formel (5) für das Quadrat des Bogenelementes die einfache Gestalt an:

$$(8)\qquad ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

Das Quadrat des Bogenelementes ds einer Fläche ist also auch bei der allgemeinsten Parameterdarstellung eine ganze homogene quadratische Function der Differentiale du und dv der Parameter. Die Coefficienten $E, 2F, G$ sind Functionen von u und v.

Sind insbesondere x, y selbst die Parameter, d. h. liegt die Fläche in der Form (1) vor, so sind die Fundamentalgrössen nach (2) diese:

$$(9)\qquad E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2.$$

Der Darstellung (5) von ds^2 ordnet sich auch die Formel für das Quadrat des Bogenelementes der Ebene unter, an die wir oben erinnert haben. Sie geht aus (5) hervor, wenn wir die Ebene — aufgefasst als Fläche im Raume — so schreiben:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = 0.$$

[1] Nach Gauss' „Disquisitiones".

[2] Wie im 1. Band geben wir hinter dem Summenzeichen **S** nur das erste Glied der Summe an. Die übrigen Glieder gehen aus ihm durch cyklische Vertauschung von x, y, z hervor. Vgl. I S. 178.

Die Fundamentalgrössen erster Ordnung E, F, G haben eine wichtige Eigenschaft: Sie ändern sich nicht, wenn die starr gedachte Fläche einer Bewegung (I S. 147) unterworfen wird. Man kann dies rein begrifflich daraus schliessen, dass ds^2 als Quadrat der Entfernung zweier Punkte bei der Bewegung ungeändert bleibt. Es soll aber auch durch die Rechnung bestätigt werden: Die Bewegung führe den Punkt (x, y, z) oder (u, v) der Fläche (3) in den Punkt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ über. Dann ist nach den Formeln I (A)[1] des ersten Bandes:[2]

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + a, \\ \bar{y} &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + b, \\ \bar{z} &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + c, \end{aligned}$$

wobei die α_i, β_i, γ_i die in jener Tafel angegebenen Relationen erfüllen. Infolge dieser drei Formeln und infolge von (3) sind die Coordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ der Punkte der Fläche in ihrer neuen Lage ebenfalls Functionen der beiden Parameter u und v, und für diese Functionen ist:

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} = \alpha_1 \frac{\partial x}{\partial u} + \alpha_2 \frac{\partial y}{\partial u} + \alpha_3 \frac{\partial z}{\partial u}$$

u. s. w., sodass nach I (C) sofort folgt:

$$\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{z}}{\partial u}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

u. s. w., d. h. nach (7):

$$\bar{E} = E, \quad \bar{F} = F, \quad \bar{G} = G,$$

wenn $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ die Fundamentalgrössen der Fläche in ihrer neuen Lage bedeuten. Daher:

Satz 6: Die Fundamentalgrössen erster Ordnung einer Fläche bleiben bei Ausführung einer Bewegung ungeändert.

Ganz anders verhält es sich, wenn man auf der Fläche neue krummlinige Coordinaten $\bar{u}$, $\bar{v}$ einführt. Setzen wir nämlich wie auf S. 7

$$u = \lambda(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = \mu(\bar{u}, \bar{v}), \tag{10}$$

[1] Die Formeln der Tafeln im Anhang zum ersten Band werden wir immer durch die römische Ziffer der betreffenden Tafel und den Buchstaben der Formelbezeichnung citieren.

[2] Nach I S. 148 haben wir in jenen Formeln x, y, z mit $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ zu vertauschen, da jetzt x, y, z die Coordinaten des ursprünglichen Punktes bedeuten.

so werden x, y, z nach (3) Functionen von $\bar{u}, \bar{v}$, und es wird:

$$\frac{\partial x}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}, \qquad \frac{\partial x}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}}$$

u. s. w. Nun seien $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ die auf die neuen Parameter bezüglichen Fundamentalgrössen der Fläche; es sei also entsprechend (7):

$$\bar{E} = \mathsf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{u}}\right)^2, \qquad \bar{F} = \mathsf{S}\frac{\partial x}{\partial \bar{u}}\frac{\partial x}{\partial \bar{v}}, \qquad \bar{G} = \mathsf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{v}}\right)^2.$$

Wie man sieht, ergiebt sich aus den vorhergehenden Formeln:

$$\bar{E} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\right)^2 \mathsf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\mathsf{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\right)^2 \mathsf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2.$$

Ähnlich drücken sich $\bar{F}$ und $\bar{G}$ aus. Ersetzen wir dann die Summen nach (7) durch ihre Zeichen E, F, G, so finden wir:

$$(11)\quad \begin{cases} \bar{E} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\right)^2 E + 2\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}} F + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\right)^2 G, \\ \bar{F} = \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} E + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}\right) F + \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}} G, \\ \bar{G} = \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}\right)^2 E + 2\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}} F + \left(\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}}\right)^2 G. \end{cases}$$

Hierin sind rechts die Functionen E, F, G von u und v mit Hülfe der Formeln (10) in $\bar{u}$ und $\bar{v}$ auszudrücken. Das Quadrat des Bogenelementes hat alsdann statt der Form (8) in der neuen Parameterdarstellung die Form:

$$(12)\qquad ds^2 = \bar{E}d\bar{u}^2 + 2\bar{F}d\bar{u}\,d\bar{v} + \bar{G}d\bar{v}^2.$$

Die Formeln (11) zeigen, wie die Fundamentalgrössen erster Ordnung thatsächlich neue Formen bei Einführung neuer Parameter $\bar{u}, \bar{v}$ annehmen. —

Ist die Fläche (3) reell und gehören zu den reellen Werten der Parameter u, v die reellen Punkte der Fläche, so sind die Fundamentalgrössen E und G nach (7) reell und positiv, während F zwar reell ist, aber auch negativ sein kann.

Häufig wird auch die Grösse

$$(13)\qquad D = \sqrt{EG - F^2}$$

gebraucht. Der Radicand

$$D^2 = EG - F^2 = \mathsf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \mathsf{S}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 - \left(\mathsf{S}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2$$

lässt sich so umformen (vgl. Anm. I S. 146):

$$(14) \quad D^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2.$$

Bei reellen Flächen mit reeller Parameterdarstellung ist also D^2 stets positiv, sodass wir festsetzen dürfen, D bedeute alsdann die positive Quadratwurzel aus dem Ausdruck (14). D kann dann übrigens auch nicht für alle reellen Punkte gleich Null sein, weil sonst nach (14) die drei Functionaldeterminanten von je zweien der Grössen x, y, z hinsichtlich u und v gleich Null wären, was nach Satz 55, I S. 83, und nach Satz 1, S. 5, unstatthaft ist. Für imaginäre Flächen jedoch ist dieser Schluss nicht bindend.

Es giebt thatsächlich imaginäre Flächen, auf denen D überall gleich Null ist. Wir werden bald, auf S. 29, erkennen, was für Flächen dies sind.

Sehr oft wird in den Formeln die Grösse D als Nenner vorkommen, was zur Folge hat, dass viele Sätze der allgemeinen Flächentheorie für jene besonderen Flächen nicht gelten oder wenigstens nur mit Vorsicht anzuwenden sind. Dasselbe gilt bei beliebigen Flächen für diejenigen Punkte auf ihnen, in denen $D = 0$ ist. Daher werden wir häufig den Fall $D = 0$ ausdrücklich auszuschliessen haben.

Noch sei angemerkt, dass mit E, F, G natürlich auch die Function D von E, F, G bei allen Bewegungen ungeändert bleibt.

Liegt die Fläche in der Form vor:

$$z = f(x, y),$$

so hat D nach (9) und (13) den Wert:

$$(15) \qquad D = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

1. Beispiel: Bei der Kugel um den Anfangspunkt mit Radius r (vgl. (6) auf S. 3):

$$x = r\cos u \cos v, \quad y = r \cos u \sin v, \quad z = r \sin u$$

ist:

$$E = r^2, \quad F = 0, \quad G = r^2 \cos^2 u, \quad D = r^2 \cos u$$

und das Quadrat des Bogenelementes also:

$$ds^2 = r^2 du^2 + r^2 \cos^2 u \, dv^2.$$

2. Beispiel: Ist u die Bogenlänge einer Curve:

$$\mathfrak{x} = \varphi(u), \quad \mathfrak{y} = \chi(u), \quad \mathfrak{z} = \psi(u),$$

so hat derjenige Punkt der Tangente der Stelle (u), dessen Abstand vom Berührungspunkt gleich v ist, die Coordinaten:

$$x = \mathfrak{x} + \alpha v, \quad y = \mathfrak{y} + \beta v, \quad z = \mathfrak{z} + \gamma v, \tag{16}$$

wobei $\alpha = \varphi'(u)$, $\beta = \chi'(u)$, $\gamma = \psi'(u)$ die Richtungscosinus der Tangente sind. Die Gleichungen (16) sind also, wenn u und v als Parameter aufgefasst werden, die der Tangentenfläche der Curve (vgl. 1. Beispiel S. 10 u. I S. 262, Formeln (4)). Hier ist nach III (C):

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \alpha + \frac{l}{r} v, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \beta + \frac{m}{r} v, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = \gamma + \frac{n}{r} v,$$

wenn l, m, n die Richtungscosinus der Hauptnormale, r den Krümmungsradius der Gratlinie bedeuten. Ferner:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \alpha, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \beta, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \gamma,$$

sodass nach II (A):

$$E = 1 + \frac{v^2}{r^2}, \quad F = 1, \quad G = 1, \quad D^2 = \frac{v^2}{r^2}$$

und also:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{v^2}{r^2}\right) du^2 + 2\,du\,dv + dv^2$$

ist. Dies steht in Einklang mit Formel (6) in I S. 263.

§ 3. Tangentenebenen einer Fläche.

Für den Fall, dass eine Fläche durch eine Gleichung zwischen x, y, z gegeben ist:

$$F(x, y, z) = 0,$$

haben wir in I S. 230 den Begriff und den analytischen Ausdruck ihrer Tangentenebenen aufgestellt. Wir wollen jetzt für den Fall, dass die Fläche mittels zweier Parameter u und v in der Form:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v) \tag{1}$$

vorgelegt ist, ihre Tangentenebenen bestimmen.

Gehen wir von dem Punkte (u, v) der Fläche zu einem unendlich benachbarten Punkte $(u + du,\ v + dv)$ über, so wachsen x, y, z um die Differenziale:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv.$$

Die Coordinaten wachsen also proportional den endlichen Grössen

$$\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{du}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{du}, \quad \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{du}. \tag{2}$$

Daher hat die Gerade vom Punkte (u, v) zum Punkte $(u + du, v + dv)$ in den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Gleichungen:

$$(3) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = x + \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{dv}{du}\right)t, \\ \mathfrak{y} = y + \left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{dv}{du}\right)t, \\ \mathfrak{z} = z + \left(\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{du}\right)t \end{cases}$$

mit dem Parameter t. Ist (u, v) ein ganz bestimmt gewählter Punkt der Fläche, so haben hierin die Grössen x, y, z und ihre Ableitungen nach u und v bestimmte Werte. Ausser t ist also rechts nur noch $dv : du$ veränderlich. Je nachdem wir dies Verhältnis der Incremente von u und v wählen, erhalten wir verschiedene Geraden (3) vom Punkte (u, v) aus nach unendlich benachbarten Punkten der Fläche. Nach I S. 232 sind diese ∞^1 Geraden die Tangenten des Punktes (u, v) der Fläche. Setzen wir

$$\frac{dv}{du} \cdot t = \tau,$$

so geben also die Gleichungen:

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = x + \frac{\partial x}{\partial u} t + \frac{\partial x}{\partial v} \tau, \\ \mathfrak{y} = y + \frac{\partial y}{\partial u} t + \frac{\partial y}{\partial v} \tau, \\ \mathfrak{z} = z + \frac{\partial z}{\partial u} t + \frac{\partial z}{\partial v} \tau, \end{cases}$$

wenn in ihnen t und τ beliebig gelassen werden, alle ∞^2 Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ aller ∞^1 Tangenten der Stelle (u, v) oder (x, y, z). Da die Elimination von t und τ aus diesen drei Gleichungen die in $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ lineare Gleichung

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{x} - x & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \mathfrak{y} - y & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \mathfrak{z} - z & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0$$

liefert, so folgt, dass die ∞^1 Tangenten des Flächenpunktes (u, v) eine Ebene erzeugen. Wir haben also hiermit auf anderem Wege als in I S. 232 nachgewiesen, dass die Tangenten eines Flächenpunktes im allgemeinen eine Ebene, die Tangentenebene oder

Tangentialebene des Punktes (u, v) bilden, von der man sagt, dass sie die Fläche in dem betreffenden Punkt berührt. Man erkennt nun, dass der obige Schluss nur dann gilt, wenn für den betrachteten Punkt (x, y, z) weder die drei ersten partiellen Ableitungen der Coordinaten nach u noch die nach v gleich Null sind.

Denn wenn für den betrachteten Punkt zunächst nur:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

ist, so giebt die Reihenentwickelung:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} du^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} du\, dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} dv^2\right) + \ldots,$$

und dieselbe Formel gilt, wenn x durch y oder z ersetzt wird. Da du^2 und $du\,dv$ von höherer Ordnung unendlich klein als du sind, so hat man dann anzunehmen, dass dv^2 von derselben Ordnung wie du ist, sodass bleibt:

$$dx = \left(\frac{\partial x}{\partial u} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\frac{(dv)^2}{du}\right) du.$$

Jetzt sind die Gleichungen der Tangente, die zu einem endlichen Werte k von $(dv)^2 : du$ gehört, diese:

$$\mathfrak{x} = x + \frac{\partial x}{\partial u} t + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} k t,$$

$$\mathfrak{y} = y + \frac{\partial y}{\partial u} t + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} k t,$$

$$\mathfrak{z} = z + \frac{\partial z}{\partial u} t + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} k t$$

mit dem Parameter t. Da die Gleichungen in t und kt linear sind, so erfüllen die Tangenten auch jetzt noch eine Ebene:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{x} - x & \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \\ \mathfrak{y} - y & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \\ \mathfrak{z} - z & \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn nun aber für den betrachteten Punkt sowohl:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

also auch

$$\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

ist, so kommt zunächst:

$$dx = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}du^2 + \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}du\,dv + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}dv^2 + \dots,$$

und diese Formel gilt auch, wenn x durch y oder z ersetzt wird. Geben wir du und dv unendlich kleine Werte von derselben Ordnung, so können wir uns auf die Glieder beschränken:

$$dx = \left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\cdot\frac{dv}{du} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2\right]du^2.$$

Die zugehörige Tangente hat daher, wenn

$$\frac{dv}{du} = k$$

gesetzt wird, die Gleichungen in den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$:

$$\mathfrak{x} = x + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}k + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}k^2\right)t,$$

$$\mathfrak{y} = y + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}k + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}k^2\right)t,$$

$$\mathfrak{z} = z + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}k + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}k^2\right)t$$

mit dem Parameter t. Geben wir k alle beliebigen Werte, so stellen diese Gleichungen mittels der beiden Parameter t und k die Fläche dar, die von allen Tangenten des Punktes (x, y, z) gebildet wird. Die Elimination von t und k liefert die in $\mathfrak{x} - x$, $\mathfrak{y} - y$, $\mathfrak{z} - z$ homogene quadratische Gleichung:

$$4\begin{vmatrix} \mathfrak{x}-x & x_{uv} & x_{vv} \\ \mathfrak{y}-y & y_{uv} & y_{vv} \\ \mathfrak{z}-z & z_{uv} & z_{vv} \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} x_{uu} & x_{uv} & \mathfrak{x}-x \\ y_{uu} & y_{uv} & \mathfrak{y}-y \\ z_{uu} & z_{uv} & \mathfrak{z}-z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_{uu} & \mathfrak{x}-x & x_{vv} \\ y_{uu} & \mathfrak{y}-y & y_{vv} \\ z_{uu} & \mathfrak{z}-z & z_{vv} \end{vmatrix}^2 = 0,$$

die einen Kegel zweiter Ordnung mit der Spitze (x, y, z) bedeutet. In dem vorliegenden Falle heisst daher der Punkt (x, y, z) singulär (vgl. Satz 32, I S. 231). Dadurch, dass auch höhere Ableitungen von x, y, z nach u und v gleich Null werden können, was wir soeben stillschweigend ausgeschlossen hatten, können übrigens noch stärkere Singularitäten eintreten: Der Tangentenkegel kann von höherer als zweiter Ordnung werden. Hierauf gehen wir jedoch nicht ein.

Wenn die ersten Ableitungen von x, y, z nach dem einen Parameter, nicht aber auch die nach dem anderen gleich Null sind, so kommt dem Punkte (x, y, z) zwar nach Obigem eine Tangentenebene zu. Jedoch hat ihre Gleichung nicht die Form (5). Allgemeine

Betrachtungen, bei denen die Form (5) benutzt wird, sind also nicht ohne weiteres auf solche Punkte anwendbar.

Wir setzen deshalb fest: Ein Punkt (x, y, z) der Fläche soll auch dann singulär heissen, wenn für ihn die ersten Ableitungen nach einem der beiden Parameter alle drei gleich Null sind. Von solchen Punkten sehen wir grundsätzlich ab, und wir brauchen dies deshalb später nicht mehr immer zu erwähnen. Bemerkt sei nur nochmals: Die Tangenten der Fläche verhalten sich an einer solchen singulären Stelle nur dann singulär, wenn die Ableitungen von x, y, z nach beiden Parametern gleich Null sind. Die sonstigen singulären Punkte sind, kann man sagen, nur in Hinsicht auf das gerade benutzte Parametersystem singulär. Denn man kann durch Einführung neuer Parameter leicht ihre Singularität vernichten.

Nicht-singuläre Punkte heissen regulär. Punkte allgemeiner Lage sind regulär.

Beispiel: Ein Kreis drehe sich um eine Secante. Dadurch entsteht eine Ringfläche, die in ihren Schnittpunkten mit der Secante singulär ist, weil dort die Tangenten des Kreises Rotationskegel beschreiben.

Wir kehren zur Betrachtung der Fläche an einer regulären Stelle (x, y, z) zurück. Dort ist (5) die Gleichung der Tangentenebene.

Ordnen wir sie nach den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, so hat sie die Form:

$$A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} + C\mathfrak{z} = D,$$

worin A, B, C, D nach (5) Functionen von $x, y, z;\ x_u, y_u, z_u;\ x_v, y_v, z_v$, d. h. nach (1) Functionen von u und v sind. Die Coefficienten der allgemeinen Gleichung einer Tangentenebene enthalten also zwei willkürliche Parameter u und v, sodass wir sagen können: Eine Fläche hat höchstens ∞^2 Tangentenebenen. Aber sie kann auch weniger haben, denn eine abwickelbare Fläche hat ja nur ∞^1 Tangentenebenen (vgl. z. B. Satz 15, I S. 293).

Dies führt uns zu einer umgekehrten Fragestellung: Es sei eine stetige Schar von unendlich vielen Ebenen gegeben. Es wird dann gefragt, ob es eine Fläche giebt, die alle diese Ebenen berührt.

Da die Schar der Ebenen höchstens von zwei willkürlichen Grössen u und v abhängen darf, so wird sie durch eine Gleichung von der Form zu geben sein:

$$A(u, v)\mathfrak{x} + B(u, v)\mathfrak{y} + C(u, v)\mathfrak{z} = D(u, v). \tag{6}$$

Wenn nun von den drei Verhältnissen der vier Grössen A, B, C, D zwei von einander unabhängige Functionen von u und v sind, so enthält die Schar (6) sicher ∞^2 Ebenen. Andernfalls liegen nur ∞^1 Ebenen vor, und wir wissen, dass ∞^1 Ebenen die Tangentenebenen einer abwickelbaren Fläche sind, vgl. § 5, I S. 289 u. f. Da dieser Fall schon erledigt ist, setzen wir voraus, dass zwei der Verhältnisse der Grössen A, B, C, D von einander unabhängig seien.

Sollen nun die ∞^2 Ebenen (6) die Tangentenebenen einer Fläche sein, so muss jede der Ebenen einen Punkt (x, y, z) der fraglichen Fläche enthalten. Da eine Ebene aus der Schar (6) durch Angabe der Werte von u und v charakterisiert wird, so werden die Werte x, y, z auch Functionen von u und v sein. Wären sie bekannt, so läge die Fläche in Parameterdarstellung vor. Nun ist zu fordern, dass die zum Wertepaar u, v gehörige Ebene (6) alle Tangenten (4) des Punktes (x, y, z) enthalte, d. h. dass[1]

$$\mathsf{S}\, A(x + x_u t + x_v \tau) = D$$

sei für alle Werte von u, v und von t, τ, also einzeln:

$$\mathsf{S}\, A x = D, \quad \mathsf{S}\, A x_u = 0, \quad \mathsf{S}\, A x_v = 0.$$

Da die erste Gleichung die durch Differentiation nach u oder v hervorgehenden Gleichungen:

$$\mathsf{S}\, A_u x + \mathsf{S}\, A x_u = D_u, \quad \mathsf{S}\, A_v x + \mathsf{S}\, A x_v = D_v$$

nach sich ziehen würde, so lassen sich die zweite und dritte Gleichung ersetzen durch:

$$\mathsf{S}\, A_u x = D_u, \quad \mathsf{S}\, A_v x = D_v.$$

Mithin finden unsere Forderungen in den drei Bedingungen

$$\mathsf{S}\, A x = D, \quad \mathsf{S}\, A_u x = D_u, \quad \mathsf{S}\, A_v x = D_v \tag{7}$$

für x, y, z ihren vollständigen Ausdruck.

Die Discussion dieser Bedingungen teilt man zweckmässig in zwei Fälle: Da von den Verhältnissen von A, B, C, D zwei von einander unabhängig sind, so scheiden wir so: Entweder sind die Verhältnisse von A, B, C allein (ohne D) von einander abhängig oder nicht.

Im ersten Fall sind A, B, C, abgesehen von einem gemeinsamen Factor, von einander abhängig. Da wir den gemeinsamen Factor durch Division entfernen können, so können wir dann annehmen,

[1] Das Summenzeichen bezieht sich hier natürlich auch auf cyklische Vertauschung von A, B, C.

dass A, B, C alle drei Functionen einer Function $\omega(u, v)$ seien, sodass die Gleichung (6) so lautet:

$$A(\omega)\mathfrak{x} + B(\omega)\mathfrak{y} + C(\omega)\mathfrak{z} = D(u, v).$$

Alsdann darf aber D nicht eine Function von ω allein sein. Die Bedingungen (7) sind hier:

$$\mathbf{S}\, A x = D, \quad \omega_u \mathbf{S} \frac{dA}{d\omega} x = D_u, \quad \omega_v \mathbf{S} \frac{dA}{d\omega} x = D_v.$$

Die beiden letzten Gleichungen widersprechen einander, da die Functionaldeterminante von ω und D von Null verschieden ist. Es giebt also hier keine Lösung unserer Aufgabe. Im vorliegenden Falle sind alle ∞^2 Ebenen der gegebenen Schar den Ebenen

$$A(\omega)\mathfrak{x} + B(\omega)\mathfrak{y} + C(\omega)\mathfrak{z} = 0$$

durch den Anfangspunkt parallel. Diese letzteren sind aber nur ∞^1 Ebenen, die also einen Kegel umhüllen.

In dem anderen Falle, dass die Verhältnisse von A, B und C allein von einander unabhängig sind, gilt dies auch von den Verhältnissen der Coefficienten von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, sobald wir die Gleichung (6) durch Division mit D auf die Form

$$A\mathfrak{x} + B\mathfrak{y} + C\mathfrak{z} = 1 \tag{8}$$

gebracht haben. Diese Reduction ist übrigens unmöglich, wenn $D = 0$ ist, d. h. alle ∞^2 Ebenen die Ebenen durch den Anfangspunkt sind. Jetzt haben die Gleichungen (7) die Form:

$$\mathbf{S}\, A x = 1, \quad \mathbf{S}\, A_u x = 0, \quad \mathbf{S}\, A_v x = 0. \tag{9}$$

Ihre Determinante hinsichtlich x, y, z ist, wie man durch Ausrechnung sieht, gleich der Funtionaldeterminante von $A:C$ und $B:C$ (vgl. I S. 81), multipliciert mit C^3. Wäre sie gleich Null, so wäre entweder $C = 0$, was wir aber dadurch ausschliessen können, dass wir die Coordinaten vertauschen, denn zwei der drei Grössen A, B, C sind ja von Null verschieden, oder aber es wären $A:C$ und $B:C$ gegen die Voraussetzung von einander abhängig, nach Satz 54, I S. 82. Also sind die Gleichungen (9) nach x, y, z auflösbar.

Sind zwei der Functionen x, y, z von u und v, die sich aus (9) ergeben, von einander unabhängig, so stellen die Auflösungen eine Fläche in den laufenden Coordinaten x, y, z, ausgedrückt mittels der Parameter u und v, dar, und die ∞^2 gegebenen Ebenen sind ihre Tangentenebenen. Wenn dagegen die drei Lösungen x, y, z von einander abhängige Functionen von u und v sind, so stellen sie eine

Curve dar (vgl. S. 4), die von den ∞^2 gegebenen Ebenen berührt wird. Sind endlich die drei Lösungen x, y, z Constanten, so ergeben sie einen Punkt, durch den alle ∞^2 gegebenen Flächen hindurchgehen. Das Gleiche liefert der Fall $D = 0$.

Unser Ergebnis ist somit, wenn wir in dem zweiten Hauptfall wieder von der speciellen Form (8) zur allgemeinen (6) zurückkehren:

Satz 7: Liegt eine Schar von ∞^2 Ebenen in den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ vor:

$$A(u, v)\mathfrak{x} + B(u, v)\mathfrak{y} + C(u, v)\mathfrak{z} = D(u, v),$$

ausgedrückt mittels zweier Parameter u und v, so giebt es dann und nur dann eine Fläche, die alle diese Ebenen berührt, wenn die Auflösung der drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz &= D\,, \\ A_u x + B_u y + C_u z &= D_u\,, \\ A_v x + B_v y + C_v z &= D_v \end{aligned}$$

nach x, y, z möglich ist, und zwar stellen die Lösungen die Fläche in den laufenden Coordinaten x, y, z, ausgedrückt mittels der Parameter u und v, dar. Diese Fläche reduciert sich auf eine Curve, wenn die Lösungen x, y, z von einander abhängige Functionen von u und v sind, und auf einen Punkt, wenn die Lösungen Constanten sind.

Ist die Auflösung der Gleichungen unmöglich, so sind alle ∞^2 Flächen den Tangentenebenen eines Kegels parallel.

Da parallele Ebenen in der Auffassung der projectiven Geometrie (vgl. I S. 327 Anm. u. I S. 339) eine unendlich ferne Gerade gemein haben, so ist der letzte Fall der, dass je ∞^1 Ebenen der Schar eine Gerade im Unendlichfernen gemein haben, sodass es in der unendlich fernen Ebene eine Curve giebt, die von den ∞^2 Ebenen berührt wird, nämlich die Schnittcurve des erwähnten Kegels mit der unendlich fernen Ebene. Reduciert sich der Kegel auf eine Gerade, so reduciert sich die unendlich ferne Curve auf einen Punkt.

Das Hauptergebnis unserer Betrachtungen ist dies: Eine Schar von ∞^2 Ebenen umhüllt im allgemeinen eine Fläche. (Vgl. I S. 140.)

§ 4. Fortschreitungsrichtungen von einem Flächenpunkte aus.

Wir kehren zur Betrachtung der Tangentenebenen einer gegebenen Fläche:

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

zurück, deren Bogenelement ds durch die Formel:

$$(2) \qquad ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2$$

ausgedrückt sei. Wir haben gesehen, dass die Tangentenebene des Flächenpunktes (u, v) in den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Gleichung hat (vgl. (5), S. 20):

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} \mathfrak{x} - x & x_u & x_v \\ \mathfrak{y} - y & y_u & y_v \\ \mathfrak{z} - z & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0.$$

Die Gerade, die im Berührungspunkt (u, v) auf der Tangentenebene senkrecht steht, heisst die Normale der Fläche im Punkte (u, v). Ihre Richtungscosinus sind nach (3) den drei Grössen:

$$y_u z_v - z_u y_v, \quad z_u x_v - x_u z_v, \quad x_u y_v - y_u x_v$$

proportional. Da die Summe der Quadrate dieser drei Grössen nach (14), S. 18, gleich D^2 oder $EG - F^2$ ist, so sind:

$$(4) \qquad X = \frac{y_u z_v - z_u y_v}{D}, \quad Y = \frac{z_u x_v - x_u z_v}{D}, \quad Z = \frac{x_u y_v - y_u x_v}{D}$$

die Richtungscosinus X, Y, Z der Normalen. Dadurch, dass wir D und nicht $-D$ geschrieben haben, ist der Normale im Fall eines reellen Flächenpunktes mit reellen Parameterwerten ein positiver Sinn beigelegt worden.

Wir merken hier einige öfters anzuwendende Formeln an. Zunächst ist augenscheinlich:

$$\mathbf{S}\, X^2 = 1, \quad \mathbf{S}\, X X_u = 0, \quad \mathbf{S}\, X X_v = 0,$$

ferner:

$$(5) \qquad \mathbf{S}\, X x_u = 0, \quad \mathbf{S}\, X x_v = 0.$$

Ferner ist nach (4):

$$Y z_u - Z y_u = \frac{1}{D} \{(y_u^2 + z_u^2) x_v - (y_u y_v + z_u z_v) x_u\}.$$

Wenn wir in der grossen Klammer $x_u^2 x_v$ addieren und subtrahieren, so kommt nach (7), S. 15:

$$Yz_u - Zy_u = \frac{Ex_v - Fx_u}{D}.$$

Analog ergiebt sich überhaupt die Reihe von Formeln:

$$(6)\quad \begin{cases} Yz_u - Zy_u = \dfrac{Ex_v - Fx_u}{D}, & Yz_v - Zy_v = \dfrac{Fx_v - Gx_u}{D}, \\ Zx_u - Xz_u = \dfrac{Ey_v - Fy_u}{D}, & Zx_v - Xz_v = \dfrac{Fy_v - Gy_u}{D}, \\ Xy_u - Yx_u = \dfrac{Ez_v - Fz_u}{D}, & Xy_v - Yx_v = \dfrac{Fz_v - Gz_u}{D}. \end{cases}$$

Auch folgt:

$$(7)\quad \begin{vmatrix} x_u & x_v & X \\ y_u & y_v & Y \\ z_u & z_v & Z \end{vmatrix} = D,$$

wenn man die Determinante nach der letzten Reihe entwickelt und die Werte (4) benutzt.

Die Formeln (4) für die Richtungscosinus der Flächennormale enthalten D im Nenner und sind daher nicht brauchbar, wenn D gleich Null ist. Ist dies in einem Flächenpunkte (u, v) der Fall, so hat dort die Tangentenebene (3) eine solche Gleichung:

$$A(\mathfrak{x} - x) + B(\mathfrak{y} - y) + C(\mathfrak{z} - z) = 0,$$

in der $A^2 + B^2 + C^2 = 0$ ist. Die Normale zu dieser Ebene hat keine Richtungscosinus und ist daher eine Minimalgerade (vgl. I S. 142). Nach Satz 48, I S. 339, ist die Tangentenebene folglich zugleich Tangentenebene des Kegels von Minimalgeraden, die durch den betrachteten Flächenpunkt gehen, d. h. der Nullkugel des Punktes. Die Fläche wird also in denjenigen Punkten, in denen $D = 0$ ist, von den zugehörigen Nullkugeln berührt.

Fragen wir nach denjenigen Flächen, auf denen überall $D = 0$ ist. Sie müssen überall von den zugehörigen Nullkugeln berührt werden. Da nun alle Nullkugeln durch Schiebung aus dem Kegel der Minimalgeraden durch den Anfangspunkt hervorgehen (vgl. I S. 336), so sind die Tangentenebenen aller Nullkugeln den Tangentenebenen dieses einen Kegels parallel. Nach dem letzten Absatz des Satzes 7, S. 26, giebt es keine Fläche, die alle diese Tangentenebenen berührt. Hieraus folgt, dass eine Fläche, auf der überall $D = 0$ ist, nur ∞^1 Tangentenebenen hat, die zugleich Tangenten-

ebenen von Nullkugeln sind. Nach Satz 15, I S. 293, ist die Fläche mithin eine abwickelbare Fläche. Ihre Gratlinie wird überall von der zugehörigen Nullkugel berührt und ist daher eine Minimalcurve. Die Gratlinie kann sich auf einen Punkt reducieren, dann ist die Fläche selbst eine Nullkugel; insbesondere gehören auch die Cylinder von Minimalgeraden hierzu. Also haben wir gefunden:

Satz 8: Die Grösse $D^2 = EG - F^2$ ist nur an solchen Stellen einer Fläche gleich Null, in denen die Fläche von der zugehörigen Nullkugel berührt wird.

Satz 9: Die Flächen, auf denen überall $D^2 = EG - F^2$ gleich Null ist, sind die Tangentenflächen der Minimalcurven, insbesondere die Nullkugeln und die Cylinder von Minimalgeraden.

Dass bei der Kugel auf S. 18 die Grösse D in den Polen ($u = \pm \frac{1}{2}\pi$) gleich Null ist, giebt deshalb nicht zu einer Folgerung im Sinne des Satzes 8 Anlass, weil diese Pole bei der gewählten Parameterdarstellung nach S. 6 überhaupt auszuschliessen sind.

Nebenbei sei bemerkt, dass $D = 0$ die Bedingung dafür ist, dass das Quadrat des Bogenelementes als vollständiges Quadrat $(\sqrt{E}\,du + \sqrt{G}\,dv)^2$ geschrieben werden kann. —

Nach dieser Einschaltung kehren wir zur allgemeine Betrachtung zurück.

Auf der gegebenen Fläche (1) lassen wir den Punkt (u, v) sich dadurch bewegen, dass wir nur u ändern, während v seinen Wert behalten soll. Dann beschreibt der Punkt eine Parameterlinie (v). Die Richtungscosinus ihrer Tangente sind proportional den Ableitungen x_u, y_u, z_u von x, y, z nach u. Da die Summe der Quadrate dieser Ableitungen gleich E ist — nach (7), S. 15 —, so sind

$$\frac{1}{\sqrt{E}}x_u, \quad \frac{1}{\sqrt{E}}y_u, \quad \frac{1}{\sqrt{E}}z_u \tag{8}$$

die Richtungscosinus selbst. Ebenso hat die Tangente der durch den Punkt (u, v) gehenden Parameterlinie (u) dort die Richtungscosinus:

$$\frac{1}{\sqrt{G}}x_v, \quad \frac{1}{\sqrt{G}}y_v, \quad \frac{1}{\sqrt{G}}z_v. \tag{9}$$

Wir nennen im reellen Fall diejenigen Richtungen der Tangenten positiv, für deren Cosinus die Quadratwurzeln aus den positiven Grössen E und G positiv sind, d. h. diejenigen Richtungen, längs deren u bez. v zunimmt. (Vgl. I S. 168).

Erinnern wir uns daran, dass die Linien (v) und (u) nach S. 9 die natürliche Verallgemeinerung der Geraden $y = \text{Const.}$ und $x = \text{Const.}$ in der xy-Ebene sind, so liegt es im reellen Fall nahe, in der Tangentenebene diejenige Drehung als positiv zu bezeichnen, vermöge deren die Tangente der Linie (v) in die der Linie (u) übergeht. Siehe Fig. 5. Wir behaupten, dass diese Drehung, sobald man sie von der positiven Seite der Normalen aus betrachtet, in demselben Sinn stattfindet, wie die Drehung in der xy-Ebene von der x-Axe zur y-Axe, sobald man die xy-Ebene von der positiven z-Axe aus betrachtet.

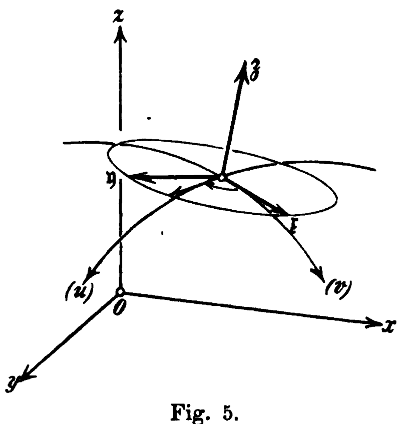


Fig. 5.

Wenn wir nämlich für den Augenblick das Axenkreuz durch eine Bewegung in eine solche Lage $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ bringen, dass der Flächenpunkt der Anfangspunkt, die positive Tangente der Curve (v) die $\mathfrak{x}$-Axe und die positive Normale die $\mathfrak{z}$-Axe wird, so werden sich E, G und $D = \sqrt{EG - F^2}$ dabei nach Satz 6, S. 16, nicht ändern, während $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ jetzt solche Functionen von u und v sein müssen, für die die Richtungscosinus (8) im betrachteten Punkte die Werte 1, 0, 0 und die Richtungscosinus (4) die Werte 0, 0, 1 haben. Bei dieser Annahme ist deshalb im Flächenpunkt

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial u} = \sqrt{E}, \quad \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial u} = 0,$$
$$\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial v} = \frac{D}{\sqrt{E}}, \quad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial v} = 0,$$

sodass die Richtungscosinus (9) die Werte bekommen:

$$\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v}, \quad \frac{D}{\sqrt{E}\sqrt{G}}, \quad 0.$$

In der neuen $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene — der Tangentenebene — liegt mithin die Tangente der Curve (u) so, dass sie mit der positiven $\mathfrak{x}$-Axe einen Winkel ω — im Sinne der Drehung von der $\mathfrak{x}$- zur $\mathfrak{y}$-Axe — bildet, für den

$$\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial v}, \qquad \sin\omega = \frac{D}{\sqrt{E}\sqrt{G}}$$

und daher $\sin\omega$ positiv ist. Folglich liegt ω zwischen 0 und π,

was eben aussagt, dass die Drehung, durch die wir die Tangente der Curve (v) in die der Curve (u) überführen, gerade im Sinne der Drehung der $\mathfrak{x}$-Axe zur $\mathfrak{y}$-Axe hin stattfindet.

Abgesehen davon also, dass der Winkel der Parameterlinien im Punkte (u, v) kein rechter ist, sind jetzt die Tangente der Curve (v), die Tangente der Curve (u) und die Normale gerade so gegen einander orientiert, wie die neuen Coordinatenaxen und also auch gerade so wie die alten Coordinatenaxen.

Die Formel

$$\sin\omega = \frac{D}{\sqrt{E}\sqrt{G}} \tag{10}$$

gilt nach Satz 6, S. 16, auch im alten Coordinatensystem (x, y, z), zu dem wir jetzt zurückgreifen. Der Wert von $\cos\omega$ kann als Summe der Producte der Richtungscosinus (8) und (9) direct berechnet werden:

$$\cos\omega = \mathbf{S}\frac{1}{\sqrt{E}}x_u\frac{1}{\sqrt{G}}x_v$$

oder nach (7), S. 15:

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{E}\sqrt{G}}. \tag{11}$$

Geht der Punkt (u, v) in den Punkt ($u + du, v$) über, so legt er das Bogenelement zurück:

$$d_u s = \sqrt{E}\,du, \tag{12}$$

geht er dagegen in den Punkt ($u, v + dv$) über, so legt er das Bogenelement

$$d_v s = \sqrt{G}\,dv \tag{13}$$

zurück. Sind du und dv positiv, so bilden die alsdann positiven Elemente $d_u s$ und $d_v s$ den Winkel ω mit einander. Die vierte Ecke des durch beide Elemente bestimmten Parallelogrammes (siehe Fig. 6) wird erreicht, wenn sowohl u um du als auch v um dv zunimmt.

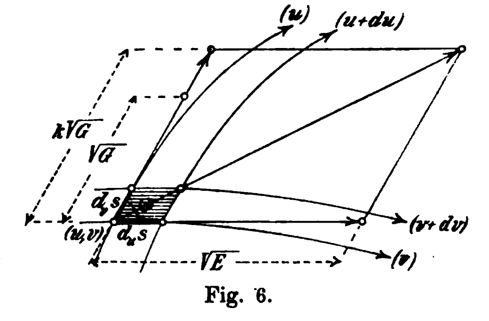


Fig. 6.

Die Richtung, die der Punkt (u, v) auf der Fläche oder auf seiner Tangentenebene einschlägt, wenn u und v um Incremente du und dv wachsen, deren Verhältnis $dv : du = k$ gegeben ist, finden wir daher

so: Auf den positiven Tangenten der Parameterlinien (v) und (u) des Punktes (u, v) tragen wir von diesem Punkte aus Strecken ab, die sich wie $\sqrt{E}\,du$ zu $\sqrt{G}\,dv$ oder also wie $\sqrt{E}$ zu $k\sqrt{G}$ verhalten, und vervollständigen das durch diese beiden Strecken bestimmte Parallelogramm, dessen Diagonale dann die gesuchte Richtung giebt. Je nachdem dabei du positiv oder negativ angenommen wird, wird diese Richtung im Sinne vom ursprünglichen Punkt (u, v) zur Gegenecke oder im entgegengesetzten Sinn, also nach rückwärts über den Punkt (u, v) hinaus, eingeschlagen.

Nehmen wir zwei Werte k und $\varkappa$ für $dv:du$ an, so gehören zu ihnen zwei Tangenten des Punktes (u, v). Längs der ersten ist dann

$$dx:dy:dz = (x_u + k\,x_v):(y_u + k\,y_v):(z_u + k\,z_v),$$

und die Summe der Quadrate der Klammern rechts ist nach (7), S. 15, gleich:

$$E + 2Fk + Gk^2,$$

sodass wir durch Division der Klammern mit der Quadratwurzel hieraus die Richtungscosinus der Tangente (k) erhalten. Wird die Wurzel positiv gewählt, so ist die Fortschreitungsrichtung diejenige, bei der du positiv ist. Entsprechendes ergiebt sich bei der zweiten Tangente. Für den Winkel α beider ist also:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{S}\,(x_u + k\,x_v)\,(x_u + \varkappa\,x_v)}{\sqrt{(E + 2Fk + Gk^2)\,(E + 2F\varkappa + G\varkappa^2)}}.$$

Nach (7), S. 15, kommt daher:

Satz 10: Auf einer Fläche mit den Parametern u und v hat der Cosinus desjenigen Winkels α, den zwei vom Punkte (u, v) ausgehende Tangenten $(dv:du = k)$ und $(dv:du = \varkappa)$ mit einander bilden, den Wert:

$$\cos\alpha = \frac{E + F(k + \varkappa) + Gk\varkappa}{\sqrt{(E + 2Fk + Gk^2)(E + 2F\varkappa + G\varkappa^2)}},$$

und zwar ist die Quadratwurzel im reellen Fall positiv anzunehmen, wenn bei beiden Fortschreitungsrichtungen du positiv ist.

Stehen die beiden Richtungen auf einander senkrecht, so ist $\cos\alpha = 0$. Dies tritt ein, wenn

$$E + F(k + \varkappa) + Gk\varkappa = 0 \tag{14}$$

ist, vorausgesetzt dass der Nenner in der Formel für $\cos\alpha$ nicht auch gleich Null ist. Aber wenn etwa auch

(15) $$E + 2Fk + Gk^2 = 0$$

wäre, so gäbe die Elimination von k aus beiden Gleichungen:

$$D(E + 2F\varkappa + G\varkappa^2) = 0,$$

also entweder $D = 0$ oder

$$E + 2F\varkappa + G\varkappa^2 = 0.$$

Wäre letzteres der Fall, so wäre hiernach und nach (15):

$$k + \varkappa = -\frac{2F}{G}, \qquad k\varkappa = \frac{E}{G},$$

sodass die Substitution dieser Werte in (14) doch $D = 0$ ergäbe. Also können wir sagen:

Satz 11: Zwei Fortschreitungsrichtungen (k) und ($\varkappa$) durch einen Flächenpunkt (u, v) sind zu einander senkrecht, wenn

$$E + F(k + \varkappa) + Gk\varkappa = 0$$

ist, vorausgesetzt, dass dabei $D = \sqrt{EG - F^2}$ nicht gleich Null ist.

Da eine Differentialgleichung

$$A(u, v)\,du^2 + 2B(u, v)\,du\,dv + C(u, v)\,dv^2 = 0$$

nach Satz 5, S. 13, zwei Scharen von je ∞^1 Curven auf der Fläche definiert, so können wir uns fragen, unter welchen Bedingungen diese beiden Scharen einander überall senkrecht schneiden oder also, wie wir sagen (vgl. I S. 110), ein Orthogonalsystem bilden. Die Differentialgleichung giebt, als quadratische Gleichung für $dv : du$ aufgefasst, für jeden Punkt (u, v) der Fläche die Fortschreitungsrichtungen (k) und ($\varkappa$) der durch den Punkt gehenden Curven der beiden Scharen. Daher ist

$$k + \varkappa = -\frac{2B}{C}, \qquad k\varkappa = \frac{A}{C}.$$

Setzen wir diese Werte in die Orthogonalitätsbedingung des Satzes 11 ein, so kommt:

Satz 12: Die durch die Differentialgleichung

$$A(u, v)\,du^2 + 2B(u, v)\,du\,dv + C(u, v)\,dv^2 = 0$$

definierten beiden Scharen von je ∞^1 Curven auf einer

Fläche mit den Parametern u und v bilden, vorausgesetzt, dass $D = \sqrt{EG - F^2}$ nicht gleich Null ist, ein Orthogonalsystem dann und nur dann, wenn

$$EC - 2FB + GA = 0$$

für beliebige Werte von u und v ist.

Da insbesondere $du\,dv = 0$ die Differentialgleichung der Scharen von Parameterlinien ist und hier also $A = C = 0$ zu setzen wäre, so folgt:

Satz 13: Die Parameterlinien (u) und (v) einer Fläche, auf der $D = \sqrt{EG - F^2}$ nicht gleich Null ist, bilden ein Orthogonalsystem, wenn F für beliebige Werte von u und v gleich Null ist.

Ist F nicht überall gleich Null, so giebt die Forderung $F = 0$ als Gleichung zwischen u und v nach Satz 3, S. 11, im allgemeinen eine Curve, in deren Punkten die Parameterlinien einander senkrecht schneiden. Diese Curve kann sich auf einen Punkt reducieren, ja es kann vorkommen, dass F nirgends gleich Null ist.

Beispiel: Auf der Kugel

$$x = r\cos u \cos v, \qquad y = r\cos u \sin v, \qquad z = r \sin u$$

ist F nach S. 18 gleich Null. In der That schneiden die Breitenkreise und Meridiane einander senkrecht.

Wählen wir auf der Fläche eine Schar von ∞^1 Curven ganz beliebig, etwa so, dass sie die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{du} = \lambda(u, v)$$

erfüllen, so können wir die Differentialgleichung der zu dieser Schar orthogonalen Schar leicht aufstellen. Hätte sie die Form

$$\frac{dv}{du} = \mu(u, v),$$

so müssten eben λ und μ nach Satz 11 die Bedingung:

$$E + F(\lambda + \mu) + G\lambda\mu = 0$$

erfüllen. Hieraus aber lässt sich die Function $\mu\,(u, v)$ berechnen.

Der unendlich kleine Inhalt dJ des in Fig. 6, S. 31, dargestellten Parallelogramms mit den Seiten $d_u s$ und $d_v s$ ist (vgl. I S. 118)

$$dJ = d_u s \cdot d_v s \cdot \sin\omega,$$

mithin nach (10), (12) und (13)

(16)
$$dJ = D\,du\,dv.$$

Also:

Satz 14: Die Grösse $D = \sqrt{EG - F^2}$ ist, multipliciert mit du und dv, gleich dem Inhalt des Parallelogramms der vier Punkte (u, v), $(u + du, v)$, $(u, v + dv)$, $(u + du, v + dv)$ auf der Fläche.

Insbesondere:

Satz 15: Das von unendlich benachbarten Parametercurven (u), $(u + \varepsilon)$, $(u + 2\varepsilon)\ldots$ bez. (v), $(v + \varepsilon)$, $(v + 2\varepsilon)\ldots$ gebildete Curvennetz auf einer Fläche besteht dann und nur dann aus lauter gleich grossen Parallelogrammen, wenn $D = \sqrt{EG - F^2}$ auf der Fläche constant ist.

Beispiel: In der xz-Ebene sei eine Gerade im Abstande r parallel zur z-Axe gelegt. Sie werde um die z-Axe gedreht, sodass sie einen Rotationscylinder erzeugt. Da derjenige Punkt der Geraden, der zuerst die z-Coordinate u hat, bei der Drehung, sobald der Winkel v zurückgelegt ist, in den Punkt

$$x = r\cos v, \quad y = r\sin v, \quad z = u$$

übergegangen ist (siehe Fig. 7), so sind diese drei Gleichungen eine Parameterdarstellung des Rotationscylinders. Hier ist $E = 1$, $F = 0$, $G = r^2$, daher $D = r$. Die Sätze 13 und 15 werden hier bestätigt.

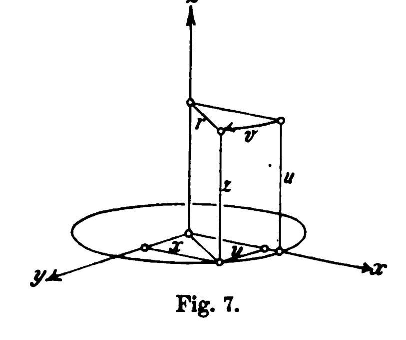


Fig. 7.

Unter den Fortschreitungsrichtungen $(dv:du)$ von einem Flächenpunkte (u, v) aus sind auch zwei enthalten, für die das Quadrat des Bogenelementes:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

gleich Null ist. Dies kann natürlich nur für imaginäre Fortschreitungsrichtungen der Fall sein, was analytisch auch daraus folgt, dass auf einer reellen Fläche mit reellen Parametern u und v die Grösse $EG - F^2$ nach S. 18 nie negativ ist. Die Differentialgleichung:

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0$$

definiert also zwei imaginäre Scharen von je ∞^1 Curven auf der Fläche, längs deren überall das Bogenelement gleich Null ist, also zwei Scharen von Minimalcurven (vgl. I S. 164). Diese beiden

Scharen fallen nur dann zusammen, wenn die Differentialgleichung auf die Form:

$$(\alpha\, du + \beta\, dv)^2 = 0$$

gebracht werden kann, d. h. wenn $EG - F^2 = 0$ ist. (Vgl. S. 29.) Daher nach Satz 9, S. 29:

Satz 16: Jede Fläche enthält zwei Scharen von je ∞^1 Minimalcurven, die nur dann in eine Schar, nämlich in eine Schar von Minimalgeraden, zusammenfallen, wenn die Fläche die Tangentenfläche einer Minimalcurve ist. Die Differentialgleichung der Minimalcurven auf der Fläche ist:

$$E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2 = 0.$$

Insbesondere sind die Parameterlinien selbst die Minimalcurven, wenn diese Differentialgleichung die Form $du\, dv = 0$ hat. Also:

Satz 17: Die Parameterlinien (u) und (v) einer Fläche sind dann und nur dann ihre Minimalcurven, wenn das Quadrat des Bogenelementes die Form hat:

$$ds^2 = 2F\, du\, dv,$$

d. h. von den Gliedern in du^2 und dv^2 frei ist.

Natürlich gehören dann zu reellen Punkten der Fläche imaginäre Werte der Parameter.

§ 5. Flächentreue Abbildung von Flächen.

Liegt irgend eine Fläche vor:

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v),$$

so kann man sie auf unendlich viele Weisen Punkt für Punkt auf die Ebene abbilden, d. h. man kann auf unendlich viele Weisen jedem Punkt (u, v) der Fläche einen Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ einer Ebene mit den rechtwinkligen Coordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gesetzmässig zuordnen. Dies geschieht einfach dadurch, dass man $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ irgend wie als Functionen von u und v giebt:

$$(2) \qquad \mathfrak{x} = \Phi(u, v), \quad \mathfrak{y} = \Psi(u, v).$$

Nur muss man noch ausmachen, dass Φ und Ψ von einander unabhängige Functionen sein sollen. Denn sonst wäre etwa Ψ eine Function von Φ allein:

$$(3) \qquad \Psi = \omega(\Phi),$$

sodass die Bildpunkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der Flächenpunkte nach (2) an die Gleichung

$$\mathfrak{y} = \omega(\mathfrak{x})$$

gebunden wären, geometrisch ausgesprochen: auf einer Curve lägen. Dann wären also alle ∞^2 Punkte (u, v) der Fläche vermöge der Formeln (2) als die ∞^1 Punkte einer Curve in der Ebene abgebildet. Je ∞^1 Punkte der Fläche hätten denselben Bildpunkt, nämlich jedesmal solche ∞^1 Punkte (u, v), für die $\Phi(u, v)$ den gleichen Wert hat, weil für solche ∞^1 Flächenpunkte nach (2) die Grösse $\mathfrak{x}$ gleiche Werte hätte und ebenso die Grösse $\mathfrak{y}$ nach (2) und (3). Eine solche Abbildung heisst ausgeartet, da bei ihr die Fläche nicht auf die ganze Ebene, sondern nur auf eine Curve abgebildet wird.

Wir setzen deshalb voraus, die beiden Gleichungen (2) seien nach u und v auflösbar. Allerdings kann dann immer noch für einzelne Punkte (u, v), ja für ∞^1 Punkte (u, v) die Functionaldeterminante von Φ und Ψ gleich Null sein. Es kann also vorkommen, dass eine gewisse Curve oder einige auf der Fläche doch nur als Punkte abgebildet werden. Ebenso kann es vorkommen, dass einzelne Punkte der Fläche sogar als Curven abgebildet werden, wenn nämlich Φ oder Ψ für gewisse Werte von u und v Unbestimmtheiten darbieten. Es kann also immerhin bei einer nicht ausgearteten Abbildung doch ausgeartete Stellen (Punkte oder Curven) geben. Wir müssen uns auf einen solchen Teil (u, v) der Fläche beschränken, für den Φ und Ψ bestimmt bleiben und ihre Functionaldeterminante nicht gleich Null ist.

Berechnen wir u und v aus (2) als Functionen von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ und setzen wir die berechneten Werte in (1) ein, so kommen drei Gleichungen von der Form:

$$x = f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \quad y = g(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \quad z = h(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}).$$

Sie geben direct zu jedem Bildpunkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ in der Ebene den Originalpunkt (x, y, z) auf der Fläche. Von solchen Gleichungen gingen wir aus, als wir im I. Band in § 3 des 3. Abschnittes diejenigen Abbildungen einer Fläche auf die Ebene besprachen, bei denen jede unendlich kleine Entfernung auf der Fläche auch im Bilde die wahre Grösse hatte. Damals sahen wir, dass nur gewisse Flächen, nämlich die Tangentenflächen von Curven, eine solche punktweise Abbildung auf die Ebene gestatten. Siehe Satz 10, I S. 282. Deshalb konnten wir diese besonderen Flächen die abwickelbaren Flächen nennen.

Wir folgern hieraus, dass wir eine beliebige Fläche (1) nicht

in der Weise auf die Ebene abzubilden vermögen, dass jeder Curve auf der Fläche in der Ebene eine gleich lange Curve entspricht. Diese Forderung der Längentreue, wie wir sie nennen können, geht also zu weit, wenn es sich um eine beliebige Fläche (1) handelt. Wohl aber können wir die Forderung der Flächentreue[1] stellen. Es giebt nämlich immer solche Abbildungen einer beliebigen Fläche (1) auf die Ebene, bei denen jedes Flächenstück im Bilde denselben Flächeninhalt wie auf der Fläche selbst hat. Es ist unsere Absicht, dies hier zu beweisen.

Wir betrachten auf der Fläche (1) vier unendlich benachbarte Punkte, nämlich die Punkte (u, v), $(u + du, v)$, $(u, v + dv)$, $(u + du, v + dv)$, siehe die Fig. 6 auf S. 31. Sie bestimmen, wie wir sahen, ein unendlich kleines Parallelogramm, dessen Inhalt nach (16), S. 35, gleich

$$D\,du\,dv$$

ist. Dem Parallelogramm entspricht bei der Abbildung (2) wiederum ein unendlich kleines Parallelogramm in der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene. Denn nach dem I. Band, § 16 des 1. Abschnittes, bestimmen die Gleichungen (2) ein Netz von Parameterlinien (u) und (v) in der Bildebene. Diese Linien sind die Bilder der Parameterlinien (u) und (v) der Fläche (1). Wie das vorhin betrachtete Parallelogramm auf der Fläche von den vier Parameterlinien (u), $(u + du)$, (v), $(v + dv)$ umschlossen wird, so wird das Bild dieses Parallelogramms in der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene von den vier Bildern dieser Parameterlinien umschlossen; und nach (9), I S. 118, ist der Inhalt des Bild-Parallelogramms gleich

$$\pm(\Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v)\,du\,dv,$$

wie man sieht, wenn man bedenkt, dass an die Stelle der damaligen Gleichungen (1) auf S. 112 die jetzigen Gleichungen (2) treten.

Das unendlich kleine Parallelogramm auf der Fläche hat also denselben Inhalt wie sein Bild in der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene, wenn

$$\Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v = \pm D \tag{4}$$

ist. Gilt dies für alle Werte u, v innerhalb des zulässigen Wertebereiches, so hat auch jedes endliche Stück der Fläche denselben Inhalt wie sein Bild, denn jedes Flächenstück lässt sich als Summe (Doppelintegral) solcher unendlich kleiner Parallelogramme darstellen.

Die Gleichung (4) ist also — bei bestimmter Wahl des Vorzeichens — der analytische Ausdruck dafür, dass die betrachtete

[1] Hier ist das Wort Fläche im Sinne von Flächeninhalt zu verstehen.

Abbildung (2) der Fläche (1) auf die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene flächentreu ist. Wir wollen dies als Satz formulieren, indem wir auf die Formel (13), S. 17, zurückgehen:

Satz 18: Die Fläche

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

ist dann und nur dann vermöge der Gleichungen

$$\mathfrak{x} = \Phi(u, v), \quad \mathfrak{y} = \Psi(u, v)$$

flächentreu auf die Ebene mit den rechtwinkligen Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ abgebildet, wenn die Functionen Φ und Ψ für beliebige Wertepaare u, v eine der beiden Bedingungen:

$$\Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v = \pm \sqrt{EG - F^2}$$

erfüllen.

Die frühere Voraussetzung der Unabhängigkeit von Φ und Ψ ist im Satze nicht nötig, denn wenn Φ und Ψ von einander abhängig sind, so ist ihre Functionaldeterminante nach I S. 83 gleich Null und mithin $D = 0$. Auf den Tangentenflächen der Minimalcurven (vgl. S. 29) hat aber nach Satz 14, S. 35, jede Fläche den Inhalt Null. Wenn wir also eine solche Fläche in ausgearteter Weise nur als Curve in der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene abbilden, dürfen wir doch die Abbildung flächentreu nennen.

Man erkennt leicht, dass man nur eine flächentreue Abbildung der Fläche (1) auf die Ebene zu kennen braucht, um auch alle angeben zu können. Denn wir brauchen ja nur weiterhin die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene flächentreu auf eine andere Ebene, sagen wir auf eine $\xi\eta$-Ebene abzubilden, was nach Satz 75, I S. 123, keine Schwierigkeiten macht. Jedem Punkt (u, v) der Fläche entspricht dann ein Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der ersten Ebene und weiterhin diesem Punkt ein Punkt (ξ, η) der zweiten Ebene, und dabei sind entspechende Flächenstücke auf der Fläche und in den beiden Ebenen einander an Inhalt gleich. Der umgekehrte Schluss liegt auf der Hand: Ist die Fläche auf zwei Ebenen flächentreu abgebildet, etwa vermöge:

$$\mathfrak{x} = \Phi(u, v), \quad \mathfrak{y} = \Psi(u, v) \tag{5}$$

und vermöge

$$\xi = \Phi_1(u, v), \quad \eta = \Psi_1(u, v), \tag{6}$$

so ergeben sich durch Elimination von u und v zwei Gleichungen

$$\xi = X(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \quad \eta = Y(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}),$$

die eine flächentreue Abbildung der einen Ebene auf die andere bedeuten. Daher:

Satz 19: Kennt man eine flächentreue Abbildung einer gegebenen Fläche auf die Ebene, so erhält man alle ihre übrigen flächentreuen Abbildungen auf eine Ebene dadurch, dass man jene eine Ebene weiterhin in allgemeinster Weise auf eine andere Ebene flächentreu abbildet.

Liegen zwei Flächen vor und will man die eine auf die andere in allgemeinster Weise flächentreu abbilden, so braucht man nur je eine flächentreue Abbildung jeder der beiden Flächen auf je eine Ebene zu kennen. Denn dann braucht man ja nur die eine Ebene in allgemeinster Weise flächentreu auf die andere abzubilden, sodass nach Satz 75, I S. 123, folgt:

Satz 20: Das Problem, eine gegebene Fläche in allgemeinster Weise flächentreu auf eine andere gegebene Fläche abzubilden, erfordert zu seiner Lösung nur noch Eliminationen, sobald man jede der beiden Flächen auf eine Art flächentreu auf die Ebene abzubilden vermag.

Beispiele hierzu bringt der nächste Paragraph.

§ 6. Flächentreue Abbildung der Rotationsflächen.

Das Problem der flächentreuen Abbildung ist insbesondere für die Rotationsflächen lösbar. Eine Rotationsfläche entsteht dadurch, dass eine starre Curve um eine fest mit ihr verbundene und im Raume unbewegliche Gerade gedreht wird. Diese Gerade heisst die Axe der Fläche. Alle ebenen Schnitte, die die Axe enthalten, sind einander congruente Curven und heissen die Meridiane der Fläche. Jeder ebene Schnitt senkrecht zur Axe ist ein Kreis und heisst Breitenkreis. Diese Bezeichnungen sind von dem um die Erdaxe rotierenden Erdsphäroid entnommen.

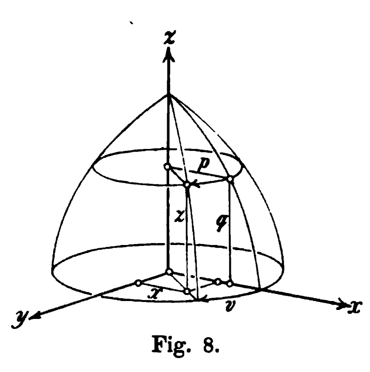


Fig. 8.

Um eine Rotationsfläche analytisch darzustellen, nehmen wir ihre Axe zur z-Axe, sodass die xz-Ebene einen Meridian enthält (siehe Fig. 8). Die Bogenlänge dieses Meridians, gemessen von irgend einer Stelle aus, sei mit u bezeichnet, sodass etwa:

$$x = p(u), \quad y = 0, \quad z = q(u) \tag{1}$$

die Gleichungen dieses Meridians sind. Wird die Ebene dieses Meridians um den Winkel v um die z-Axe gedreht, so sind

$$(2) \qquad x = p(u)\cos v, \quad y = p(u)\sin v, \quad z = q(u)$$

die Gleichungen des neuen Meridians. Giebt man dem Winkel v alle möglichen Werte, so stellen die Gleichungen (2) alle Meridiane dar, d. h. die Gleichungen (2) sind, wenn u und v beliebig variieren dürfen, die Gleichungen der Rotationsfläche, ausgedrückt mittels zweier Parameter u und v.

Nach (7) auf S. 15 sind die Fundamentalgrössen erster Ordnung hier diese:

$$E = p'^2 + q'^2, \quad F = 0, \quad G = p^2.$$

Die Formel $F = 0$ sagt nach Satz 13, S. 34, aus, dass die Parameterlinien ein Orthogonalsystem bilden. Dies kann man auch geometrisch leicht sehen, denn die Linien (u) sind die Breitenkreise und die Linien (v) die Meridiane.

Da u die Bogenlänge der Curve (1) ist, giebt Satz 4, I S. 164:

$$p'^2 + q'^2 = 1,$$

sodass wir haben:

$$(3) \qquad E = 1, \quad F = 0, \quad G = p^2.$$

Das Quadrat des Bogenelementes der Rotationsfläche (2) hat daher die Form:

$$ds^2 = du^2 + p^2(u)\,dv^2.$$

Ferner ist hier:

$$D = \sqrt{EG - F^2} = \pm p(u).$$

Um nun die Fläche auf wenigstens eine Art flächentreu auf die Ebene abzubilden, kommt es nach Satz 18, S. 39, darauf an, zwei Functionen Φ und Ψ von u und v so zu bestimmen, dass

$$(4) \qquad \Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v = \pm p(u)$$

wird. Diese Forderung lässt sich leicht erfüllen, wenn man direct $\Phi = v$ setzt, da dann einfach $\Psi_u = \mp p(u)$ bleibt, sodass z. B.

$$\Psi = \int_0^u p(u)\,du$$

gesetzt werden darf. Daher:

Satz 21: Die Rotationsfläche

$$x = p(u)\cos v, \quad y = p(u)\sin v, \quad z = q(u),$$

bei der u die Bogenlänge des Meridians bedeuten soll, wird vermöge der Gleichungen:

$$\mathfrak{x} = v, \quad \mathfrak{y} = \int_0^u p(u)\,du$$

flächentreu auf die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene abgebildet.

Die Meridiane (v) bilden sich als die Gerade $\mathfrak{x} = v$ parallel zur $\mathfrak{y}$-Axe ab. Geht man von $v = -\pi$ bis $v = +\pi$, so erhält man alle reellen Meridiane und ihre Bilder. Diese Bilder bedecken einen Streifen der Ebene. Wenn wir diesen Streifen als Abwickelung eines Rotationscylinders auffassen, dessen Grundkreis also die Breite 2π des Streifens zur Gesamtlänge und mithin den Radius Eins hat, so können wir vermittels dieses Cylinders die flächentreue Abbildung so herstellen (siehe Fig. 9):[1]

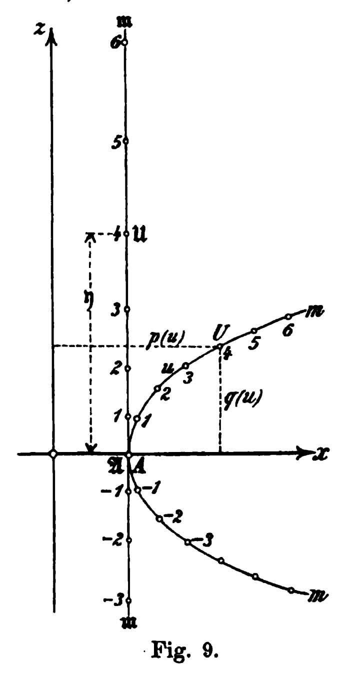


Fig. 9.

Wir construieren denjenigen Rotationscylinder mit dem Radius Eins, dessen Axe die Axe der Fläche ist. Als Grundkreis $\mathfrak{k}$ des Cylinders sei derjenige Kreis bezeichnet, in dem die Ebene des Breitenkreises ($u = 0$) den Cylinder schneidet. Von diesem Breitenkreise an werden die Längen u auf den Meridianen gemessen. Nunmehr fassen wir insbesondere den Meridian ($v = 0$) ins Auge, der in der xz-Ebene liegt. Er sei mit m bezeichnet. Die Ebene dieses Meridians trifft den Cylinder in zwei Geraden, von denen wir eine, $\mathfrak{m}$, auswählen. Dem Punkte U des Meridians m, dessen Bogenlänge AU gleich u ist, ordnen wir denjenigen Punkt $\mathfrak{U}$

[1] Die Fig. 9 ist für die Rotationsfläche, genannt Catenoid, entworfen, die durch Drehung einer Kettenlinie m um ihre Leitlinie entsteht. Hier ist:

$$p(u) = \sqrt{1 + u^2}, \quad q(u) = \log(u + \sqrt{1 + u^2}),$$

sodass der Meridian m die durch Elimination von u hervorgehende Gleichung in x und z hat:

$$x = \tfrac{1}{2}(e^z + e^{-z}).$$

In diesem besonderen Fall liegen die Punkte $\mathfrak{A}$ und A, von denen oben die Rede ist, zusammen.

der Geraden $\mathfrak{m}$ zu, dessen Abstand $\mathfrak{A}\mathfrak{U}$ vom Grundkreis $\mathfrak{k}$ gleich dem Integral von 0 bis u über $p(u)\,du$ ist. Nach (1) ist $p(u)$ die Abscisse x von U, du das Bogenelement auf m. Jetzt ist jedem Punkt U des Nullmeridians m ein Punkt $\mathfrak{U}$ der Geraden $\mathfrak{m}$ zugeordnet. Lassen wir m und $\mathfrak{m}$ um die Axe (z-Axe) rotieren, so wird jedem Punkte der Fläche ein Punkt auf dem Cylinder zugeordnet sein. Wird endlich der Cylinder in die Ebene ausgebreitet, so liegt die gewünschte Abbildung vor. Der Grundkreis $\mathfrak{k}$ und die Gerade $\mathfrak{m}$ sind die $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Axe in der Ebene.

Nach den Erörterungen, die zu Satz 19, S. 40, führten, folgt aus dem Satz 21, dass man alle übrigen flächentreuen Abbildungen der Rotationsfläche (2) auf die Ebene bloss durch Eliminationsprocesse finden kann.

Dies gilt insbesondere von den flächentreuen Abbildungen der Kugel. Solche Abbildungen sind namentlich für geographische Zwecke wichtig.[1] Wir wollen daher einige der beim Entwerfen von Landkarten gebräuchlichen oder doch vorgeschlagenen flächentreuen Abbildungen der Kugel hier ableiten.

Beispiele: Die Rotationsfläche (2) ist eine Kugel um den Anfangspunkt mit dem Radius Eins, wenn die Gleichungen (1) des Nullmeridians die des Kreises mit der Bogenlänge u sind:

$$x = \cos u, \quad y = 0, \quad z = \sin u.$$

Wir setzen also $p = \cos u$, $q = \sin u$, wodurch die Gleichungen (2) in der That in die schon auf S. 3 gefundenen Gleichungen der Kugel

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = \sin u$$

mit der geographischen Breite u und Länge v übergehen. Die im Satz 21 genannte Abbildung hat hier die Gleichungen:

$$\mathfrak{x} = v, \quad \mathfrak{y} = \sin u. \tag{5}$$

Wenn wir hier dieselbe Fig. 9 wie vorhin entwerfen, so sehen wir, dass die einander zugeordneten Punkte U und $\mathfrak{U}$ gleiche Höhe über der xy-Ebene haben. Mithin kann diese einfachste flächentreue Abbildung der Kugel so hergestellt werden:

Wir legen um die Kugel den längs des Äquators ($u = 0$) berührenden Rotationscylinder und ordnen jedem Punkte U der Kugel denjenigen Punkt $\mathfrak{U}$ des Cylinders zu, in dem das über U hinaus verlängerte Lot von U auf die

[1] Die flächentreuen Abbildungen der Kugel, die man auch weniger glücklich als äquivalente Abbildungen bezeichnet, wurden zuerst von Lambert, „Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten“, in seinen „Beyträgen zum Gebrauche der Mathematik“, 3. Teil, Berlin 1772, untersucht. Siehe auch Ostwald's Klassiker Nr. 54. Diese Abhandlung enthält die ersten allgemeinen Untersuchungen über das Problem, die Gradnetze für geographische Karten zu entwerfen.

Nord-Süd-Axe (x-Axe) den Cylinder trifft. Alsdann wird der Cylinder in die Ebene ausgebreitet. Dies ist eine der ältesten flächentreuen Abbildungen.[1] Sie ist in Fig. 10 dargestellt. Zum besseren Erkennen der Verzerrungen sind die Meridiane und Breitenkreise im Abstand von je zehn Grad und die Ländermassen auf der Erdoberfläche in das Bild eingezeichnet.[2] Diese Abbildung (5)

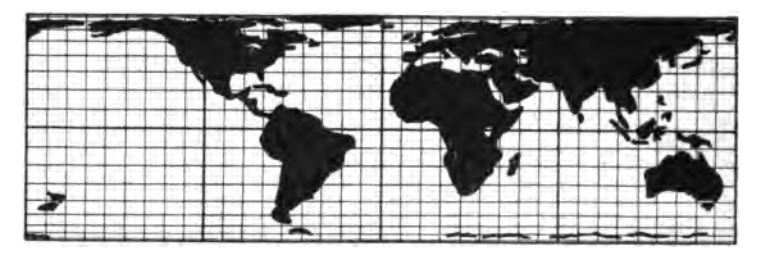


Fig. 10.

ist übrigens periodisch, da $\sin u$ die Periode 2π hat. Die Figur enthält also nur eine Periode des Bildes, die rechts und links noch beliebig oft angesetzt werden kann.

Um sonstige flächentreue Abbildungen der Kugel herzustellen, haben wir jetzt weiterhin nach S. 39 die $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$-Ebene flächentreu auf eine andere Ebene zu beziehen. In dieser Ebene seien ξ und η rechtwinklige Coordinaten. Wir gehen auf Satz 75, I S. 123, zurück und haben nur statt u, v und x, y dort $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und ξ, η oder also nach (5) statt u und v die geographische Länge v und den Sinus der geographischen Breite u und statt x, y die neuen Coordinaten ξ, η zu setzen. Wir verstehen demnach unter ω irgend eine Function von v und ξ, für die

$$\frac{\partial^2 \omega(v, \xi)}{\partial v \, \partial \xi} \neq 0 \tag{6}$$

ist. Darauf setzen wir an:

$$\sin u = \frac{\partial \omega}{\partial v}, \qquad \eta = -\frac{\partial \omega}{\partial \xi} \tag{7}$$

und lösen beide Gleichungen nach ξ und η auf. Hierdurch erhält man nur diejenigen flächentreuen Abbildungen nicht, bei denen die Meridiane in die Geraden ξ = Const. übergehen. Aber durch Vertauschen von ξ und η gehen auch diese hervor.

---

[1] Man benennt sie nach Lambert (vgl. die oben erwähnte Abh.), der sie ausdrücklich als Abbildung anführt. Aber ihr Grundgedanke, dass nämlich die Fläche einer Kugelzone, die von zwei Ebenen parallel zum Äquator begrenzt wird, gleich der Fläche der entsprechenden Zone des längs des Äquators umschriebenen Cylinders ist, war schon Archimedes bekannt.

[2] Man sieht, dass sich diese Art der Abbildung nur für solche Länder eignet, die sich nicht allzusehr vom Äquator entfernen, da die Pole ausgeartet sind. Auch die später zu besprechenden Methoden der Abbildung eignen sich immer nur für Teile der Erdkugel, dennoch stellen wir immer zur besseren Erkenntnis des Abbildungsgesetzes in den Figuren die ganze Erdkugel dar.

Setzen wir z. B. für ω die allerdings ziemlich complicierte Function:

$$\omega = \sqrt{v^2 - \xi^2} - \xi \arccos \frac{\xi}{v}, \tag{8}$$

so folgt aus (7):

$$\sin u = \frac{1}{v} \sqrt{v^2 - \xi^2}, \qquad \eta = \arccos \frac{\xi}{v}$$

oder durch Auflösen nach ξ und η:

$$\xi = v \cos u, \qquad \eta = u. \tag{9}$$

Bei dieser Abbildung[1] erscheinen die Breitenkreise (u) als parallele Geraden η = Const. in ihren wahren auf der Kugel gemessenen Abständen von einander, während die Meridiane (v) durch Curven dargestellt werden, die in der $\xi\eta$-Ebene die Gleichungen (9) mit dem Parameter u haben, die also — nach Elimination von u — auch so geschrieben werden können:

$$\xi = v \cos \eta.$$

Für die verschiedenen Werte der Breite v sind dies verschiedene Curven, die aber alle aus der Cosinuslinie

$$\xi = \cos \eta,$$

dem Bilde des Längenkreises ($v = 1$), durch constante Vergrösserung der Ab-

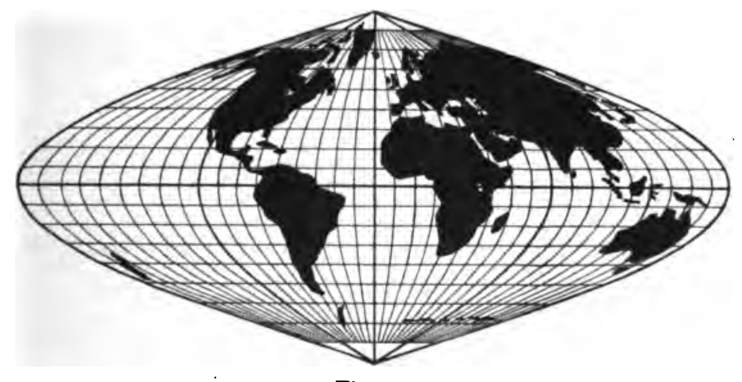


Fig. 11.

scissen hervorgehen. In Fig. 11 ist das Bild gegeben.[2] Die Meridiane schnei-

[1] Die erste Anwendung dieser Abbildungsart findet sich 1606 auf einem Blatte einer Ausgabe von MERCATOR's Atlas nach dem Tode MERCATOR's. Wer den Entwurf dort hergestellt hat, ist nicht sicher bekannt. SANSON wandte diese Abbildungsart zuerst systematisch in seinem im 17. Jahrhundert in Frankreich erschienenen Atlas an. Daher wird sie nach ihm benannt.

[2] Die Figuren 10—16 sind sämtlich in demselben Maassstab entworfen. Bei allen wäre wie bei Fig. 10 zu bemerken, dass die Abbildung insofern periodisch ist, als die Kugelfläche im Bilde unendlich oft wiederholt erscheint — wenn auch nicht gerade congruent wie in Fig. 11 —, da die Gleichungen der Abbildung periodische Functionen enthalten. Für die Zwecke der Kartographie benutzt man nur die in unseren Figuren gegebenen Perioden, ja auch diese nur teilweis wegen der an den Rändern auftretenden grossen Verzerrungen.

den im Bilde auf den Breitenkreisen Strecken ab, die von derselben Länge wie die betreffenden Stücke der Breitenkreise auf der Kugel sind.

Man bemerkt, dass die auf (7) begründete Methode zwar ohne Integrationen, durch Elimination allein alle flächentreuen Abbildungen der Kugel liefert, aber nicht gerade durch einfache Gleichungen darstellbare Abbildungen durch einfache Annahmen für die zu wählende Function $\omega(v, \xi)$.

Geht man darauf aus, gewisse besondere Arten von flächentreuen Bildern der Kugel zu bestimmen, so wird man daher das directe Verfahren anwenden, das allerdings Integrationen verlangt:

Die Gleichungen

$$\mathfrak{x} = \Phi(u, v), \qquad \mathfrak{y} = \Psi(u, v) \tag{10}$$

stellen ja allgemein eine flächentreue Abbildung der Kugel mit der Breite u und Länge v dar, wenn nach (4) und, weil jetzt $p = \cos u$ ist:

$$\Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v = \pm \cos u$$

ist. Ob wir das obere oder untere Vorzeichen wählen, ist gleichgültig, da wir den einen Fall aus dem andern durch Vertauschen von $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{y}$ ableiten können. Wir wollen die Forderung so stellen:

$$\Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v = -\cos u. \tag{11}$$

Benutzen wir in der Ebene statt der rechtwinkligen Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ Polarcoordinaten r, φ, so sind die Gleichungen (10) und (11) durch andere zu ersetzen. Es ist ja:

$$\mathfrak{x} = r \cos\varphi, \qquad \mathfrak{y} = r \sin\varphi, \tag{12}$$

sodass nach (10) auch r und φ Functionen von u und v sind:

$$r = R(u, v), \qquad \varphi = F(u, v). \tag{13}$$

Die Bedingung für diese Functionen (12) können wir leicht aus (11) ableiten. Denn nach (12) ist:

$$\begin{aligned} \Phi_u \Psi_v - \Psi_u \Phi_v &= \mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_v - \mathfrak{y}_u \mathfrak{x}_v = \\ &= \begin{vmatrix} r_u \cos\varphi - r\varphi_u \sin\varphi & r_v \cos\varphi - r\varphi_v \sin\varphi \\ r_u \sin\varphi + r\varphi_u \cos\varphi & r_v \sin\varphi + r\varphi_v \cos\varphi \end{vmatrix} = \\ &= -r(\varphi_u r_v - r_u \varphi_v) = -R(F_u R_v - R_u F_v), \end{aligned}$$

sodass wir statt (11) zu fordern haben:

$$R(F_u R_v - R_u F_v) = \cos u. \tag{14}$$

In Polarcoordinaten r, φ stellen also die Gleichungen (13) eine flächentreue Abbildung der Kugel dar, wenn die Bedingung (14) erfüllt ist.

Zunächst fragen wir jetzt nach den flächentreuen Bildern, bei denen die Breitenkreise als concentrische Kreise und die Meridiane als ihre Radien erscheinen. Hier benutzen wir natürlich Polarcoordinaten r, φ, indem wir verlangen, dass jeder Breitenkreis (u) als ein Kreis $r = $ Const., jeder Meridian (v) als eine Gerade $\varphi = $ Const. erscheinen soll. Wir unterwerfen also die Functionen (13) der Beschränkung, dass R nur von u und F nur von v abhängen soll. Dann reduciert sich (14) auf:

$$-R R'(u) F'(v) = \cos u,$$

woraus einzeln folgt:

$$R\,R'(u) = -a\cos u, \qquad F'(v) = \frac{1}{a} \qquad (a = \text{Const.}),$$

daher:

$$R^2 = 2(b - a\sin u), \qquad F(v) = \frac{v}{a} + c \qquad (b,\ c = \text{Const.}).$$

Nach (13) sind also:

$$(15) \qquad r = \sqrt{2(b - a\sin u)}, \qquad \varphi = \frac{v}{a} + c \qquad (a,\ b,\ c = \text{Const.})$$

die Gleichungen der gesuchten Abbildung.[1]

Sie enthalten drei willkürliche Constanten a, b, c. Offenbar können wir durch Drehung des Anfangsstrahles der Polarcoordinaten erreichen, dass der Nullmeridian ($v = 0$) gerade als der Strahl ($\varphi = 0$) abgebildet wird. Wir dürfen also in (15) ohne weiteres $c = 0$ annehmen. Die Pole $\left(u = \pm\frac{\pi}{2}\right)$ der Kugel bilden sich als die Kreise mit den Radien:

$$\sqrt{2(b \mp a)}$$

ab, arten also in der Figur aus. Der Nordpol $\left(u = \frac{\pi}{2}\right)$ thut dies nur dann nicht, wenn $b = a$ ist. Bei dieser besonderen Annahme können wir die Formeln (15) so schreiben:[2]

$$(16) \qquad r = 2\sqrt{a}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right), \qquad \varphi = \frac{v}{a}.$$

Für $a = 1$ und $a = 2$ stellen die Figuren 12 und 13 auf S. 48 die Karten dar.

Jetzt wollen wir die flächentreuen Bilder suchen, auf denen die Breitenkreise als parallele Geraden erscheinen.[3] Dabei benutzen wir natürlich gewöhnliche Punktcoordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, sodass die Formeln (10) und (11) anzuwenden sind. Wir verlangen, dass jedem Breitenkreis (u) eine Gerade $\mathfrak{y} = \text{Const.}$ entspreche. Mithin muss Ψ eine Function von u allein sein, sodass aus (11) folgt:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial v} = \frac{\cos u}{\Psi'(u)}.$$

Da rechts nur u auftritt, so folgern wir weiter:

$$\Phi = \frac{v\cos u}{\Psi'(u)} + \omega(u).$$

Dabei bedeutet ω eine beliebige Function von u. Also haben wir:

$$(17) \qquad \mathfrak{x} = \frac{v\cos u}{\Psi'(u)} + \omega(u), \qquad \mathfrak{y} = \Psi(u)$$

---

[1] Sie rührt her von Albers in der Monatl. Korrespondenz für Erd- und Himmelskunde Bd. XI und XII, 1805.

[2] Diesen Specialfall von Albers Methode hat schon Lambert 1772 (vgl. die Anm. S. 43).

[3] Ein Specialfall hiervon ist die auf S. 45 gefundene Sanson'sche Abbildung.

als Gleichungen aller Abbildungen der gesuchten Art. Auch die Function Ψ von u kann irgend wie gewählt werden.

Wir wollen insbesondere noch verlangen, dass die Meridiane als Geraden durch einen Punkt — das Bild des Nordpols — erscheinen. Wir denken uns

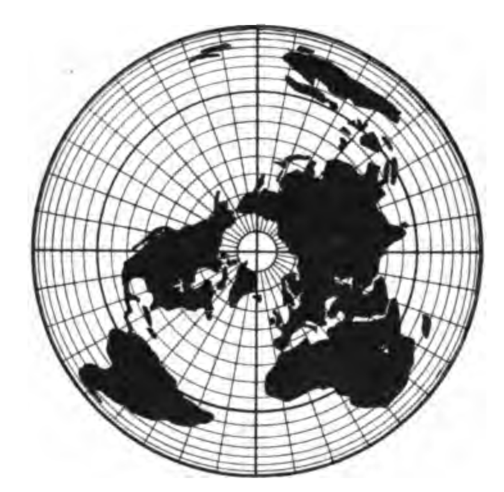


Fig. 12.

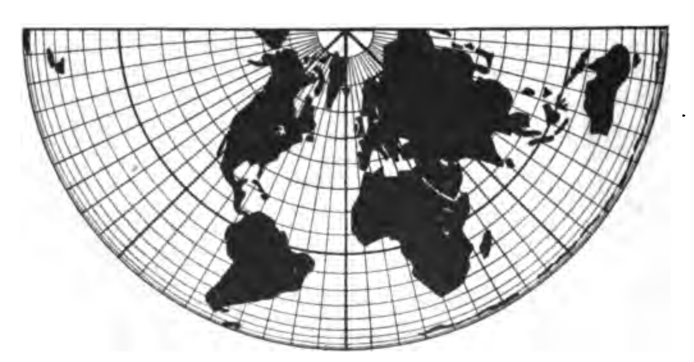


Fig. 13.

die $\mathfrak{y}$-Axe durch diesen Bildpunkt gelegt, sodass $\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = b$ die Coordinaten des Polbildes sind. Jeder Meridian (v) soll als eine Gerade $\mathfrak{x} : (\mathfrak{y} - b) = \text{Const.}$ abgebildet werden, d. h. dies Verhältnis soll eine Function V von v allein sein, woraus nach (17) folgt:

$$\frac{v \cos u}{\Psi'(u)} + \omega(u) = V(v) \cdot [\Psi(u) - b].$$

Da die linke Seite linear in v ist, so gilt dasselbe von V:

$$V = a v + c \quad (a, c = \text{Const.}).$$

Jetzt muss einzeln sein:

$$\frac{\cos u}{\Psi'} = a(\Psi - b), \quad \omega = c(\Psi - b),$$

und die hierin auftretenden Functionen Ψ und ω hängen nur von u ab. Die erste Formel giebt:

$$\cos u = a(\Psi - b)\,\Psi'$$

oder integriert:

$$\sin u + \text{Const.} = \frac{a}{2}(\Psi - b)^2$$

oder:

$$\Psi = b \pm \sqrt{\alpha + \frac{2\sin u}{a}} \quad (\alpha = \text{Const.}),$$

während die zweite Formel nun liefert:

$$\omega = \pm c\sqrt{\alpha + \frac{2\sin u}{a}}.$$

Nach (17) kommt somit:

$$\mathfrak{x} = \pm(a v + c)\sqrt{\alpha + \frac{2\sin u}{a}}, \quad \mathfrak{y} = b \pm \sqrt{\alpha + \frac{2\sin u}{a}}.$$

Weil ($\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = b$) das Bild des Nordpols $\left(u = \frac{\pi}{2}\right)$ sein soll, so muss $a = -\frac{2}{\alpha}$ sein. Natürlich können wir annehmen, dass die $\mathfrak{x}$-Axe gerade das Bild des Äquators ($u = 0$), also $b \pm \sqrt{\alpha} = 0$ sei. Ist b, wie wir offenbar ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit voraussetzen dürfen, positiv gewählt, so werden wir daher bei der Quadratwurzel das Minuszeichen benutzen und ausserdem $\alpha = b^2$ setzen. Dann ist $a = -\frac{2}{\alpha} = -\frac{2}{b^2}$. Ausserdem darf angenommen werden, dass die $\mathfrak{y}$-Axe gerade der Nullmeridian ($v = 0$), daher $c = 0$ sei. Mithin kommt:

$$\mathfrak{x} = \frac{2}{b} v\sqrt{1 - \sin u}, \quad \mathfrak{y} = b(1 - \sqrt{1 - \sin u})$$

oder auch:

$$\mathfrak{x} = \frac{2\sqrt{2}}{b} v \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right), \quad \mathfrak{y} = b\left[1 - \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)\right]. \tag{18}$$

Die Constante b kann irgendwie gewählt werden. Deshalb können wir es so einrichten, dass die Meridiane $\left(v = \pm\frac{\pi}{2}\right)$ als Geraden erscheinen, die mit der $\mathfrak{y}$-Axe Winkel von 45° bilden. Dies tritt nämlich ein, wenn sich $\mathfrak{x}$ für $u = 0$, $v = \pm\frac{\pi}{2}$ auf $\pm b$ reduciert, d. h. für $b = \sqrt{\pi}$. Dann ist:

$$\mathfrak{x} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} v \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right), \quad \mathfrak{y} = \sqrt{\pi}\left[1 - \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)\right]. \tag{19}$$

Dies Kartenbild[1] giebt die Fig. 14. Der Südpol $\left(u = -\frac{\pi}{2}\right)$ erscheint als

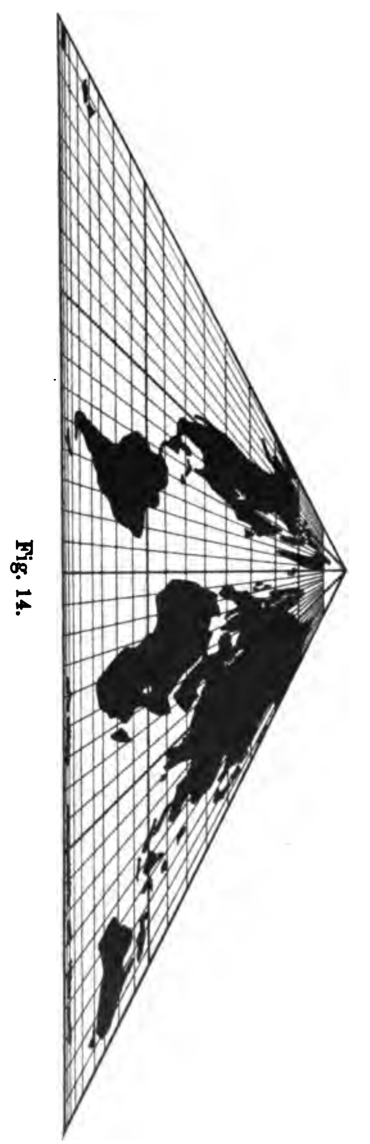


Fig. 14.

Gerade $\mathfrak{y} = -\sqrt{\pi}\,(\sqrt{2} - 1)$ verzerrt, und die ganze Kugelfläche wird auf das Innere eines gleichschenkligen Dreiecks abgebildet, dessen Grundseite diese Gerade in der Länge $4\sqrt{2\pi}$ und dessen Höhe gleich $\sqrt{2\pi}$ ist.

Die Formeln (17) führen zu einer anderen weniger verzerrten Karte, wenn wir versuchen, die Functionen Ψ und ω von u so zu wählen, dass die Meridiane als Ellipsen erscheinen, die eine Axe mit den Endpunkten ($\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = \pm b$) gemein haben. Diese gemeinsame Axe hat dann die Länge $2b$, während die andere Axe für jeden Meridian (v) eine besondere Länge haben wird. Die Länge der zweiten, in der $\mathfrak{x}$-Axe gelegenen Ellipsenaxe ist demnach als Function $2\,V(v)$ von v allein anzunehmen, sodass

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{V^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{b^2} = 1$$

das Bild des Meridians (v) ist. Es fragt sich also, ob wir in (17) die Functionen Ψ und ω von u so wählen können, dass $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ bei geeigneter Wahl der Function V von v die letzte Gleichung erfüllen. Da die letzte Gleichung giebt:

$$\mathfrak{x} = \frac{V}{b}\sqrt{b^2 - \mathfrak{y}^2}, \tag{20}$$

so verlangen wir nach (17):

$$\frac{v \cos u}{\Psi'(u)} + \omega(u) = \frac{V(v)}{b}\sqrt{b^2 - \Psi^2(u)}.$$

Zuerst zeigt sich, dass V linear in v sein muss:

$$V = a\,v + c \qquad (a, c = \text{Const.}).$$

Alsdann kommt einzeln:

$$\frac{\cos u}{\Psi'} = \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - \Psi^2}, \qquad \omega = \frac{c}{b}\sqrt{b^2 - \Psi^2},$$

---

[1] Zuerst angegeben von Collignon, „Recherches sur la représentation plane de la surface du globe terrestre", Journ. de l'École polyt. cah. 24, 1865.

und die hierin auftretenden Functionen Ψ und ω hängen nur von u ab. Die erste Gleichung kann so geschrieben werden:

$$\cos u = \frac{a}{b}\,\Psi'\sqrt{b^2 - \Psi^2}$$

und giebt integriert:

$$\sin u + \text{Const.} = \frac{a}{2b}\,\Psi\sqrt{b^2 - \Psi^2} + \frac{ab}{2}\arcsin\frac{\Psi}{b}. \tag{21}$$

Dies ist eine Bedingung für die Function Ψ von u, während alsdann die Gleichung

$$\omega = \frac{c}{b}\sqrt{b^2 - \Psi^2} \tag{22}$$

noch die Function ω von u ergiebt.

Die Bedingung (21) für Ψ vereinfacht sich noch durch einige besondere Festsetzungen: Ohne die Allgemeinheit der Betrachtung zu beschränken, dürfen wir annehmen, dass sich insbesondere der Nullmeridian ($v = 0$) als die $\mathfrak{y}$-Axe abbilde, also $\mathfrak{x} = 0$ sei für $v = 0$, d. h. nach (17) auch $\omega = 0$ oder also $c = 0$. Ferner seien die Bilder der Meridiane $\left(v = \pm\frac{\pi}{2}\right)$ Kreisbögen, also $V = \pm b$ für $v = \pm\frac{\pi}{2}$. Da $V = av$ ist, sei also $a = 2b:\pi$. Der Äquator ($u = 0$) habe gerade die $\mathfrak{x}$-Axe zum Bilde, was eintritt, wenn $\mathfrak{y}$ oder Ψ für $u = 0$ verschwindet, wenn also die willkürliche Constante in (21) gleich Null gewählt wird. Endlich seien die gemeinsamen Scheitel ($\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = \pm b$) der Ellipsen die Bilder der Pole $\left(u = \pm\frac{\pi}{2}\right)$. Dies ist der Fall, wenn Ψ für $u = \pm\frac{\pi}{2}$ gleich $\pm b$, also $b = \sqrt{2}$ ist. Jetzt haben wir statt (21) und (22):

$$\frac{1}{2}\,\Psi\sqrt{2 - \Psi^2} + \arcsin\frac{\Psi}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}\sin u, \qquad \omega = 0$$

und statt (17) wegen (20):

$$\mathfrak{x} = \frac{2}{\pi}\,v\sqrt{2 - \Psi^2}, \qquad \mathfrak{y} = \Psi.$$

Die Formeln werden etwas bequemer, wenn wir vermöge:

$$\frac{\mathfrak{y}}{\sqrt{2}} = \frac{\Psi}{\sqrt{2}} = \sin\varphi(u)$$

statt Ψ eine neue Function φ von u einführen. Denn jetzt haben wir:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{x} &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\,v\cos\varphi, \\ \mathfrak{y} &= \sqrt{2}\sin\varphi, \end{aligned}\right. \qquad 2\varphi + \sin 2\varphi = \pi\sin u. \tag{23}$$

Die Gleichung rechts zur Bestimmung der Function $\varphi(u)$ ist transcendent, doch lässt sich für jeden Wert von u der zugehörige Wert von φ durch Annäherung ohne Mühe mit beliebiger Genauigkeit berechnen. Bei dieser in Fig. 15, S. 52, dargestellten Abbildung ist die ganze Kugelfläche flächentreu auf das Innere der Ellipse mit den Halbaxen $2\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ ausgebreitet.[1]

[1] Zuerst angegeben von Mollweide in der Monatl. Correspondenz für Erd- und Himmelskunde Bd. XII, 1805.

Schliesslich kommen wir zu der in der Praxis am **meisten gebrauchten flächentreuen Abbildung der Kugel**: Die Breitenkreise sollen in der Art als concentrische Kreise erscheinen, dass sich die Radien der Bilder zweier



Fig. 15.

Breitenkreise gerade um den wahren sphärischen Abstand beider Kreise unterscheiden. Da u der sphärische Abstand des Kreises (u) vom Äquator ist, so soll der Radius r seines Bildes sein:

$$r = a - u \quad (a = \text{Const.}).$$

Wir verwenden natürlich Polarcoordinaten r, φ, deren Ursprung der Mittelpunkt jener concentrischen Kreise ist, und gehen daher auf die Formeln (13) und (14) zurück. Da jetzt $R = a - u$ ist, so giebt (14)

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\cos u}{a - u};$$

mithin haben wir, weil $\varphi = F$ ist:

$$(24) \qquad r = a - u, \quad \varphi = \frac{v \cos u}{a - u} + \omega(u).$$

Hier ist ω eine beliebige Function von u. Soll sich nun der Nullmeridian ($v = 0$) als die Gerade ($\varphi = 0$) abbilden, so ist $\omega = 0$ zu setzen, also:

$$(25) \qquad r = a - u, \quad \varphi = \frac{v \cos u}{a - u}.$$

Diese Abbildung[1] variiert noch mit der Constanten a. Die Pole bilden sich als die Punkte ($r = a \mp \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$) ab, und die Meridiane werden transcendente Curven. Sie schneiden, wie man leicht sieht, auf den Breitenkreisen auch im Bilde die wahren Längen ab. Im Fall $a = \frac{\pi}{2}$, also:

[1] Diese Methode wurde zuerst von Bonne in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts angewandt, weshalb sie nach ihm benannt worden ist. Für ein Jahrhundert wurden die Länderkarten in den Atlanten fast ausschliesslich nach dieser Methode entworfen.

(26) $$r = \frac{\pi}{2} - u, \quad \varphi = \frac{v \cos u}{\frac{\pi}{2} - u}$$

erscheint der Nordpol als Mittelpunkt der concentrischen Breitenkreise. Siehe Fig. 16.[1]

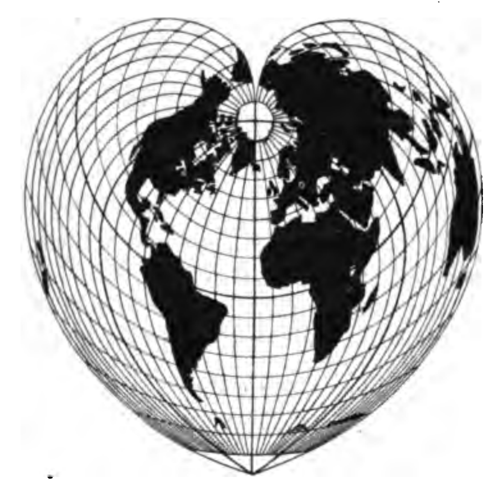


Fig. 16.

Hiermit wollen wir diese sehr beschränkte Auswahl aus der Zahl aller flächentreuen Abbildungen der Kugel abschliessen. Nach unseren früheren Erörterungen (auf S. 44) erfordert die Aufstellung aller flächentreuen Entwürfe nur Eliminationen und keine Integrationen.[2]

---

[1] Dies ist der erste flächentreue Kartenentwurf, der überhaupt angegeben worden ist. Er wurde nach dem Vorschlage von Stab ausgeführt von Werner, „Annotationes Joan. Verneri in primum librum geogr. Cl. Ptolemaei; libellus de quatuor aliis planis terr. orbis descriptionibus", Nürnberg 1514.

[2] Bezüglich der Lehre vom Entwerfen der Gradnetze verweisen wir auf die Bücher:

Herz, „Lehrbuch der Landkartenprojectionen", Leipzig 1885.

Tissot, „Die Netzentwürfe geographischer Karten", deutsch bearb. von Hammer, Stuttgart 1887.

Zöppritz, „Leitfaden der Kartenentwurfslehre", 1. Teil, 2. Aufl. bearb. von Bludau, Leipzig 1899.

Ferner erwähnen wir, dass Gravé 1896 in seiner auf S. 121 des 1. Bandes erwähnten Arbeit die Aufgabe gelöst hat, alle diejenigen flächentreuen Abbildungen der Kugel auf die Ebene zu bestimmen, bei denen die Meridiane und Breitenkreise sämtlich wieder als Kreise erscheinen.

Über nicht-flächentreue Gradnetzentwürfe, die andere ausgezeichnete Eigenschaften haben, sprechen wir später.

§ 7. Isothermen auf einer Fläche.

Es liege irgend eine Fläche in Parameterdarstellung vor:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v), \tag{1}$$

und das Quadrat ihres Bogenelementes sei:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{2}$$

In Bezug auf das System der Parameterlinien (u), (v) können wir ähnliche Betrachtungen wie in der Ebene, im 1. Bd. § 17 des ersten Abschnittes, anstellen: Wollen wir dem Parameter u eine Reihe von Werten geben, von denen jeder folgende unendlich wenig vom vorhergehenden abweicht, so geschieht dies dadurch, dass wir den Zuwachs du des Parameters u gleich einer Function von u, multipliciert mit einer unendlich kleinen Grösse ε, setzen:

$$du = \alpha(u)\,\varepsilon. \tag{3}$$

Lassen wir auch den Parameter v gesetzmässig immer um unendlich wenig wachsen:

$$dv = \beta(v)\,\varepsilon, \tag{4}$$

so wird hierdurch ein unendlich dichtes Netz von Parameterlinien bestimmt. Die Diagonalcurven des Netzes sind die Linien, auf denen u und v gleichzeitig um $\pm\,\alpha(u)\,\varepsilon$ und $\pm\,\beta(v)\,\varepsilon$ wachsen, längs deren also entweder:

$$\frac{du}{\alpha(u)} - \frac{dv}{\beta(v)} = 0$$

oder:

$$\frac{du}{\alpha(u)} + \frac{dv}{\beta(v)} = 0$$

ist. Integrieren wir diese Gleichungen:

$$\int \frac{du}{\alpha(u)} \mp \int \frac{dv}{\beta(v)} = \text{Const.}, \tag{5}$$

so erhalten wir die Diagonalcurven, ausgedrückt durch endliche Gleichungen zwischen u und v (vgl. I S. 114).

Längs einer Diagonalcurve ist eine der beiden Grössen:

$$U = \int \frac{du}{\alpha(u)} - \int \frac{dv}{\beta(v)}, \quad V = \int \frac{du}{\alpha(u)} + \int \frac{dv}{\beta(v)} \tag{6}$$

constant, und vermöge der Gleichungen (6) können wir umgekehrt u und v als Functionen von U und V definieren. (Vgl. I S. 115.)

Führen wir diese Functionen in die Gleichungen (1) ein, so werden x, y, z ebenfalls Functionen von U und V. Wir kommen somit zu einer neuen Parameterdarstellung unserer Fläche. Die neuen Parameterlinien (U) und (V) sind die Diagonalcurven (5) des durch (3) und (4) definierten Netzes der alten Parameterlinien (u) und (v).

Nach Satz 13, S. 34, schneiden die Parameterlinien (u) und (v) einander senkrecht, wenn

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

ist. Dementsprechend schneiden die Diagonalcurven (U) und (V) einander senkrecht, wenn

$$\frac{\partial x}{\partial U}\frac{\partial x}{\partial V} + \frac{\partial y}{\partial U}\frac{\partial y}{\partial V} + \frac{\partial z}{\partial U}\frac{\partial z}{\partial V} = 0 \tag{7}$$

ist. Wie in I S. 116 finden wir aus den Formeln:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv = \frac{\partial x}{\partial U}dU + \frac{\partial x}{\partial V}dV$$

u. s. w. und aus (6):

$$\frac{\partial x}{\partial U} = \frac{1}{2}\left(\alpha\frac{\partial x}{\partial u} - \beta\frac{\partial x}{\partial v}\right), \qquad \frac{\partial x}{\partial V} = \frac{1}{2}\left(\alpha\frac{\partial x}{\partial u} + \beta\frac{\partial x}{\partial v}\right),$$

sowie die entsprechenden Formeln in y und z statt x. Die Bedingung (7) kann daher so geschrieben werden:

$$\mathsf{S}\left(\alpha\frac{\partial x}{\partial u} - \beta\frac{\partial x}{\partial v}\right)\left(\alpha\frac{\partial x}{\partial u} + \beta\frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0$$

oder nach (7), S. 15, so:

$$\alpha^2 E - \beta^2 G = 0 \quad \text{oder:} \quad E : G = \frac{1}{\alpha^2(u)} : \frac{1}{\beta^2(v)}. \tag{8}$$

Ist sie erfüllt, so schneiden die Diagonalcurven des Netzes der Parameterlinien (u) und (v) einander senkrecht; mit anderen Worten: Das Netz besteht dann aus unendlich kleinen **Rhomben** (vgl. I S. 115). Daher:

Satz 22: Damit sich die Parameterlinien (u) und (v) einer Fläche so anordnen lassen, dass sie ein Netz von unendlich kleinen Rhomben bilden, ist notwendig und hinreichend, dass das Verhältnis der beiden Fundamentalgrössen E und G gleich dem Verhältnis aus einer Function von u allein zu einer Function von v allein sei.

Wenn ausserdem $F = 0$ ist, so schneiden auch die Parameterlinien (u) und (v) einander senkrecht; die Rhomben sind dann **Quadrate** (vgl. I S. 117), sodass wir sagen können:

Satz 23: Damit sich die Parameterlinien (u) und (v) einer Fläche so anordnen lassen, dass sie ein Netz von unendlich kleinen Quadraten bilden, ist notwendig und hinreichend, dass die Fundamentalgrössen E, F, G Bedingungen von der Form

$$F = 0, \qquad \alpha^2(u) E - \beta^2(v) G = 0$$

erfüllen. Hierin bedeutet α eine Function von u allein und β eine Function von v allein:

Es braucht kaum bemerkt zu werden, dass natürlich der Fall $\alpha = \beta = 0$ ausgeschlossen sein soll.

Ein Netz von Parameterlinien, das aus unendlich kleinen Quadraten besteht, heisst wie in der Ebene ein Isothermennetz (vgl. I S. 118).[1] Der Satz 23 giebt also die Bedingungen für ein Isothermennetz auf der Fläche an.

Sind die Bedingungen des Satzes erfüllt, so haben E, F, G die Form:

$$E = \frac{\lambda^2}{\alpha^2(u)}, \qquad F = 0, \qquad G = \frac{\lambda^2}{\beta^2(v)}, \tag{9}$$

wobei λ irgend eine Function von u und v sein kann. Das Quadrat (2) des Bogenelementes ds der Fläche hat daher jetzt die Form:

$$ds^2 = \lambda^2(u, v) \left[\frac{du^2}{\alpha^2(u)} + \frac{dv^2}{\beta^2(v)} \right]. \tag{10}$$

Es liegt nunmehr nahe, neue Parameter einzuführen, ohne aber dabei neue Parameterlinien zu schaffen (vgl. S. 10), nämlich dadurch, dass wir (wie in I S. 125) setzen:

$$\bar{u} = \int \frac{du}{\alpha(u)}, \qquad \bar{v} = \int \frac{dv}{\beta(v)} \tag{11}$$

und nun $\bar{u}$ und $\bar{v}$ als Parameter benutzen. $\bar{u}$ hängt nur von u, $\bar{v}$ nur von v ab. Umgekehrt können wir uns vorstellen, dass u als Function von $\bar{u}$ und v als Function von $\bar{v}$ nach Ausführung der Quadraturen (11) berechnet seien. Wenn wir diese Functionen in die Gleichungen (1) der Fläche einführen, so werden x, y, z Functionen der neuen Parameter $\bar{u}, \bar{v}$. Aber die alten Parameterlinien $u =$ Const. und $v =$ Const. sind identisch mit den neuen: $\bar{u} =$ Const. und $\bar{v} =$ Const. Auch in die Function $\lambda^2(u, v)$ denken wir uns die Werte von u und v, ausgedrückt durch $\bar{u}$ und $\bar{v}$, eingesetzt, wodurch

[1] Geschichtliche Hinweise siehe in der Anmerkung zu I S. 124.

eine Function $\Omega(\bar{u}, \bar{v})$ hervorgeht. Das Quadrat des Bogenelementes hat nun nach (10) die Form:

$$ds^2 = \Omega(\bar{u}, \bar{v})(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2). \tag{12}$$

(Vgl. (8) in I S. 126.) Also:

Satz 24: Wenn sich aus den Parameterlinien (u) und (v) einer Fläche ein Isothermennetz bilden lässt, kann das Quadrat des Bogenelementes dadurch, dass geeignete Functionen $\bar{u}$ und $\bar{v}$ von u bez. v allein als neue Parameter eingeführt werden, auf die Form gebracht werden:

$$ds^2 = \Omega(\bar{u}, \bar{v})(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2).$$

Die Fundamentalgrössen haben jetzt für die neue Parameterdarstellung der Fläche die Werte:

$$\bar{E} = \Omega, \qquad \bar{F} = 0, \qquad \bar{G} = \Omega,$$

sodass $\bar{E} = \bar{G}$, $\bar{F} = 0$ ist. —

Wir wollen annehmen, wir hätten auf der Fläche (1) irgend zwei von einander unabhängige Functionen von u und v als neue Parameter $\bar{u}$, $\bar{v}$ eingeführt, und dabei habe sich ergeben, dass die Fundamentalgrössen $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ für die neue Parameterdarstellung die Eigenschaften haben:

$$\bar{E} = \bar{G}, \qquad \bar{F} = 0. \tag{13}$$

Wir fragen uns, was wir hieraus schliessen können. Wegen $\bar{F} = 0$ durchschneiden die neuen Parameterlinien $(\bar{u})$ und $(\bar{v})$ einander senkrecht — nach Satz 13, S. 34. Wenn wir ferner die Parameterlinien $(\bar{u})$ und $(\bar{v})$ so anordnen, dass $\bar{u}$ bez. $\bar{v}$ von Curve zu Curve um

$$d\bar{u} = \varepsilon \quad \text{bez.} \quad d\bar{v} = \varepsilon$$

wächst, wobei ε ein und dieselbe unendlich kleine Grösse bedeute, so sind, da jetzt diese Gleichungen an die Stelle der Gleichungen (3) und (4) treten, mithin für α und β Eins zu setzen ist, nach (5) die Curven:

$$\bar{u} \mp \bar{v} = \text{Const.}$$

die Diagonalcurven. Statt (6) haben wir also jetzt für U und V die Werte $\bar{u} - \bar{v}$ und $\bar{u} + \bar{v}$. Nun war (8) nur eine andere Form von (7), d. h. von der Bedingung für die Orthogonalität der Diagonalcurven, und sie hat jetzt die Gestalt

$$\bar{E} - \bar{G} = 0.$$

Die erste Gleichung (13) sagt also aus, dass die Diagonalcurven einander senkrecht schneiden. Mithin haben wir in (13) auch die

notwendigen Bedingungen dafür, dass die Curven ($\bar{u}$) und ($\bar{v}$) ein Isothermensystem bilden. Also:

Satz 25: Dafür, dass sich die Parameterlinien ($\bar{u}$) und ($\bar{v}$) einer Fläche zu einem Isothermennetz anordnen lassen, in dem $\bar{u}$ bez. $\bar{v}$ von Curve zu Curve um dieselbe unendlich kleine Grösse wächst, ist notwendig und hinreichend, dass die zugehörigen Fundamentalgrössen erster Ordnung $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ die Bedingungen

$$\bar{E} = \bar{G}, \qquad \bar{F} = 0$$

erfüllen.

Solche Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ heissen wie in der Ebene (vgl. I S. 127) thermische Parameter. Der dortige Satz 77, I S. 128, lässt sich hier ebenfalls beweisen, sodass also:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} u' = \pm a\bar{u} + \text{Const.}, \quad v' = \pm a\bar{v} + \text{Const.} \\ \text{und} \\ u' = \pm a\bar{v} + \text{Const.}, \quad v' = \pm a\bar{u} + \text{Const.} \end{array} \right\} \quad (a = \text{Const.})$$

die allgemeinsten thermischen Parameterpaare sind, die zu demselben Isothermennetz wie die thermischen Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ gehören. Dabei können die Vorzeichen beliebig gewählt werden.

Hat man von einer analytisch definierten Fläche, auf der man thermische Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ kennt, ein Modell hergestellt und will man auf dem Modell das zugehörige Isothermennetz veranschaulichen, so wird man natürlich ein Netz mit Maschen von endlicher Seitenlänge einzeichnen, so wie wir dies in der Ebene in den Figuren 31 bis 34, I S. 128 bis 134, gethan haben. (Man vergleiche die damaligen Anmerkungen zu den Figuren.) Dies geschieht, indem man die Curven (u) bez. (v) so auf einander folgen lässt, dass ihr thermischer Parameter $\bar{u}$ bez. $\bar{v}$ von Curve zu Curve um dieselbe endliche Grösse m zunimmt, also arithmetisch wächst. Dann erhält man ein Netz von Maschen, die man als endliche, aber krummlinige Quadrate bezeichnen könnte. Die Diagonalcurven des wirklichen, unendlich dichten Isothermennetzes sind auch bei diesem Netz von endlichen Maschen Diagonalcurven.

1. Beispiel: Auf der Rotationsfläche:

$$(15) \qquad x = p(u)\cos v, \qquad y = p(u)\sin v, \qquad z = q(u),$$

wo u die Bogenlänge der Meridiane bedeutet (siehe (2), S. 41), ist:

$$(16) \qquad ds^2 = du^2 + p^2(u)\,dv^2.$$

Führen wir

(17) $$\bar{u} = \int \frac{du}{p(u)}, \qquad \bar{v} = v$$

als neue Parameter ein, so ist:

$$d\bar{u} = \frac{du}{p(u)}, \qquad d\bar{v} = dv,$$

und also kommt statt (16):

(18) $$ds^2 = p^2(u)(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2).$$

Natürlich kann hier $p^2(u)$ als Function $\Omega(\bar{u})$ von $\bar{u}$ infolge der ersten Gleichung (17) aufgefasst werden. Wir haben jetzt die Fundamentalgrössen:

$$\bar{E} = \bar{G} = \Omega(\bar{u}) = p^2(u), \qquad \bar{F} = 0.$$

Jetzt sind $\bar{u}$ und $\bar{v}$ thermische Parameter. Da die Curven $(\bar{u})$ und $(\bar{v})$ nach (17) die alten Parameterlinien (u) und (v) sind, so folgt: **Wir können die Breitenkreise und Meridiane einer Rotationsfläche stets so anordnen, dass sie die Fläche in unendlich kleine Quadrate zerlegen.** Von Curve zu Curve wächst $\bar{u}$ bez. $\bar{v}$ dabei um dieselbe unendlich kleine Grösse ε. Da v den Winkel der Ebene des Meridians $(\bar{v})$ mit der des Meridians $(\bar{v} = 0)$ bedeutet, so müssen wir also alle Meridianschnitte herstellen, die denselben unendlich kleinen Winkel ε mit einander bilden. Da ferner $p(u)$ gleich dem Radius des Breitenkreises (u) und u die Bogenlänge auf dem Meridian ist, so folgt ferner aus

$$\varepsilon = d\bar{u} = \frac{du}{p(u)},$$

dass man einen Meridian so einzuteilen hat, dass das Verhältnis aus dem unendlich kleinen Bogenstück dividiert durch den zugehörigen Breitenradius gleich ε ist, und alsdann durch die Teilpunkte die Breitenkreise ziehen muss.

Z. B. auf der Kugel (vgl. S. 43)

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = \sin u$$

ist $p(u) = \cos u$, sodass nach (17):

(19) $$\bar{u} = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right), \qquad \bar{v} = v$$

thermische Parameter sind. Dabei ist u die geographische Breite, v die geographische Länge. Die Seite des unendlich kleinen Quadrates an der Stelle $(\bar{u}, \bar{v})$ hat nach (18) die Länge $p(u)\,d\bar{u}$ oder $p(u)\,\varepsilon$, ist also proportional dem Radius des Breitenkreises, insbesondere bei der Kugel proportional dem Cosinus der geographischen Breite. Nach den Polen zu werden also die Maschen des Netzes immer kleiner. In den Polen selbst artet das Isothermennetz aus, indem dort die Quadratseite unendlich klein von höherer Ordnung als ε wird.

2. Beispiel: Im 1. Band, auf S. 157, sprachen wir in Satz 3 von einer stetigen Schraubung. Unterwerfen wir eine Curve einer stetigen Schraubung, so beschreibt sie eine Schraubenfläche. Insbesondere betrachten wir folgenden Fall: Die z-Axe sei die Axe der Schraubung, und die Schraubung werde auf diejenige Gerade ausgeübt, die zuerst in der x-Axe liegt. Alle Punkte dieser Geraden beschreiben gemeine Schraubenlinien von gleicher Ganghöhe um die z-Axe. Nach den Formeln (8) auf der genannten Seite wird derjenige Punkt

der Geraden, dessen Abscisse zuerst gleich u ist, durch die Schraubung, sobald der Drehwinkel den Wert v erreicht hat, in den Punkt

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = q\,v \tag{20}$$

übergegangen sein, denn jetzt ist r durch u und φ durch v zu ersetzen. Die Grösse $2\pi q$ ist die Höhe eines Schraubenumganges und q eine Constante. Wenn wir nun in (20) den Grössen u und v völlige Veränderlichkeit zuschreiben, so heisst dies, dass wir alle Punkte der verschraubten Geraden in allen Stadien der stetigen Schraubung betrachten wollen. Mit anderen Worten: Die Gleichungen (20) stellen mittels zweier Parameter u und v die Fläche dar, die jene Gerade beschreibt. Diese Fläche, die offenbar unendlich viele Geraden enthält, die die Schraubenaxe senkrecht schneiden, und also eine geradlinige Fläche (vgl. I S. 270) ist, heisst eine gemeine Schraubenfläche. Da bei ihr

$$dx = \cos v\,du - u\sin v\,dv, \quad dy = \sin v\,du + u\cos v\,dv,$$
$$dz = q\,dv$$

ist, so ist das Quadrat ihres Bogenelementes:

$$ds^2 = du^2 + (u^2 + q^2)\,dv^2, \tag{21}$$

mithin:

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = u^2 + q^2.$$

Dass $F = 0$ ist, sagt nach Satz 13, S. 34, aus, dass die Parameterlinien (u) und (v) einander senkrecht schneiden. Die Linien (u) sind die Curven, die von den einzelnen Punkten der ursprünglich in der x-Axe gelegenen Geraden beschrieben werden, d. h. es sind gemeine Schraubenlinien mit gleicher Ganghöhe $2\pi q$ um die z-Axe. Die Linien (v) sind die durch die Schraubung aus der ursprünglichen Geraden hervorgehenden geradlinigen Erzeugenden der Fläche. (Siehe Fig. 17, S. 61). Wenn wir setzen:

$$\bar{u} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + q^2}} = \log\left(u + \sqrt{u^2 + q^2}\right), \quad \bar{v} = v,$$

so nimmt das Quadrat des Bogenelementes nach (21) die Form an:

$$ds^2 = (u^2 + q^2)(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2).$$

Also sind $\bar{u}$ und $\bar{v}$ thermische Parameter. Die gemeinen Schraubenlinien (u) und die geradlinigen Erzeugenden (v) der gemeinen Schraubenfläche bilden also ein Isothermensystem. Um das Isothermennetz zu erhalten, wählen wir alle diejenigen Geraden (v) oder $(\bar{v})$ auf der Fläche aus, die jedesmal durch die Schraubung mit dem unendlich kleinen Winkel $d\bar{v} = \varepsilon$ aus einander hervorgehen. Ferner wählen wir auf der x-Axe diejenigen Punkte, deren Abscissen u jedesmal um die unendlich kleine Grösse du wachsen, für die

$$\varepsilon = d\bar{u} = \frac{du}{\sqrt{u^2+q^2}},$$

also

$$du = \varepsilon\sqrt{u^2 + q^2}$$

ist. Sie beschreiben bei der stetigen Schraubung die zweite Curvenschar des

Netzes. Man sieht, dass die Maschen des Netzes dicht an der Schraubenaxe die Seitenlänge εq haben und dass die Seitenlänge um so grösser wird, je grösser die Entfernung u von der Axe wird. In die folgende Figur ist ein Netz

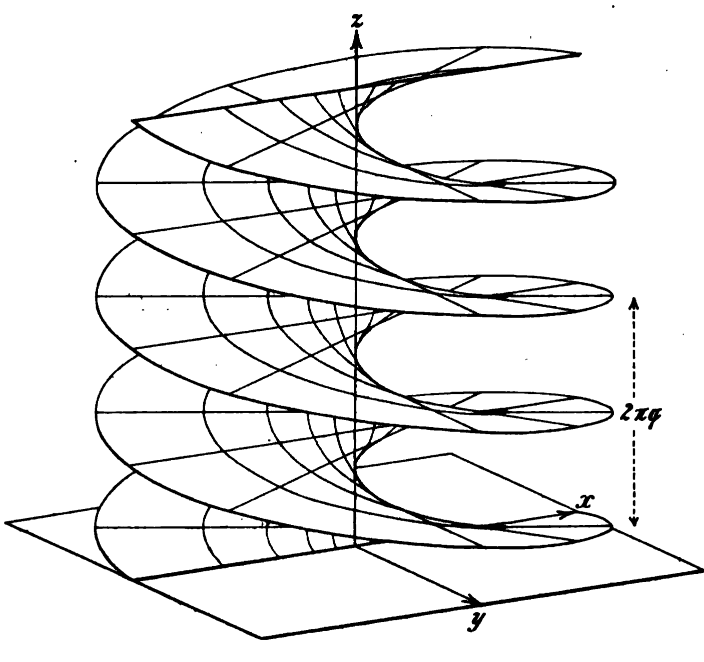


Fig. 17.

von endlicher Maschengrösse eingezeichnet worden, bei dem die thermischen Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ arithmetisch wachsen.

§ 8. Bestimmung der Isothermennetze auf einer Fläche.

Liegt eine Fläche vor, die analytisch mittels zweier Parameter u und v ausgedrückt ist und deren Bogenelement-Quadrat die Form hat:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{1}$$

so soll jetzt die Frage beantwortet werden, wie man die Isothermennetze der Fläche findet, wenn überhaupt welche vorhanden sind. Wenn $\bar{u}$ und $\bar{v}$ thermische Parameter sein sollen, so müssen u und v gewisse uns allerdings noch unbekannte Functionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ sein, sodass das Quadrat des Bogenelementes durch Einführung der

Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ die in Satz 24, S. 57, angegebene charakteristische Form bekommt:

$$ds^2 = \Omega(\bar{u}, \bar{v})\,(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2), \tag{2}$$

wo nun auch Ω eine uns noch unbekannte Function von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ bedeutet. Hierfür lässt sich schreiben:

$$ds^2 = \Omega(\bar{u}, \bar{v})\,(d\bar{u} + i\,d\bar{v})\,(d\bar{u} - i\,d\bar{v}).$$

Wenn man

$$\bar{u} + i\bar{v} = \mathfrak{u}, \quad \bar{u} - i\bar{v} = \mathfrak{v} \tag{3}$$

setzt, so kommt:

$$ds^2 = \Omega\,d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v}, \tag{4}$$

und man wird, sobald $\Omega(\bar{u}, \bar{v})$ bekannt ist, auch in Ω die Veränderlichen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ einführen können.

Umgekehrt: Nehmen wir an, es sei uns gelungen, statt u und v solche neue Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ einzuführen, dass ds^2 die Form

$$ds^2 = \Omega\,d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v}$$

annimmt, die also nur das Product der Differentiale enthält, so können wir auch sofort thermische Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ finden. Wir setzen nämlich die Gleichungen (3) an oder ihre Auflösungen:

$$\bar{u} = \frac{1}{2}(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}), \quad \bar{v} = -\frac{i}{2}(\mathfrak{u} - \mathfrak{v}); \tag{5}$$

denn dann wird:

$$ds^2 = \Omega\,(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2).$$

Hieraus folgt: Es kommt zunächst darauf an, solche Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ zu finden, in denen das Quadrat des Bogenelementes nur das Product der Differentiale enthält:

$$ds^2 = \Omega\,d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v}.$$

Nach Satz 17, S. 36, können wir auch sagen:

Es handelt sich zunächst um die Bestimmung der Minimalcurven $\mathfrak{u} =$ Const. und $\mathfrak{v} =$ Const. auf der Fläche.

Bedenken wir nun, dass uns ds^2 in der Form (1) gegeben ist, so lehrt Satz 16, S. 36, dass die Gleichung

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0 \tag{6}$$

die beiden Scharen von Minimalcurven auf der Fläche definiert, und zwar fallen die beiden Scharen nur dann zusammen, wenn die linke Seite von (6) ein vollständiges Quadrat, also $D = 0$ ist. In diesem Falle aber ist die Fläche die Tangentenfläche einer Minimalcurve.

Die ∞^1 Tangenten dieser Curve sind Minimalgeraden. Ausser ihnen und ihrer Umhüllenden enthält die Fläche keine Minimalcurve.

Um thermische Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ zu erhalten, müssen wir die Formeln (5) ansetzen. Weil aber $\bar{u}$ und $\bar{v}$ von einander unabhängig sein müssen, so haben wir dasselbe von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ zu verlangen. Also sehen wir bei den Isothermensystemen von den Tangentenflächen der Minimalcurven grundsätzlich ab.

Wir setzen also voraus, dass für beliebige Werte von u und v die Function

$$D \neq 0$$

sei. Nach Satz 5, S. 13, zerlegen wir die Gleichung (6) in ihre linearen Factoren:

$$(7) \quad \begin{cases} E\,du + (F + iD)\,dv = 0, \\ E\,du + (F - iD)\,dv = 0. \end{cases}$$

Dies sind die Differentialgleichungen für die beiden Scharen von Minimalcurven $\mathfrak{u} = \text{Const.}$ und $\mathfrak{v} = \text{Const.}$ Also sind $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ Integrale dieser Gleichungen. Es seien $\lambda(u, v)$ und $\mu(u, v)$ zugehörige Multiplicatoren (vgl. I S. 91), d. h. es seien

$$(8) \quad \begin{cases} d\mathfrak{u} = \lambda[E\,du + (F + iD)\,dv], \\ d\mathfrak{v} = \mu[E\,du + (F - iD)\,dv] \end{cases}$$

vollständige Differentiale.

Die Bestimmung der Multiplicatoren oder der Integrale verlangt natürlich die Integration der beiden Differentialgleichungen (7). Wir wollen annehmen, sie sei geleistet, sodass $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ als Functionen von u und v bekannt seien.

Ehe wir in der Theorie fortfahren, möge dies zunächst an einem Beispiel erläutert werden.

Beispiel: Auf der Kugel (S. 48)

$$x = \cos u \cos v, \qquad y = \cos u \sin v, \qquad z = \sin u$$

ist

$$ds^2 = du^2 + \cos^2 u\,dv^2 = (du + i\cos u\,dv)\,(du - i\cos u\,dv).$$

Die Differentialgleichungen der Minimalcurven:

$$du \pm i\cos u\,dv = 0$$

haben hier den gemeinsamen Multiplicator

$$\lambda = \mu = \frac{1}{\cos u},$$

da

$$d\mathfrak{u} = \frac{du}{\cos u} + i\,dv, \qquad d\mathfrak{v} = \frac{du}{\cos u} - i\,dv$$

vollständige Differentiale sind. Es kommt:

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{u}\\ \mathfrak{v}\end{matrix}\right\} = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \pm i v .$$

Also sind die Curven:

$$\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \pm i v = \text{Const.}$$

die Minimalcurven der Kugel. Da wir diese Gleichungen auch so schreiben können:

$$e^{\pm i v} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) = \text{Const.},$$

so können wir als Integrale der beiden Differentialgleichungen der Minimalcurven auch

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{u}\\ \mathfrak{v}\end{matrix}\right\} = e^{\pm i v} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) = (\cos v \pm i \sin v) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \tag{9}$$

benutzen, was zu bequemeren Formeln führt. Hiernach ist nämlich:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) = \sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}, \qquad \operatorname{tg} v = -i\frac{\mathfrak{u} - \mathfrak{v}}{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}}$$

oder:

$$\left\{\begin{aligned} \sin u &= \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v} - 1}{\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1}, & \cos u &= \frac{2\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1}, \\ \sin v &= \frac{-i(\mathfrak{u} - \mathfrak{v})}{2\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}}, & \cos v &= \frac{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}}{2\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}}, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

sodass sich x, y, z in den neuen Parametern $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ so ausdrücken:

$$x = \frac{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1}, \qquad y = -i\frac{\mathfrak{u} - \mathfrak{v}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1}, \qquad z = \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v} - 1}{\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1}. \tag{11}$$

Diese Gleichungen stellen also die Kugel um den Anfangspunkt mit dem Radius Eins dar und zwar ausgedrückt mittels der Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$, sodass die Parameterlinien $(\mathfrak{u})$ und $(\mathfrak{v})$ die Minimalcurven der Kugel sind. Da die Verhältnisse

$$\frac{\partial x}{\partial \mathfrak{v}} : \frac{\partial y}{\partial \mathfrak{v}} : \frac{\partial z}{\partial \mathfrak{v}} = (1 - \mathfrak{u}^2) : i(1 + \mathfrak{u}^2) : 2\mathfrak{u}^2$$

frei von $\mathfrak{v}$ sind, so sind die Minimalcurven $(\mathfrak{u})$ Geraden, ebenso die Curven $(\mathfrak{v})$.

Satz 26: Die Kugel enthält zwei Scharen von Minimalgeraden.

Die Kugel ist folglich in zwei Arten als eine geradlinige Fläche aufzufassen (I S. 270), aber nicht als abwickelbare Fläche, denn sonst müssten die Minimalgeraden einer Schar eine Curve, also eine Minimalcurve, umhüllen — die Kugel enthält aber ausser den Geraden keine Minimalcurve — oder die Minimalgeraden einer Schar müssten einen Kegel bilden — was auch nicht der Fall ist. Eine beliebige Ebene

$$Ax + By + Cz = D \tag{12}$$

schneidet die Kugel in einem Kreis, der sich in $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ nach (11) so darstellt:

$$(C - D)\mathfrak{u}\mathfrak{v} + (A - iB)\mathfrak{u} + (A + iB)\mathfrak{v} - (C + D) = 0, \tag{13}$$

d. h. die allgemeine bilineare Gleichung in $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$:

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{u}\mathfrak{v} + \mathfrak{B}\,\mathfrak{u} + \mathfrak{C}\,\mathfrak{v} + \mathfrak{D} = 0 \tag{14}$$

stellt einen Kreis auf der Kugel dar. Insbesondere zerfällt diese Gleichung in zwei lineare Gleichungen $\mathfrak{u}$ = Const. und $\mathfrak{v}$ = Const., wenn

$$\mathfrak{A}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{C} = 0$$

oder nach (13):

$$A^2 + B^2 + C^2 = D^2$$

ist. Dann aber berührt die Ebene (12) die Kugel, da ihr Abstand vom Anfangspunkt gleich Eins ist. Nach I S. 7 sehen wir also: Die Tangentenebenen der Kugel schneiden die Kugel in Nullkreisen oder circulären Geradenpaaren oder also in Paaren von Minimalgeraden. Noch anders ausgesprochen: Die Minimalgeraden der Kugel sind die Schnittlinien der Kugel mit ihren Tangentenebenen.

Die durch (8) definierten neuen Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ sind, wie wir wissen, von einander unabhängig. Wenn wir jetzt nach (5):

$$\bar{u} = \frac{1}{2}(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}), \quad \bar{v} = -\frac{i}{2}(\mathfrak{u} - \mathfrak{v})$$

setzen, so werden auch $\bar{u}$ und $\bar{v}$ von einander unabhängige und zwar thermische Parameter sein. Also folgt:

Satz 27: Liegt eine Fläche vor, bei der das Quadrat des Bogenelementes

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

nicht das vollständige Quadrat eines in du und dv linearen Ausdrucks, also $D \neq 0$ ist, so findet man ein thermisches Parameterpaar $\bar{u}$ und $\bar{v}$ für die Fläche, indem man Integrale $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ der beiden in der Gleichung

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0$$

enthaltenen Differentialgleichungen der Minimalcurven bestimmt und dann

$$\bar{u} = \frac{1}{2}(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}), \quad \bar{v} = -\frac{i}{2}(\mathfrak{u} - \mathfrak{v})$$

setzt.

Die Frage nach allen Isothermennetzen auf der Fläche ist nun schnell zu erledigen: Wir haben die Methode in allgemeinster Weise anzuwenden. Von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ wurde nur das Eine verlangt, dass sie Integrale der Differentialgleichungen (7) sein sollen. Nach Satz 59, I S. 90, ist das allgemeinste Integral einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung in zwei Veränderlichen eine beliebige Function irgend eines Integrals der Gleichung. Mithin, wenn $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ zwei Integrale von (7) sind, so sind beliebige Func-

tionen $A(\mathfrak{u})$ und $B(\mathfrak{v})$ von ihnen die allgemeinsten Integrale. Nach (3) ergiebt sich demnach das allgemeinste Paar von thermischen Parametern $\bar{U}$ und $\bar{V}$ aus:

$$(15) \quad \begin{cases} \bar{U} + i\bar{V} = A(\mathfrak{u}) = A(\bar{u} + i\bar{v}), \\ \bar{U} - i\bar{V} = B(\mathfrak{v}) = B(\bar{u} - i\bar{v}). \end{cases}$$

Also gilt der

Satz 28: Sind $\bar{u}$ und $\bar{v}$ thermische Parameter für eine Fläche, so ergiebt sich ihr allgemeinstes Paar von thermischen Parametern $\bar{U}$ und $\bar{V}$, wenn man $\bar{U} + i\bar{V}$ gleich irgend einer Function von $\bar{u} + i\bar{v}$ und $\bar{U} - i\bar{V}$ gleich irgend einer Function von $\bar{u} - i\bar{v}$ setzt.

Der Satz 78, I S. 130, ist ein besonderer Fall hiervon, denn in der xy-Ebene sind die Coordinaten x und y selbst thermische Parameter.

Nehmen wir an, es liege eine reelle Fläche vor, und es seien $\bar{u}$ und $\bar{v}$ reelle thermische Parameter, d. h. es seien x, y, z reelle Functionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$. Um dann das allgemeinste Paar von reellen thermischen Parametern zu bekommen, muss man dann die Functionen A und B in (15) so wählen, dass $\bar{U}$ und $\bar{V}$ reell in $\bar{u}$ und $\bar{v}$ sind. Hieraus folgt — wie insbesondere für die Ebene der Satz 79, I S. 131, — der

Satz 29: Sind $\bar{u}$ und $\bar{v}$ reelle thermische Parameter für eine reelle Fläche, so erhält man das allgemeinste reelle thermische Parameterpaar $\bar{U}, \bar{V}$ für die Fläche, wenn man $\bar{U}$ gleich dem reellen und $i\bar{V}$ gleich dem rein imaginären Teil irgend einer Function von $\bar{u} + i\bar{v}$ setzt.

Beispiel: Bei der Kugel

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = \sin u$$

fanden wir in dem Beispiel auf S. 64 oben:

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{u}\\ \mathfrak{v}\end{matrix}\right\} = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \pm iv,$$

sodass hier

$$\bar{u} = \frac{1}{2}(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}) = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right),$$

$$\bar{v} = -\frac{i}{2}(\mathfrak{u} - \mathfrak{v}) = v$$

reelle thermische Parameter sind. Wir fanden sie auch im 1. Beispiel auf S. 59 auf directem Wege. Auf der Kugel bestimmt sich mithin das allgemeinste reelle thermische Parameterpaar $\bar{U}, \bar{V}$ aus den beiden Gleichungen:

$$\bar{U} \pm i\,\bar{V} = A\left(\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \pm i\,v\right),$$

in denen A eine beliebige Function des angegebenen Argumentes ist. So z. B. folgt aus:

$$\bar{U} \pm i\,\bar{V} = e^{\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \pm i\,v} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \cdot (\cos v \pm i \sin v)$$

das reelle thermische Parameterpaar:

$$\bar{U} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \cos v, \qquad \bar{V} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \sin v.$$

§ 9. Conforme Abbildung von Flächen.

Wir erinnern an die einleitenden Bemerkungen in § 5, wo wir eine beliebige Fläche:

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

flächentreu auf die Ebene abbildeten.

Jetzt wollen wir diejenigen punktweisen Abbildungen der Fläche (1) auf die Ebene untersuchen, bei denen jedes unendlich kleine Stück der Fläche in der Ebene ein Bild hat, das dem Original ähnlich ist. Solche Abbildungen heissen conform.[1]

Zunächst ist es unsere Aufgabe, die conformen Abbildungen analytisch zu definieren.

Ist eine Fläche gesetzmässig Punkt für Punkt auf eine Ebene abgebildet und sind x, y, z rechtwinklige Punktcoordinaten der Fläche, dagegen u, v rechtwinklige Punktcoordinaten in der Bildebene, so ist auch jedem Bildpunkt, also jedem Wertepaar u, v, gesetzmässig ein Flächenpunkt, also ein Wertetripel x, y, z zugeordnet, mit anderen Worten: Dann sind x, y, z Functionen von u und v, wie oben in (1).

Wir können daher vorerst annehmen, die Fläche (1) mit den Parametern u, v sei dadurch auf eine Ebene abgebildet, dass die

[1] Die Aufgabe, eine Fläche conform auf eine andere Fläche abzubilden, wurde in voller Allgemeinheit zuerst (1822) von Gauss gelöst in seiner Preisschrift: „Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Teile einer gegebenen Fläche auf einer anderen gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Teilen ähnlich wird“, zuerst erschienen in den Astron. Abhandl. von Schumacher, 3. Heft 1825, wieder abgedruckt in den Werken Bd. IV und in Ostwald's Klassikern Nr. 55. Doch ist zu bemerken, dass Lagrange in seiner weiter unten (S. 75) zu nennenden Abhandlung der Lösung schon nahe gekommen war.

Parameter u, v als rechtwinklige Coordinaten in der Bildebene gedeutet werden. Die Frage ist, unter welchen Umständen diese Abbildung conform ist.

Es sind (u, v), $(u + du, v + dv)$, $(u + \delta u, v + \delta v)$ drei beliebige unendlich benachbarte Punkte der Fläche, wenn du, dv bez. δu, δv beliebige unendlich kleine Incremente von u und v bedeuten. Ihnen entsprechen in der uv-Ebene drei ebenfalls unendlich benachbarte Punkte, deren rechtwinklige Coordinaten die betreffenden Parameterwerte sind. Wir verlangen, dass das unendlich kleine Dreieck auf der Fläche dem Bilddreieck in der Ebene ähnlich sei. (Siehe Fig. 18.) Dazu ist, weil wir das Flächendreieck als eben auffassen dürfen, zweierlei notwendig und hinreichend: Erstens müssen die beiden vom Punkte (u, v) der Fläche ausgehenden Seiten in demselben Verhältnis zu einander stehen wie ihre Bilder, und zweitens muss der von ihnen eingeschlossene Winkel gleich dem Winkel im Bilde sein. Da es zwei Arten von Ähnlichkeiten giebt: gleichsinnige und ungleichsinnige, so kommen die Vorzeichen der Seiten und Winkel hierbei nicht in Betracht. Wir stellen daher die Forderungen so:

Erstens sollen die Quadrate der vom Punkte (u, v) ausgehenden Seiten der beiden Dreiecke in demselben Verhältnis stehen, und zweitens sollen die Cosinus der Dreieckswinkel im Punkte (u, v) beider Dreiecke denselben Wert haben.

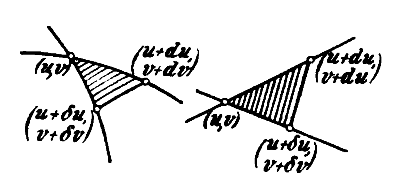


Fig. 18.

Auf der Fläche seien ds und δs die vom Punkte (u, v) nach den Punkten $(u + du, v + dv)$ und $(u + \delta u, v + \delta v)$ gehenden Dreiecksseiten, in der Ebene mögen ihnen $d\mathfrak{s}$ und $\delta\mathfrak{s}$ entsprechen. Auf der Fläche ist dann, wenn E, F, G ihre Fundamentalgrössen erster Ordnung sind:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

$$\delta s^2 = E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2,$$

dagegen in der Ebene:

$$d\mathfrak{s}^2 = du^2 + dv^2, \qquad \delta\mathfrak{s}^2 = \delta u^2 + \delta v^2.$$

Die erste Forderung ist also diese: Es soll

$$\frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{E\,\delta u^2 + 2F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2} = \frac{du^2 + dv^2}{\delta u^2 + \delta v^2}$$

sein und zwar für jedes unendlich kleine Dreieck, d. h. wie auch die Verhältnisse

$$\frac{dv}{du} = k, \quad \frac{\delta v}{\delta u} = \varkappa$$

gewählt sein mögen. Es soll also für beliebige Werte von k und $\varkappa$ stets:

$$\frac{E + 2Fk + Gk^2}{E + 2F\varkappa + G\varkappa^2} = \frac{1 + k^2}{1 + \varkappa^2}$$

sein. Dies ist dann und nur dann der Fall, wenn

(2) $$E = G \quad \text{und} \quad F = 0$$

ist.

Ist α der Winkel von ds und δs auf der Fläche und $\mathfrak{a}$ der Bildwinkel, d. h. der Winkel von $d\mathfrak{s}$ und $\delta\mathfrak{s}$ in der Ebene, so ist nach Satz 10, S. 32:

$$\cos\alpha = \frac{E + F(k + \varkappa) + Gk\varkappa}{\sqrt{(E + 2Fk + Gk^2)(E + 2F\varkappa + G\varkappa^2)}}.$$

In der uv-Ebene sind

$$\frac{du}{\sqrt{du^2 + dv^2}}, \quad \frac{dv}{\sqrt{du^2 + dv^2}} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\sqrt{1 + k^2}}, \quad \frac{k}{\sqrt{1 + k^2}}$$

Cosinus und Sinus des Winkels der u-Axe mit $d\mathfrak{s}$ und analog

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \varkappa^2}}, \quad \frac{\varkappa}{\sqrt{1 + \varkappa^2}}$$

Cosinus und Sinus des Winkels der u-Axe mit $\delta\mathfrak{s}$. Also ist:

$$\cos\mathfrak{a} = \frac{k + \varkappa}{\sqrt{(1 + k^2)(1 + \varkappa^2)}}.$$

Die zweite Forderung drückt sich daher so aus: Für jedes Wertepaar k und $\varkappa$ soll:

$$\frac{E + F(k + \varkappa) + Gk\varkappa}{\sqrt{(E + 2Fk + Gk^2)(E + 2F\varkappa + G\varkappa^2)}} = \frac{k + \varkappa}{\sqrt{(1 + k^2)(1 + \varkappa^2)}}$$

sein. Dies ist aber nur dann der Fall, wenn:

$$E = G \quad \text{und} \quad F = 0$$

ist. Damit kommen wir auf (2) zurück. Wir sehen somit, dass von den beiden Forderungen nur eine notwendig und hinreichend ist, da sie die andere nach sich zieht.

Satz 30: Dafür, dass eine Abbildung einer Fläche conform sei, ist notwendig und hinreichend, dass entweder je

zwei von einem Punkte der Fläche ausgehenden Bogenelemente stets — abgesehen vom Vorzeichen — im selben Verhältnis zu einander stehen wie ihre Bilder oder der Winkel je zweier solcher Bogenelemente — abgesehen vom Vorzeichen — gleich dem Winkel im Bilde ist.

Als Merkmal der conformen Abbildung benutzen wir in der Folge die erste Forderung:

$$\frac{ds^2}{\delta s^2} = \frac{d\mathfrak{s}^2}{\delta \mathfrak{s}^2},$$

die wir auch so schreiben können:

$$\frac{ds^2}{d\mathfrak{s}^2} = \frac{\delta s^2}{\delta \mathfrak{s}^2}.$$

In dieser Form sagt sie aus, dass das Verhältnis aus einem Bogenelement-Quadrat der Fläche zum entsprechenden Bogenelement-Quadrat der Ebene dasselbe sein soll wie das analoge Verhältnis gebildet hinsichtlich eines beliebigen anderen von demselben Punkte (u, v) ausgehenden Bogenelementes. Wir können also sagen:

Satz 31: Dafür, dass eine Abbildung einer Fläche conform sei, ist notwendig und hinreichend, dass das Verhältnis aus dem Quadrat des Bogenelementes der Fläche zum Quadrat des zugehörigen Bogenelementes im Bilde für alle von ein und demselben Punkte der Fläche ausgehenden Elemente dasselbe ist. Doch darf sich dies Verhältnis von Punkt zu Punkt ändern.

In Formel: Es soll

$$\frac{ds^2}{d\mathfrak{s}^2} = \frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{du^2 + dv^2} = \frac{E + 2Fk + Gk^2}{1 + k^2}$$

von k unabhängig sein, was eben für $E = G$, $F = 0$ der Fall ist. Alsdann kommt:

$$\frac{ds^2}{d\mathfrak{s}^2} = E(u, v),$$

sodass $\sqrt{E} : 1$ das Verhältnis ist, in dem die unendlich kleine Umgebung des Flächenpunktes (u, v) auf die unendlich kleine Umgebung des Bildpunktes ähnlich abgebildet wird. Dies Verhältnis ändert sich im allgemeinen von Stelle zu Stelle, da E eine Function von u und v ist. Nur wenn $E =$ Const., also G gleich derselben Constanten und $F = 0$ ist, ist der Ähnlichkeitsmaassstab überall derselbe. Durch passende ähnliche Vergrösserung oder Verkleinerung der Bildebene lässt sich dann erreichen, dass die Abbildung überall so-

gar congruent ist. Nach Satz 10, I S. 282, tritt dieser Fall nur für abwickelbare Flächen ein.

Die in Satz 31 aufgestellte Forderung zieht die der Übereinstimmung der Winkel im Original und im Bilde nach sich und umgekehrt die letztere Forderung die erstere. Die letztere Forderung kann als die der Winkeltreue bezeichnet werden, weshalb man statt: conforme Abbildung auch: winkeltreue Abbildung sagen darf.

Aus der Winkeltreue folgt, da ein Isothermennetz als Orthogonalnetz mit orthogonalem Diagonalnetz definiert werden kann (S. 56):

Satz 32: Bei einer conformen Abbildung einer Fläche bildet sich jedes Isothermennetz als Isothermennetz ab.

Da die Curven $u = \text{Const.}$, $v = \text{Const.}$ in der uv-Ebene ein Isothermennetz bilden, so folgt, dass auch die Parameterlinien (u) und (v) der Fläche (1) ein Isothermennetz bilden müssen, wenn die Abbildung conform sein soll. Thatsächlich sagen die gefundenen Bedingungen (2) nach S. 58 sogar noch mehr aus: u und v müssen thermische Parameter auf der Fläche sein. Mithin:

Satz 33: Bildet man eine Fläche

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v)$$

dadurch auf die Ebene ab, dass man dem Flächenpunkt (u, v) denjenigen Punkt der Ebene zuordnet, der die rechtwinkligen Coordinaten u und v hat, so ist die Abbildung dann und nur dann conform, wenn u und v thermische Parameter der Fläche sind.

Bedenken wir, dass wir auf der Fläche neue Parameter einführen können, so folgt hieraus:

Satz 34: Um eine Fläche in allgemeinster Weise conform auf die Ebene abzubilden, bestimmt man in allgemeinster Weise thermische Parameter auf der Fläche und deutet sie als rechtwinklige Punktcoordinaten in der Ebene.

Wir können die Lösung der Aufgabe der conformen Abbildung ohne Mühe verallgemeinern: Es mögen zwei Flächen vorliegen. Die eine soll punktweis auf die andere so abgebildet werden, dass jeder unendlich kleine Teil der einen Fläche dem entsprechenden unendlich kleinen Teil der anderen Fläche ähnlich ist. Eine solche Abbildung heisst eine conforme Abbildung der einen Fläche auf die andere. Sie ist in folgender Weise herzustellen:

Da zwei Figuren, die einer dritten ähnlich sind, auch unter

einander ähnlich sind, so vermitteln wir zwischen beiden Flächen dadurch, dass wir beide conform auf ein und dieselbe Ebene abbilden. Vgl. hierzu die entsprechenden Bemerkungen für flächentreue Abbildungen auf S. 40.

Jedem Punkt der ersten Fläche entspricht dann ein Punkt der Ebene, und letzterem Punkt entspricht ein Punkt der zweiten Fläche, sodass die conforme punktweise Beziehung zwischen beiden Flächen hergestellt ist. So erhält man offenbar alle conformen Abbildungen. Es leuchtet ein, dass die Sätze 30, 31, 32 auch für conforme Abbildungen einer Fläche auf eine Fläche gelten; daher ist in ihnen absichtlich das Wort: Ebene unterdrückt worden. Aus Satz 34 folgt noch:

Satz 35: Um eine Fläche in allgemeinster Weise auf eine andere Fläche conform abzubilden, bestimmt man auf der einen ein thermisches Parameterpaar und auf der anderen das allgemeinste thermische Parameterpaar. Darauf setzt man die Parameterpaare einander gleich.

Es mögen zwei Flächen vorliegen, die eine habe die Gleichungen:

$$x = \varphi(u,v), \qquad y = \chi(u,v), \qquad z = \psi(u,v) \tag{3}$$

und die andere die Gleichungen:

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(u,v), \qquad \bar{y} = \bar{\chi}(u,v), \qquad \bar{z} = \bar{\psi}(u,v). \tag{4}$$

Indem wir bei beiden Flächen die Parameter gleich bezeichnet haben, nämlich mit u und v, ist schon jedem Punkte (u, v) der einen Fläche ein Punkt der anderen gesetzmässig zugeordnet. Fragen wir uns, unter welchen Bedingungen diese Abbildung conform ist. Es seien:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$
$$d\bar{s}^2 = \bar{E}\,du^2 + 2\bar{F}\,du\,dv + \bar{G}\,dv^2$$

die Quadrate der Bogenelemente beider Flächen. Nach Satz 31 haben wir zu verlangen, dass das Verhältnis:

$$\frac{ds^2}{d\bar{s}^2} = \frac{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}{\bar{E}\,du^2 + 2\bar{F}\,du\,dv + \bar{G}\,dv^2} = \frac{E + 2Fk + Gk^2}{\bar{E} + 2\bar{F}k + \bar{G}k^2}$$

für alle Richtungen $k = dv : du$ dasselbe sei. Es ist also zu fordern:

$$E : F : G = \bar{E} : \bar{F} : \bar{G}. \tag{5}$$

Satz 36: Um zwei Flächen conform auf einander abzubilden, hat man solche Parameter auf beiden Flächen einzuführen, in denen die Verhältnisse der Fundamental-

grössen erster Ordnung auf der einen Fläche gleich den Verhältnissen der Fundamentalgrössen erster Ordnung auf der anderen Fläche sind. Alsdann entsprechen diejenigen Punkte beider Flächen einander, die zu denselben Parameterwerten gehören.

Die Minimalcurven der einen Fläche sind diejenigen Curven, längs deren $ds^2 = 0$ ist. Entsprechend sind die Minimalcurven der zweiten Fläche diejenigen, längs deren $d\bar{s}^2 = 0$ ist. Man sieht hieraus, dass infolge von (5) die Minimalcurven der einen Fläche bei der conformen Abbildung in die der anderen übergehen.

Dies lässt sich umkehren: Um dies zu zeigen, fragen wir, unter welchen Umständen die Abbildung der Fläche (3) auf die Fläche (4) so beschaffen ist, dass jeder Minimalcurve der einen Fläche eine Minimalcurve der anderen entspricht. Das Bogenelement ds wird als das Bogenelement $d\bar{s}$ abgebildet. Die vom Punkte (u, v) einer Fläche ausgehende Richtung $dv:du$ ist die einer Minimalcurve, wenn für sie das Bogenelement gleich Null ist. Wir haben also zu fordern, dass der Ausdruck für $d\bar{s}^2$ gleich Null wird, sobald $dv:du$ so gewählt wird, dass der Ausdruck für ds^2 gleich Null ist. Diese Forderung führt wieder auf die Bedingung (5). Also:

Satz 37: Die conformen Abbildungen einer Fläche auf eine andere Fläche können auch als diejenigen Abbildungen definiert werden, bei denen den Minimalcurven der einen Fläche die Minimalcurven der anderen entsprechen.

Man kann sich die Aufgabe stellen: Auf zwei Flächen ist je ein Isothermensystem gegeben. Gesucht werden alle diejenigen conformen Abbildungen der einen Fläche auf die andere, bei denen das eine Isothermensystem gerade dem anderen entspricht.

Es seien u, v solche thermische Parameter auf der einen Fläche, die zu dem gegebenen Isothermensystem gehören, entsprechend $\bar{u}, \bar{v}$ auf der anderen Fläche. Die Quadrate der Bogenelemente haben dann nach Satz 25, S. 58, die Form:

$$ds^2 = \Omega(u, v)(du^2 + dv^2), \qquad d\bar{s}^2 = \Theta(\bar{u}, \bar{v})(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2),$$

sodass

$$\frac{ds^2}{d\bar{s}^2} = \frac{\Omega(u, v)}{\Theta(\bar{u}, \bar{v})} \cdot \frac{du^2 + dv^2}{d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2}$$

ist. Um eine Abbildung zu gewinnen, müssen wir $\bar{u}$ und $\bar{v}$ als Functionen von u und v definieren. Wenn die Curven (u) des einen

Isothermennetzes als die Curven $(\bar{u})$ des anderen abgebildet werden sollen, so muss $\bar{u} = \text{Const.}$ sein, wenn $u = \text{Const.}$ gesetzt wird. Also muss $\bar{u}$ eine Function von u allein sein; ebenso $\bar{v}$ eine Function von v allein:

$$\bar{u} = \lambda(u), \qquad \bar{v} = \mu(v),$$

sodass kommt:

$$\frac{ds^2}{d\bar{s}^2} = \frac{\Omega(u,v)}{\Theta(\lambda,\mu)} \cdot \frac{du^2 + dv^2}{\lambda'^2 du^2 + \mu'^2 dv^2} = \frac{\Omega(u,v)}{\Theta(\lambda,\mu)} \cdot \frac{1+k^2}{\lambda'^2 + \mu'^2 k^2}.$$

Dies Verhältnis soll nun nach Satz 31 von k unabhängig sein. Dies ist nur dann der Fall, wenn

$$\lambda'(u)^2 = \mu'(v)^2$$

und daher jede dieser beiden Grössen, weil die eine nur von u, die andere nur von v abhängt, constant ist. Demnach kommt (wie in (14) auf S. 58):

$$\bar{u} = \lambda(u) = \pm\, au + \text{Const.}, \qquad \bar{v} = \mu(v) = \pm\, av + \text{Const.} \quad (a = \text{Const.}).$$

Hätten wir verlangt, dass die Curven (u) als die Curven $(\bar{v})$ und die Curven (v) als die Curven $(\bar{u})$ abgebildet werden sollen, so hätten wir nur u mit v zu vertauschen. Demnach:

Satz 38: Um alle diejenigen conformen Abbildungen einer Fläche auf eine andere Fläche zu erhalten, bei denen ein gegebenes Isothermensystem der einen Fläche als ein gegebenes Isothermensystem der anderen abgebildet wird, bestimmt man thermische Parameter u, v und $\bar{u}$, $\bar{v}$ zu den beiden Systemen und setzt entweder:

$$\bar{u} = \pm\, a u + \text{Const.}, \qquad \bar{v} = \pm\, a v + \text{Const.}$$

oder:

$$\bar{u} = \pm\, a v + \text{Const.}, \qquad \bar{v} = \pm\, a u + \text{Const.} \quad (a = \text{Const.}).$$

Dabei können die Vorzeichen nach Belieben combiniert werden.

Kehren wir schliesslich zu den conformen Abbildungen einer Fläche auf die Ebene zurück. Wenn auf der Fläche u und v thermische Parameter sind, die zu einem bestimmten Isothermensystem gehören, und wenn die Fläche so auf die Ebene abgebildet werden soll, dass dies System in ein System von zwei zu einander senkrechten Geradenscharen übergehen soll, das ja das einfachste Isothermensystem in der Ebene ist, so haben wir zu bedenken, dass die gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ in der Ebene

thermische Parameter eines Systems der letzteren Art sind. Nach dem Satz 38 haben wir daher entweder:

$$\mathfrak{x} = \pm\, a u + \text{Const.}, \qquad \mathfrak{y} = \pm\, a v + \text{Const.}$$

oder:

$$\mathfrak{x} = \pm\, a v + \text{Const.}, \qquad \mathfrak{y} = \pm\, a u + \text{Const.} \qquad (a = \text{Const.})$$

zu setzen. Die additiven Constanten sind unwesentlich, da sie durch Schiebung des Axenkreuzes in der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene entfernt werden können. Die Vertauschung von u mit v kommt auf die Vertauschung von $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{y}$ hinaus, d. h. darauf, dass man die Ebene von der anderen Seite betrachtet. Alle jene Abbildungen sind also nichts wesentlich anderes als die eine:

$$\mathfrak{x} = \pm\, a u, \qquad \mathfrak{y} = \pm\, a v \qquad (a = \text{Const.}).$$

Sie unterscheidet sich von der speciellen:

$$\mathfrak{x} = u, \qquad \mathfrak{y} = v \tag{6}$$

nur dadurch, dass das ganze Bild ähnlich vergrössert wird, wodurch die Winkeltreue ja offenbar nicht gestört wird. Daher folgt:

Satz 39: Alle diejenigen conformen Abbildungen einer Fläche auf die Ebene, bei denen ein bestimmtes Isothermensystem der Fläche in ein System zweier zu einander senkrechten Geradenscharen übergeht, sind mit einander in gleichem oder entgegengesetztem Sinn ähnlich.

Wir werden uns also auf die Annahme (6) beschränken dürfen.

§ 10. Conforme Abbildung der Kugel auf die Ebene.

In dem 1. Beispiel auf S. 59 ergaben sich durch Quadratur thermische Parameter auf einer beliebigen Rotationsfläche. Nach S. 58 können wir daher alle thermischen Parameterpaare für diese Fläche und mithin nach Satz 34, S. 71, alle conformen Abbildungen der Rotationsfläche auf die Ebene angeben.[1] Insbesondere gilt dies auch für die Kugel.

Wenn man jedoch den conformen Abbildungen noch besondere Bedingungen vorschreibt, so treten neue Probleme auf, die

[1] Die Aufgabe, eine beliebige Rotationsfläche conform auf die Ebene abzubilden, wurde im wesentlichen vollständig zuerst von Lagrange gelöst: „Sur la construction des cartes géographiques“, Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin, année 1779 (Berlin 1781), wieder abgedruckt in den Oeuvres T. IV, übersetzt in Ostwald's Klassikern Nr. 55.

durch diese allgemeinen Betrachtungen noch nicht erledigt sind. Wir wollen hier einige derartige Aufgaben über die conforme Abbildung der Kugel auf die Ebene lösen.

Zunächst können wir die allgemeinste conforme Abbildung der Kugel

$$(1) \qquad x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = \sin u$$

auf die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene auf Grund des Satzes 37, S. 73, sehr einfach ausdrücken, indem wir auf der Kugel und in der Ebene die Minimalgeraden als Parameterlinien wählen. Zu diesem Zwecke stellen wir die Kugel nach (11), S. 64, mittels der Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ so dar:

$$(2) \qquad x = \frac{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1}, \quad y = -i\frac{\mathfrak{u} - \mathfrak{v}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1}, \quad z = \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v} - 1}{\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1}.$$

Alsdann sind die Parameterlinien ($\mathfrak{u}$) und ($\mathfrak{v}$) die Minimalgeraden der Kugel. In der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene sind die Linien

$$\mathfrak{x} \pm i\mathfrak{y} = \text{Const.}$$

die Minimalgeraden. Nach dem angeführten Satze erhalten wir nun die allgemeinste conforme Abbildung der Kugel (2) auf die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene, wenn wir $\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x} - i\mathfrak{y}$ gleich irgend welchen Functionen von je nur einem der beiden Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ setzen, wenn wir also entweder:

$$(3) \qquad \mathfrak{x} + i\mathfrak{y} = U(\mathfrak{u}), \quad \mathfrak{x} - i\mathfrak{y} = V(\mathfrak{v})$$

oder

$$(4) \qquad \mathfrak{x} - i\mathfrak{y} = U(\mathfrak{u}), \quad \mathfrak{x} + i\mathfrak{y} = V(\mathfrak{v})$$

setzen, wobei U eine beliebige Function von $\mathfrak{u}$ und V eine beliebige Function von $\mathfrak{v}$ bedeutet. Doch dürfen diese Functionen keine Constanten sein. Es muss also

$$(5) \qquad U' \neq 0, \quad V' \neq 0$$

sein.

Jetzt wollen wir die Aufgabe lösen, alle diejenigen conformen Abbildungen der Kugel auf die Ebene zu bestimmen, bei denen sich jeder Kreis der Kugel wieder als Kreis darstellt.[1]

Dabei machen wir davon Gebrauch, dass ein Kreis auf der

[1] Nebenbei sei erwähnt, dass man beweisen kann, dass eine solche Abbildung der Kugel auf die Ebene, bei der alle Kreise wieder als Kreise erscheinen, überhaupt stets conform sein muss.

Kugel (2) dadurch bestimmt wird, dass man nach S. 65 eine beliebige bilineare Gleichung

(6) $$\mathfrak{A}\,\mathfrak{u}\,\mathfrak{v} + \mathfrak{B}\,\mathfrak{u} + \mathfrak{C}\,\mathfrak{v} + \mathfrak{D} = 0 \qquad (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} = \text{Const.})$$

zwischen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ herstellt, oder, was dasselbe ist, dadurch, dass man $\mathfrak{v}$ gleich einer linear gebrochenen Function von $\mathfrak{u}$ setzt:

(7) $$\mathfrak{v} = \frac{\text{Const.}\,\mathfrak{u} + \text{Const.}}{\text{Const.}\,\mathfrak{u} + \text{Const.}}.$$

In der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene gilt dasselbe, wenn man anstatt $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ die Grösse $\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x} - i\mathfrak{y}$ benutzt. Unsere Aufgabe kann daher analytisch so ausgesprochen werden:

Man soll $U(\mathfrak{u})$ und $V(\mathfrak{v})$ in allgemeinster Weise so bestimmen, dass jede bilineare Gleichung zwischen $\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x} - i\mathfrak{y}$ infolge von (3) oder (4) mit einer bilinearen Gleichung zwischen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ identisch ist. Oder: So, dass jede Gleichung von der Form:

(8) $$V = \frac{\text{Const.}\,U + \text{Const.}}{\text{Const.}\,U + \text{Const.}},$$

in der links nur $\mathfrak{v}$ und rechts nur $\mathfrak{u}$ auftritt, mit einer Gleichung von der Form (7) oder — was dasselbe ist — von der Form (6) identisch ist.

Um dies Problem zu lösen, leiten wir zunächst einen Hülfssatz ab: Ist $\mathfrak{v}$ eine linear gebrochene Function von $\mathfrak{u}$, d. h. besteht eine Gleichung von der Form (6), so giebt sie, dreimal total nach $\mathfrak{u}$ differenziert, drei Gleichungen für die Differentialquotienten $\mathfrak{v}', \mathfrak{v}'', \mathfrak{v}'''$ von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$, nämlich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(\ \mathfrak{v} + \mathfrak{u}\mathfrak{v}'\ ) + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}\mathfrak{v}' &= 0, \\ \mathfrak{A}(2\mathfrak{v}' + \mathfrak{u}\mathfrak{v}'') \qquad + \mathfrak{C}\mathfrak{v}'' &= 0, \\ \mathfrak{A}(3\mathfrak{v}'' + \mathfrak{u}\mathfrak{v}''') \qquad + \mathfrak{C}\mathfrak{v}''' &= 0. \end{aligned}$$

Sie sind linear und homogen in $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ und aus ihnen folgt daher das Verschwinden der Determinante hinsichtlich $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$. So kommt man zu der Gleichung:

(9) $$3\mathfrak{v}''^2 - 2\mathfrak{v}'\mathfrak{v}''' = 0.$$

Umgekehrt: Ist $\mathfrak{v}$ eine solche Function von $\mathfrak{u}$, deren Differentialquotienten diese Bedingung erfüllen, so ist

$$3\frac{\mathfrak{v}''}{\mathfrak{v}'} - 2\frac{\mathfrak{v}'''}{\mathfrak{v}''} = 0$$

oder:

$$3 \log \mathfrak{v}' - 2 \log \mathfrak{v}'' = \text{Const.},$$

also:

$$\frac{\mathfrak{v}''}{\sqrt{\mathfrak{v}'^3}} = \text{Const.}$$

oder:

$$-\frac{2}{\sqrt{\mathfrak{v}'}} = \text{Const.}\,\mathfrak{u} + \text{Const.},$$

also:

$$\mathfrak{v}' = \frac{1}{(\text{Const.}\,\mathfrak{u} + \text{Const.})^2},$$

woraus durch nochmalige Integration folgt, dass $\mathfrak{v}$ die Form (7) hat. Wir haben also den Hülfssatz gefunden:

Satz 40: $\mathfrak{v}$ ist dann und nur dann irgend eine linear gebrochene Function von $\mathfrak{u}$, wenn zwischen den Ableitungen $\mathfrak{v}', \mathfrak{v}'', \mathfrak{v}'''$ von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ die Beziehung

$$3\mathfrak{v}''^2 - 2\mathfrak{v}'\mathfrak{v}''' = 0$$

besteht.

Nach dem Obigen kommt es daher darauf an, U und V so als Functionen von $\mathfrak{u}$ bez. $\mathfrak{v}$ allein zu bestimmen, dass jede bilineare Gleichung

$$AUV + BU + CV + D = 0 \qquad (A, B, C, D = \text{Const.})$$

eine solche Function $\mathfrak{v}$ von $\mathfrak{u}$ definiert, deren Differentialquotienten $\mathfrak{v}', \mathfrak{v}'', \mathfrak{v}'''$ die soeben gefundene Bedingung (9) erfüllen. Nun erhält man $\mathfrak{v}', \mathfrak{v}'', \mathfrak{v}'''$ aus den Gleichungen, die aus der vorstehenden Gleichung durch dreimalige totale Differentiation nach $\mathfrak{u}$ hervorgehen. Diese Gleichungen sind linear und homogen in A, B, C, und es muss daher ihre Determinante hinsichtlich A, B, C gleich Null sein. Die so hervorgehende Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \frac{dUV}{d\mathfrak{u}} & \frac{dU}{d\mathfrak{u}} & \frac{dV}{d\mathfrak{u}} \\ \frac{d^2UV}{d\mathfrak{u}^2} & \frac{d^2U}{d\mathfrak{u}^2} & \frac{d^2V}{d\mathfrak{u}^2} \\ \frac{d^3UV}{d\mathfrak{u}^3} & \frac{d^3U}{d\mathfrak{u}^3} & \frac{d^3V}{d\mathfrak{u}^3} \end{vmatrix} = 0$$

ist alsdann die einzige zwischen $\mathfrak{v}', \mathfrak{v}'', \mathfrak{v}'''$ bestehende Relation, die bei allen beliebigen Annahmen der Constanten A, B, C, D gilt. Wir haben zu fordern, dass diese Gleichung die Form (9) habe. Ausführlich geschrieben lautet die Determinantengleichung so:

$$\begin{vmatrix} U'V + UV'\mathfrak{v}' & U' & V'\mathfrak{v}' \\ U''V + 2U'V'\mathfrak{v}' + UV''\mathfrak{v}'^2 + UV'\mathfrak{v}'' & U'' & V''\mathfrak{v}'^2 + V'\mathfrak{v}'' \\ U'''V + 3U''V'\mathfrak{v}' + 3U'V''\mathfrak{v}'^2 + UV'''\mathfrak{v}'^3 + & U''' & V'''\mathfrak{v}'^3 + 3V''\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'' + \\ \quad + 3U'V'\mathfrak{v}'' + 3UV''\mathfrak{v}'\mathfrak{v}'' + UV'\mathfrak{v}''' & & \quad + V'\mathfrak{v}''' \end{vmatrix} = 0.$$

Wenn man von der ersten Reihe die mit V multiplicierte zweite und die mit U multiplicierte dritte Reihe abzieht, vereinfacht sich die Determinante bedeutend. Ihre Ausrechnung ergiebt die Gleichung:

$$U'^2(3V''^2 - 2V'V''')\mathfrak{v}'^4 - V'^2(3U''^2 - 2U'U''')\mathfrak{v}'^2 + \\ + U'^2V'^2(3\mathfrak{v}''^2 - 2\mathfrak{v}'\mathfrak{v}''') = 0$$

zwischen $\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{v}''$, $\mathfrak{v}'''$. Da sie die Form (9) haben soll, so folgt mit Rücksicht auf (5), dass

$$3U''^2 - 2U'U''' = 0, \quad 3V''^2 - 2V'V''' = 0$$

sein muss. Dies aber sagt nach Satz 40 aus, dass U eine linear gebrochene Function von $\mathfrak{u}$ und V eine linear gebrochene Function von $\mathfrak{v}$ sein muss. Gehen wir jetzt auf (3) und (4) zurück, so kommt:

Satz 41: Alle diejenigen conformen Abbildungen der Kugel

$$x = \frac{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1}, \quad y = -i\frac{\mathfrak{u} - \mathfrak{v}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1}, \quad z = \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v} - 1}{\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1}$$

auf die Ebene mit den rechtwinkligen Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, bei denen sich jeder Kreis als Kreis abbildet, ergeben sich, wenn man $\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x} - i\mathfrak{y}$ gleich beliebigen linear gebrochenen Functionen von je einem der beiden Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ setzt.

Nehmen wir etwa an:

$$\mathfrak{x} + i\mathfrak{y} = \frac{a_1\mathfrak{u} + b_1}{c_1\mathfrak{u} + d_1}, \quad \mathfrak{x} - i\mathfrak{y} = \frac{a_2\mathfrak{v} + b_2}{c_2\mathfrak{v} + d_2}, \tag{10}$$

so ist der Kreis

$$A(\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})(\mathfrak{x} - i\mathfrak{y}) + B(\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}) + C(\mathfrak{x} - i\mathfrak{y}) + D = 0 \tag{11}$$

in der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene das Bild des Kreises:

$$\left\{\begin{aligned} & A(a_1\mathfrak{u} + b_1)(a_2\mathfrak{v} + b_2) + B(a_1\mathfrak{u} + b_1)(c_2\mathfrak{v} + d_2) + \\ & + C(c_1\mathfrak{u} + d_1)(a_2\mathfrak{v} + b_2) + D(c_1\mathfrak{u} + d_1)(c_2\mathfrak{v} + d_2) = 0 \end{aligned}\right. \tag{12}$$

auf der Kugel. Insbesondere werden sich gewisse Kreise der Kugel als die Geraden der Ebene darstellen. Da letztere bei der Annahme $A = 0$ aus (11) hervorgehen, so haben diese Kreise der Kugel nach (12) Gleichungen von der Form:

$$B(a_1\mathfrak{u} + b_1)(c_2\mathfrak{v} + d_2) + C(c_1\mathfrak{u} + d_1)(a_2\mathfrak{v} + b_2) + \\ + D(c_1\mathfrak{u} + d_1)(c_2\mathfrak{v} + d_2) = 0.$$

Wie auch die Constanten B, C, D gewählt sein mögen, stets wird die Gleichung befriedigt, wenn man $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ so wählt, dass

$$c_1 \mathfrak{u} + d_1 = 0, \quad c_2 \mathfrak{v} + d_2 = 0$$

ist, d. h. wenn man:

$$\mathfrak{u} = -\frac{d_1}{c_1}, \quad \mathfrak{v} = -\frac{d_2}{c_2}$$

setzt. Daher gehen diejenigen ∞^2 Kreise der Kugel, deren Bilder die ∞^2 Geraden der Ebene sind, durch den Punkt A mit diesen Coordinaten hindurch.

Wir können annehmen, dass wir diesen Punkt A durch Drehung der Kugel in sich in die z-Axe gebracht haben, d. h. wir können A als Nordpol wählen. Für ihn ist dann die Breite $u = \frac{\pi}{2}$, daher nach den Formeln (9), S. 64, der Parameter $\mathfrak{u}$ und der Parameter $\mathfrak{v}$ unendlich gross. Mithin kommt diese besondere Wahl des Parametersystems darauf hinaus, dass wir c_1 und c_2 gleich Null annehmen, sodass wir die Gleichungen (10) der Abbildung, die selbst nicht specialisiert worden ist, so vereinfachen können:

$$\mathfrak{x} + i\mathfrak{y} = a_1 \mathfrak{u} + b_1, \quad \mathfrak{x} - i\mathfrak{y} = a_2 \mathfrak{v} + b_2.$$

Ferner können wir das Axenkreuz in der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene soweit verschieben, dass sich diese Gleichungen noch weiter vereinfachen:

$$\mathfrak{x} + i\mathfrak{y} = a_1 \mathfrak{u}, \quad \mathfrak{x} - i\mathfrak{y} = a_2 \mathfrak{v}.$$

Der Längenkreis ($v = 0$), für den nach (9), S. 64, die Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ einander gleich sind, bildet sich hiernach als die Gerade

$$\frac{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}}{a_1} = \frac{\mathfrak{x} - i\mathfrak{y}}{a_2}$$

ab. Wir können die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene um ihren Anfangspunkt drehen, bis diese Gerade die $\mathfrak{x}$-Axe wird, d. h. wir dürfen $a_1 = a_2$ annehmen. Nun bleibt:

$$\mathfrak{x} + i\mathfrak{y} = a\mathfrak{u}, \quad \mathfrak{x} - i\mathfrak{y} = a\mathfrak{v}$$

oder:

$$\mathfrak{x} = \frac{a}{2}(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}), \quad \mathfrak{y} = -\frac{ia}{2}(\mathfrak{u} - \mathfrak{v}).$$

Indem wir die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene ähnlich vergrössern, was ja bei conformer Abbildung statthaft ist, können wir insbesondere $a = 1$ machen. Also haben wir:

$$\mathfrak{x} = \frac{1}{2}(\mathfrak{u} + \mathfrak{v}), \quad \mathfrak{y} = -\frac{i}{2}(\mathfrak{u} - \mathfrak{v}). \tag{13}$$

Nach (2) bestehen daher zwischen den Coordinaten x, y, z eines Punktes der Kugel und den Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ seines Bildpunktes die Beziehungen:

$$(14) \qquad x = \frac{2\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + 1}, \qquad y = \frac{2\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + 1}, \qquad z = \frac{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 - 1}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + 1}.$$

Wenn wir jetzt die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene direct mit der xy-Ebene zur Deckung bringen, und zwar auch hinsichtlich der Axen, so lässt sich die Beziehung zwischen Originalpunkt (x, y, z) und Bildpunkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ geometrisch leicht herstellen. Da nämlich

$$x : y : (z - 1) = \mathfrak{x} : \mathfrak{y} : -1$$

ist, so liegen die drei Punkte (x, y, z), $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 0)$ und $(0, 0, 1)$ auf einer Geraden. Der dritte Punkt $(0, 0, 1)$ ist der oben erwähnte Nordpol A. (Siehe Fig. 19.) Wenn man also vom Nordpol aus die Gerade durch einen Punkt (x, y, z) der Kugel zieht, so schneidet sie die Äquatorebene ($z = 0$) in dem zugehörigen Bildpunkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 0)$. Anders ausgesprochen: Die Abbildung wird dadurch gewonnen, dass man die Kugel vom Nordpol — als Projectionscentrum — perspectiv auf die Äquatorebene projiciert. Wird die Äquatorebene durch eine zu ihr parallele Ebene ersetzt, so wird das Bild nur ähnlich vergrössert. Ausserdem muss man sich daran erinnern, dass wir zur Vereinfachung der Formeln einen bei der Abbildung ausgezeichneten Punkt als Nordpol wählten. An die Stelle des Nordpols kann also irgend ein Punkt der Kugel treten, die Bildebene ist alsdann eine zu seinem Durchmesser senkrechte Ebene. Ferner merken wir noch an, dass die durch (4) vermittelten Abbildungen aus den durch (3) vermittelten dadurch hervorgehen, dass man die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene von der anderen Seite betrachtet. Daher können wir das Ergebnis allgemein so aussprechen:

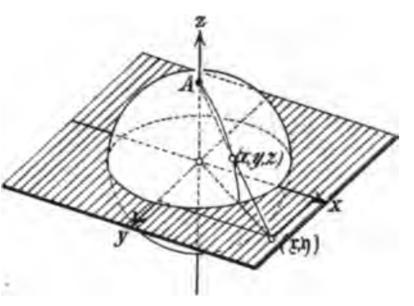


Fig. 19.

Satz 42: Die allgemeinste conforme Abbildung der Kugel auf eine Ebene, bei der sich alle Kreise wieder als Kreise darstellen, erhält man, wenn man die Kugel von einem ihrer Punkte aus perspectiv auf eine zum Durchmesser dieses Punktes senkrechte Ebene projiciert.

Die perspective Projection der Kugel von einem Punkte der Kugel aus auf eine zu seinem Durchmesser senkrechte Ebene heisst die stereographische Projection der Kugel. Also:

Satz 43: Die stereographischen Projectionen der Kugel sind die einzigen conformen Abbildungen der Kugel auf die Ebene, bei denen jeder Kreis wieder als Kreis erscheint.[1]

Wir wollen jetzt überhaupt nach allen denjenigen perspectiven Bildern der Kugel fragen, die conform sind.

Wird die Bildebene durch eine parallele Ebene ersetzt, so wird das perspective Bild nur ähnlich vergrössert. Wir dürfen also annehmen, dass die Bildebene durch die Mitte der Kugel gehe, da diese Mitte selbst sicher nicht das Projectionscentrum ist, wie man sofort einsieht. Sie werde alsdann als xy-Ebene, die Kugelmitte als Anfangspunkt gewählt. Das Projectionscentrum habe die Coordinaten a, b, c. Nun soll der Bildpunkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, 0)$ des Kugelpunktes (x, y, z) auf der Geraden durch das Projectionscentrum (a, b, c) und den Punkt (x, y, z) liegen. Also ist zu fordern:

$$\frac{\mathfrak{x} - a}{x - a} = \frac{\mathfrak{y} - b}{y - b} = \frac{-c}{z - c},$$

wofür wir auch schreiben können:

$$\mathfrak{x} \pm i\mathfrak{y} = \frac{(a \pm ib)z - cx \mp icy}{z - c}.$$

Da nun bei jeder conformen Abbildung Gleichungen von der Form (3) oder (4) bestehen, so muss also mit Rücksicht auf (2) jede der beiden Grössen

$$\frac{(a + ib)(\mathfrak{u}\mathfrak{v} - 1) - 2c\mathfrak{u}}{(1 - c)\mathfrak{u}\mathfrak{v} - (1 + c)}, \quad \frac{(a - ib)(\mathfrak{u}\mathfrak{v} - 1) - 2c\mathfrak{v}}{(1 - c)\mathfrak{u}\mathfrak{v} - (1 + c)}$$

von nur je einem der beiden Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ abhängen. Es muss also entweder

$$a = b = 0, \quad c = 1 \quad \text{oder:} \quad a = b = 0, \quad c = -1$$

[1] Dass bei der stereographischen Projection die Winkel in wahrer Grösse und die Kreise als Kreise erscheinen, ist leicht elementargeometrisch einzusehen. Diese Projection soll denn auch schon von Hipparch (um 160 v. Chr.) erfunden worden sein. Ihre Bezeichnung rührt her von Aguillon, „Optica“, 1613. Die umständliche Ableitung dieser Abbildung, wie wir sie oben gegeben haben, hat den Zweck, den nicht so elementaren Satz zu beweisen, dass es ausser der stereographischen Projection keine conforme Abbildung giebt, bei der die Kreise wieder als Kreise erscheinen. Dieser Satz ist implicite in der oben (S. 75, Anm.) genannten Arbeit von Lagrange enthalten.

sein, d. h. das Projectionscentrum ist einer der Schnittpunkte der z-Axe mit der Kugel. Wir kommen daher wieder zur stereographischen Projection:

Satz 44: Die conformen perspectiven Bilder der Kugel ergeben sich sämtlich durch die stereographische Projection.

Bei stereographischer Projection wird die ganze Kugel eindeutig auf die unbegrenzte Ebene abgebildet. Die Halbkugel, die dem Centrum A der Projection gegenüberliegt, erfährt weniger starke Verzerrungen als die andere. Zu kartographischen Zwecken bedient man sich daher meistens der stereographischen Projection nur für jene Halbkugel. So ist auch in Fig. 20 die stereographische

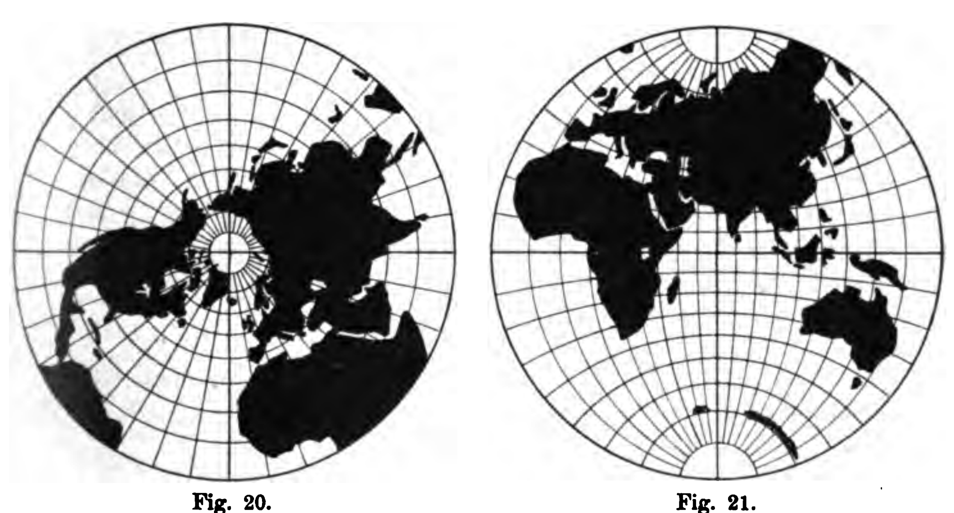


Fig. 20. Fig. 21.

Projection einer Halbkugel vom Südpol aus und in Fig. 21 von einem Punkte des Äquators aus dargestellt.[1] Die Bildseite ist dabei diejenige Seite der jedesmal senkrecht zum Durchmesser des Projectionscentrums gelegten Ebene, auf der dies Centrum nicht liegt. Die Breitenkreise und Meridiane, die ja ein Isothermensystem bilden, nach S. 59, müssen sich auch in der Ebene als ein Isothermensystem von Kreisen darstellen. Diese Systeme bei unseren jetzigen Figuren wurden im ersten Band in Fig. 31, S. 128, und Fig. 33,

[1] Diese Figuren, sowie Fig. 22 und 23 sind in solcher Grösse entworfen worden, dass jedesmal die Kartenmitte mit den früheren flächentreuen Karten (Fig. 10—16, S. 44—53) in der Flächengrösse übereinstimmt.

S. 134, angegeben. Bei der stereographischen Projection von irgend einem Punkte der Kugel aus tritt ebenfalls das in der citierten Figur 33 dargestellte Isothermensystem auf, während die in Fig. 32, I S. 131, und Fig. 34, I S. 134 angegebenen Isothermensysteme offenbar nicht auftreten.

Wir wollen jetzt die Aufgabe[1] lösen, alle diejenigen conformen Abbildungen der Kugel auf die Ebene zu bestimmen, bei denen die Längenkreise und Breitenkreise wieder als Kreise abgebildet werden, während wir es dahingestellt sein lassen, wie sich die übrigen Kreise der Kugel im Bilde zeigen.

Nach Satz 81, I S. 133, werden sich die Längenkreise und Breitenkreise, da sie ein Isothermensystem bestimmen, in der Bildebene, der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene, als Kreise darstellen, deren Gleichungen auf die Form gebracht werden können:

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 - 2p\mathfrak{x} = n^2, \quad \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 - 2q\mathfrak{y} = -n^2. \tag{15}$$

Dabei ist n eine bestimmte positive Constante, während p und q willkürliche Constanten bedeuten. Die Kreise der ersten Schar haben die reellen Punkte ($\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = \pm n$) der $\mathfrak{y}$-Axe gemein, die der zweiten die imaginären Punkte ($\mathfrak{x} = \pm in$, $\mathfrak{y} = 0$) der $\mathfrak{x}$-Axe; p und q sind die Abscisse bez. Ordinate der auf der $\mathfrak{x}$-Axe bez. $\mathfrak{y}$-Axe gelegenen Kreismitten. Wir fanden in den Formeln (18), I S. 133, dass

$$u' = \frac{1}{n}\operatorname{arc\,tg}\frac{p}{n}, \quad v' = \frac{1}{2n}\log\frac{q-n}{q+n}$$

thermische Parameter des Netzes (15) sind. Lösen wir diese Gleichungen nach p und q auf, so kommt:

$$p = n\operatorname{tg} n u', \quad q = -n\frac{e^{nv'} + e^{-nv'}}{e^{nv'} - e^{-nv'}}. \tag{16}$$

Andererseits sind auf der Kugel:

$$x = \cos u \cos v, \quad y = \cos u \sin v, \quad z = \sin u \tag{17}$$

nach (19), S. 59,

$$\bar{u} = \log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right), \quad \bar{v} = v \tag{18}$$

thermische Parameter des Netzes der Breitenkreise und Meridiane. Nach Satz 38, S. 74, erhalten wir daher die gewünschten Abbildungen, wenn wir entweder

$$u' = \pm a\bar{u} + \text{Const.}, \quad v' = \pm a\bar{v} + \text{Const.}$$

oder

$$u' = \pm a\bar{v} + \text{Const.}, \quad v' = \pm a\bar{u} + \text{Const.} \quad (a = \text{Const.})$$

---

[1] Diese Aufgabe wurde von Lagrange in seiner in der Anm. auf S. 75 erwähnten Abhandlung gestellt und gelöst.

setzen. Da eine Änderung des Vorzeichens von u' oder v' nach (16) nur auf eine Änderung des Vorzeichens von p oder q, d. h. auf eine Vertauschung einer Axenrichtung mit der entgegengesetzten hinauskommt, und da das Bild nur ähnlich vergrössert wird, wenn p, q und n alle drei mit derselben Constanten multipliciert werden, d. h. wenn nach (16) die Grössen u' und v' mit derselben Constanten multipliciert werden, so dürfen wir uns auf die beiden Annahmen beschränken:

$$u' = -\bar{u} + \text{Const.}, \qquad v' = \bar{v} + \text{Const.}$$

und

$$u' = \bar{v} + \text{Const.}, \qquad v' = -\bar{u} + \text{Const.}$$

Bezeichnen wir die Constanten mit α und β, so giebt (18) entweder:

$$u' = \alpha - \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right), \qquad v' = v + \beta$$

oder:

$$u' = v + \beta, \qquad v' = \alpha - \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right),$$

sodass aus (16) entweder:

$$(19) \quad \begin{cases} p = n \operatorname{tg}\left[n\alpha - n \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)\right], \\ q = -n \dfrac{e^{n(v+\beta)} + e^{-n(v+\beta)}}{e^{n(v+\beta)} - e^{-n(v+\beta)}} \end{cases}$$

oder:

$$(20) \quad \begin{cases} p = n \operatorname{tg} n(v + \beta), \\ q = -n \dfrac{e^{n\alpha - n\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)} + e^{-n\alpha + n\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)}}{e^{n\alpha - n\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)} - e^{-n\alpha + n\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)}} \end{cases}$$

folgt. Diese Gleichungen (19) bez. (20) genügen zur Herstellung der Abbildungen, da sie zur gegebenen Breite u und Länge v die Mittelpunktscoordinaten p und q der Kreise (15) in der Bildebene liefern. Die Constanten α, β, n sind dabei irgendwie, aber bestimmt zu wählen.

Bei der Abbildung (19) stellen sich die Breitenkreise (u) als die Kreise der ersten Schar (15) dar, also als Kreise durch zwei gemeinsame reelle Punkte, während die Bilder der Meridiane nicht — wie auf der Kugel — gemeinsame reelle Punkte haben. Für kartographische Zwecke benutzt man daher lieber die Abbildung (20), bei der die Bilder der Pole die beiden reellen Punkte ($\mathfrak{x} = 0$,

$\mathfrak{y} = \pm n$) sind. Bei dieser Abbildung wird der Winkel v, den der Meridian (v) auf der Kugel im Nord- oder Südpol mit dem Nullmeridian einschliesst, verzerrt. Denn die Bilder der Meridiane (v) sind die Kreise, die durch die erste Gleichung (15) definiert werden; der zu p gehörige Kreis aber hat im Punkte ($\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = n$) eine Tangente, deren Winkel ω mit der $\mathfrak{x}$-Axe durch

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{p}{n}$$

bestimmt wird. Hierfür kann nach der ersten Gleichung (20) geschrieben werden:

$$\omega = n(v + \beta) = nv + n\beta.$$

$n\beta$ ist bloss eine additive Constante. Daher sieht man: Der Winkel, unter dem sich zwei Meridiane auf der Kugel im Nordpol schneiden, erscheint im Bilde in n-facher Grösse. Die Abbildung ist deshalb für den Nordpol und ebenso für den Südpol nicht mehr conform, wenn n nicht etwa gerade gleich $+1$ oder -1 ist.

Nehmen wir etwa $n = \frac{1}{2}$ an. Ferner sei der Meridian, der sich als Kreis um den Anfangspunkt der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene mit dem Radius n abbildet, der Meridian ($v = \frac{1}{2}\pi$). Es sei also $p = 0$ für $v = \frac{1}{2}\pi$. Nach (20) tritt dies für $\beta = 0$ ein. Wir wählen deshalb $\beta = 0$. Der Äquator ($u = 0$) möge sich als die $\mathfrak{x}$-Axe abbilden, d. h. als der zur zweiten Gleichung (15) für $q = \infty$ gehörige Kreis. Zu diesem Zweck wählen wir nach (20) die Constante $\alpha = 0$. Jetzt vereinfachen sich die Gleichungen (20) so:

$$p = \tfrac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{v}{2}, \qquad q = \tfrac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{u}{2}.$$

Diese conforme Abbildung ist in Fig. 22, S. 87, dargestellt.

Die Formeln (20) dienen dazu, die ganze Kugelfläche conform und eindeutig auf das Innere eines beliebigen ebenen Kreiszweiecks abzubilden, wobei die Meridiane als die Kreise durch die Ecken und die Meridiane als die dazu senkrechten Kreise erscheinen.

Es darf nicht übersehen werden, dass wir bei der Lösung unseres Problems von vornherein annahmen, das Bild der Breiten- und Längenkreise sei ein a l l g e m e i n e s Isothermensystem von Kreisen in der Ebene, denn neben diesem giebt es ja nach I S. 134 noch drei specielle Gestalten, dargestellt durch die Figuren 31, 32, 34, I S. 128—134. Die Fälle der Figuren 32 und 34 gehen für $n = 0$ bez. $n = \infty$ hervor. Im Fall $n = 0$ wird offenbar die Abbildung im Nordpol ausgeartet, im Fall $n = \infty$ liegt das Bild des Nordpols unendlich fern. Der Fall der Figur 31 geht nicht so einfach durch

specielle Wahl der Constanten n hervor. Da sich dieser Fall jedoch ganz analog erledigen lässt, wenn man auf das 1. Beispiel, I S. 128, zurückgeht, so übergehen wir ihn.

Noch sei angemerkt, dass die gefundenen Abbildungen insbesondere für $n = \pm 1$ die stereographischen Projectionen ergeben. —

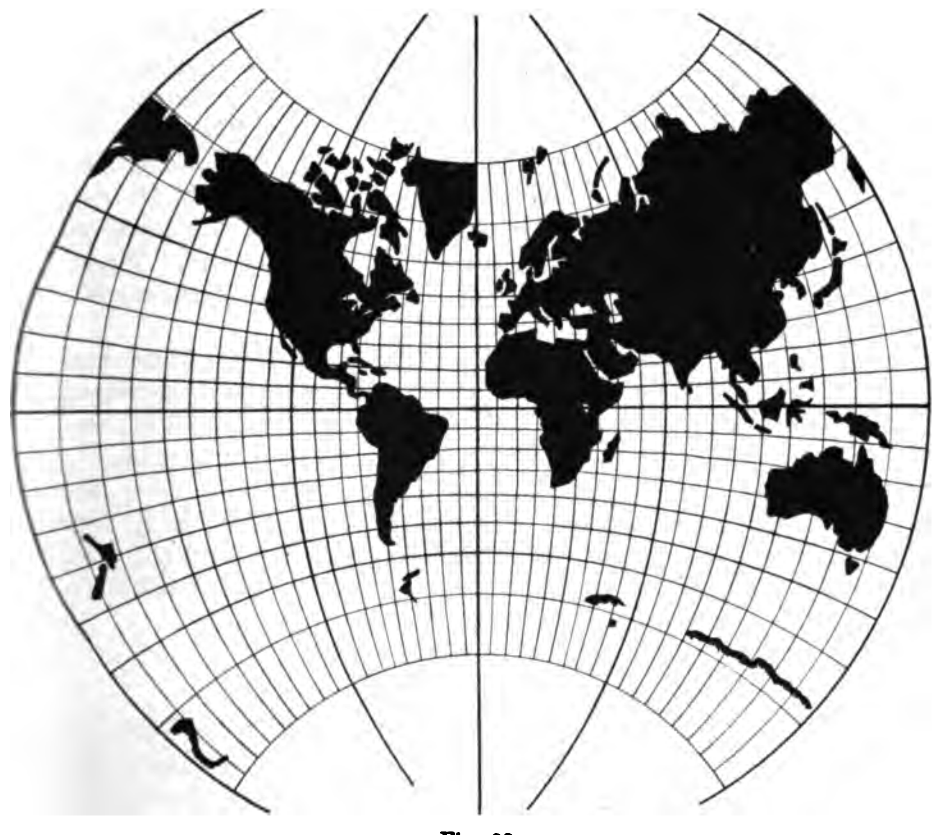


Fig. 22.

Wir erwähnen noch einige Probleme: Man kann nach allen denjenigen conformen Abbildungen der Kugel fragen, bei denen sich die ∞^2 grössten Kreise der Kugel als die Geraden der Ebene darstellen, aber es giebt keine solche Abbildung, was schon daraus folgt, dass die Winkelsumme in einem ebenen Dreieck stets zwei Rechte beträgt, aber nicht in einem sphärischen Dreieck. Die Winkeltreue kann also nicht gewahrt bleiben, wenn sich die grössten Kugelkreise als Geraden abbilden sollen.

Dagegen führt ein anderes Problem zu einer wichtigen Abbildung: Gesucht diejenigen conformen Abbildungen der Kugel auf die Ebene, bei denen die Loxodromen als Geraden erscheinen.

Unter einer Loxodrome versteht man eine Curve constanter Himmelsrichtung auf der Erdkugel, mathematisch ausgesprochen eine solche Curve der Kugel, die alle Breitenkreise oder Meridiane unter constantem Winkel schneidet. Zu den Loxodromen gehören die Breitenkreise und Meridiane; alle übrigen Loxodromen dagegen sind Curven, die die Pole der Kugel zu asymptotischen Punkten (I S. 18) haben, sodass also die grössten Kreise der Kugel — ausser den Meridianen und dem Äquator — keine Loxodromen sind. Da sich die Loxodromen als Geraden darstellen sollen, so ist dies insbesondere von den Breitenkreisen und Meridianen zu fordern. Wegen der Winkeltreue müssen sie also als zwei Scharen zu einander senkrechter paralleler Geraden erscheinen.

Bei einer conformen Abbildung, bei der die Breitenkreise und Meridiane in dieser Weise auftreten, erscheinen die Loxodromen wegen der Winkeltreue als Linien, die eine Schar paralleler Geraden unter constanten Winkeln schneiden, mithin als Geraden.

Hieraus folgt, dass die jetzt gesuchten Abbildungen unter den oben besprochenen enthalten sind (nämlich für $n = \infty$). Es ist aber bequemer, sie direct zu bestimmen: Denn auf der Kugel (17) sind die Grössen (18) thermische Parameter der Breitenkreise und Meridiane. Daher geben nach S. 75 die Gleichungen:

$$\mathfrak{x} = v, \quad \mathfrak{y} = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \tag{21}$$

eine Abbildung der gesuchten Art. Nach Satz 39, S. 75, folgt

Satz 45: Alle diejenigen conformen Abbildungen der Kugel mit der Breite u und der Länge v auf die $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene, bei denen die Loxodromen als Geraden erscheinen, sind der Abbildung

$$\mathfrak{x} = v, \quad \mathfrak{y} = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)$$

gleich- oder gegensinnig ähnlich.

Die Abbildung (21) heisst die Karte von MERCATOR.[1] Siehe

[1] KREMER, genannt MERCATOR, veröffentlichte 1569 seine Weltkarte, auf der er zwar ihre Vorzüge angab, aber über die Art ihrer Construction nichts mitteilte. Nach seinem Tode fand WRIGHT 1599 ein Näherungsverfahren, aber erst 1645 gab BOND den exacten mathematischen Ausdruck für die Abstände der Breitenkreise an in einem Anhange zu NORWOOD's „Epitome of navi-

Fig. 23. Das Bild erfüllt den ganzen Streifen zwischen der Geraden $\mathfrak{x} = \pm \pi$ bis ins Unendliche[1] und wiederholt sich beiderseits periodisch. Es sei noch hervorgehoben, dass sich diese Abbildung natürlich nicht etwa einfach dadurch herstellen lässt, dass man die Kugel auf einen längs des Äquators berührenden Cylinder von der

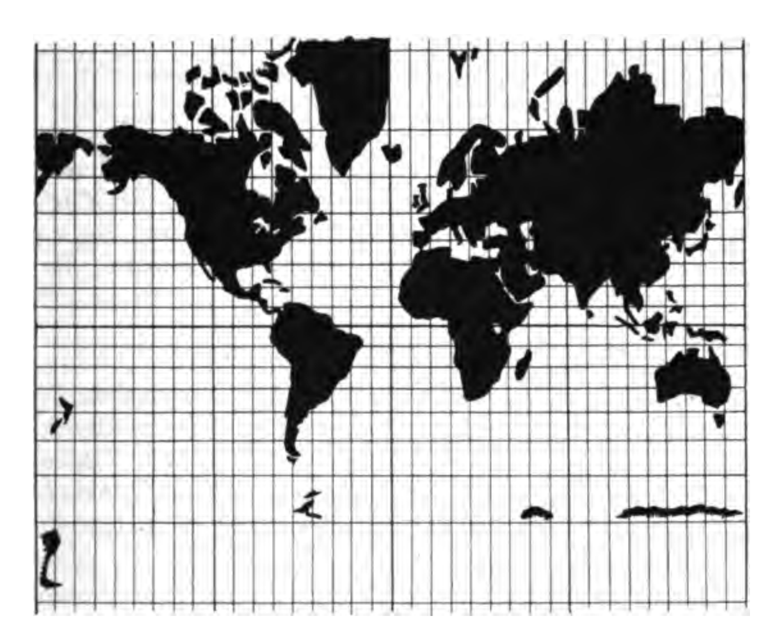


Fig. 23.

Mitte aus perspectiv projiciert und alsdann den Cylinder abwickelt. Aber dieses letztere Verfahren giebt dieselben Meridiane und für niedrige Breiten wenig abweichende Bilder der Breitenkreise. —

Wir verzichten auf die Betrachtung sonstiger conformer Abbildungen der Kugel.

---

gation". Den ersten Beweis dafür gab endlich Halley, „An easy demonstration of the logarithmic tangents to the meridian line", Philos. Transactions für 1695—97, Vol. 18. Wegen ihres Nutzens für die Seefahrt heisst die Mercator'sche Karte schlechtweg die Seekarte. Sie gestattet die von der Seefahrt bevorzugten Linien constanten Curses, die Loxodromen, wegen ihrer Geradlinigkeit und Winkeltreue direct mittels des Compasses einzuzeichnen, sobald das Kartenblatt selbst orientirt ist.

[1] Die Fig. 23 geht von 80° nördlicher bis zu 80° südlicher Breite.

§ 11. Beliebige punktweise Abbildungen von Flächen.

In den Paragraphen 5, 6, 9 und 10 haben wir einige besondere Arten, eine Fläche auf eine andere Punkt für Punkt zu beziehen, in Betracht gezogen. Jetzt wollen wir einige Sätze aufstellen, die für jede beliebige punktweise Abbildung gelten.

Es liege eine Fläche in Parameterdarstellung vor:

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v). \tag{1}$$

Wenn die Fläche nach irgend einem Gesetz auf eine andere Fläche abgebildet wird, so gehört zu jedem Punkte (x, y, z) der Fläche ein Punkt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ auf der zweiten Fläche. Daher sind dann $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ Functionen von x, y, z oder nach (1) Functionen von u und v. Es seien dies die Functionen:

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(u, v), \qquad \bar{y} = \bar{\chi}(u, v), \qquad \bar{z} = \bar{\psi}(u, v). \tag{2}$$

Diese Gleichungen ergeben, wenn u und v alle möglichen Werte annehmen, die Coordinaten aller Punkte $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ der zweiten Fläche. Mithin ist (2) eine Parameterdarstellung der zweiten Fläche. Zu jedem Wertepaare u, v gehören einander entsprechende Punkte (x, y, z) und $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ oder P und $\bar{P}$ der beiden Flächen (1) und (2).

Es seien

$$\left\{\begin{aligned} ds^2 &= E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ d\bar{s}^2 &= \bar{E}\,du^2 + 2\bar{F}\,du\,dv + \bar{G}\,dv^2 \end{aligned}\right. \tag{3}$$

die Quadrate der Bogenelemente der beiden Flächen.

Ändern wir u und v unendlich wenig, so ändern sich auch die Punkte P und $\bar{P}$ unendlich wenig. Das als eben aufzufassende unendlich kleine Stück der ersten Fläche in der Umgebung eines beliebigen Punktes P bildet sich als das ebenfalls als eben aufzufassende unendlich kleine Stück der zweiten Fläche in der Umgebung des zugeordneten Punktes $\bar{P}$ ab. Wir wollen die Beziehung zwischen diesen beiden unendlich kleinen Bereichen untersuchen, verstehen also unter u, v zwei allgemein, aber b e s t i m m t gewählte Werte der Parameter und setzen nach (1) und (2) an:

$$\left\{\begin{aligned} dx &= x_u\,du + x_v\,dv, \quad dy = y_u\,du + y_v\,dv, \quad dz = z_u\,du + z_v\,dv; \\ d\bar{x} &= \bar{x}_u\,du + \bar{x}_v\,dv, \quad d\bar{y} = \bar{y}_u\,du + \bar{y}_v\,dv, \quad d\bar{z} = \bar{z}_u\,du + \bar{z}_v\,dv. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Hierin haben jetzt die partiellen Ableitungen von x, y, z und $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ nach u und v b e s t i m m t e Werte, während die Differentiale ver-

änderlich bleiben. Es sind dx, dy, dz rechtwinklige Punktcoordinaten für das unendlich kleine Stück der ersten Fläche in demjenigen Axenkreuz, das dem ursprünglichen parallel ist und seinen Anfangspunkt im Punkte P oder (x, y, z) der Fläche hat. Analoges gilt von $d\bar{x}, d\bar{y}, d\bar{z}$. Wir sehen aus (4), dass diese rechtwinkligen Coordinaten linear und homogen von den Hülfsveränderlichen du und dv abhängen.

Jeder Fortschreitungsrichtung $(dx:dy:dz)$ auf der ersten Fläche vom Punkte P aus entspricht hiernach eine Fortschreitungsrichtung $(d\bar{x}:d\bar{y}:d\bar{z})$ auf der zweiten Fläche vom Punkte $\bar{P}$ aus.

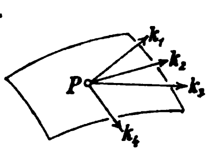
Wenn wir du und dv so annehmen, dass $dv:du$ einen bestimmten Wert k hat, so ist der zugehörige Punkt $(u + du, v + dv)$ oder $(x + dx, y + dy, z + dz)$ der ersten Fläche an diejenige Tangente des Punktes (x, y, x) gebunden, deren Gleichungen in den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ nach (3), S. 20, sind:

$$(5)\quad \mathfrak{x} = x + (x_u + x_v k)t, \quad \mathfrak{y} = y + (y_u + y_v k)t, \quad \mathfrak{z} = z + (z_u + z_v k)t$$

mit dem längs der Tangente veränderlichen Parameter t. Dieser Tangente entspricht bei der zweiten Fläche die Tangente:

$$(6)\quad \bar{\mathfrak{x}} = \bar{x} + (\bar{x}_u + \bar{x}_v k)\bar{t}, \quad \bar{\mathfrak{y}} = \bar{y} + (\bar{y}_u + \bar{y}_v k)\bar{t}, \quad \bar{\mathfrak{z}} = \bar{z} + (\bar{z}_u + \bar{z}_v k)\bar{t}.$$

Wir wollen nun k vier Werte k_1, k_2, k_3, k_4 erteilen. Ihnen entsprechen vier Tangenten (5) in der Tangentenebene von P und vier Tangenten (6) in der Tangentenebene von $\bar{P}$. (Siehe Fig. 24). Die ersten vier Tangenten haben nach I S. 334 ein gewisses Doppelverhältnis, das wir leicht bestimmen können: Wenn wir nämlich in (5) für t den Wert Eins setzen, so erhalten wir einen Punkt auf der Tangente (5):



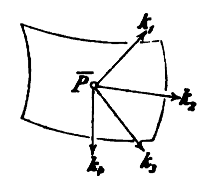


Fig. 24.

$$(7)\quad \mathfrak{x} = x + x_u + x_v k, \quad \mathfrak{y} = y + y_u + y_v k, \quad \mathfrak{z} = z + z_u + z_v k.$$

Geben wir jetzt k beliebige Werte, so sind dies wieder die Gleichungen einer Geraden mit den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ und dem Parameter k. Diese Gerade liegt in der Tangentenebene von P. Jene vier Tangenten treffen sie in vier Punkten, deren Coordinaten aus (7) hervorgehen, wenn wir für k die vier Werte k_1, k_2, k_3, k_4 setzen. Nach Satz 41 oder 42, I S. 333, haben die Tangenten das-

selbe Doppelverhältnis wie diese vier Punkte. Und da k in (7) linear auftritt, so ist das letztere Doppelverhältnis nach Satz 40, I S. 332, gleich dem der vier Werte k_1, k_2, k_3, k_4.

Wir haben also zunächst den

Satz 46: Diejenigen vier Tangenten eines Punktes (u, v) auf einer Fläche mit den Parametern u, v, für die $dv:du$ die Werte k_1, k_2, k_3, k_4 hat, haben das Doppelverhältnis $(k_1\, k_2\, k_3\, k_4)$.

Da der Satz auch für die Tangenten (6) der zweiten Fläche gilt, so folgt hieraus:

Satz 47: Sind zwei Flächen Punkt für Punkt auf einander bezogen, so entsprechen den Fortschreitungsrichtungen, die auf der einen Fläche von irgend einem Punkte ausgehen, die Fortschreitungsrichtungen, die auf der anderen Fläche von dem zugeordneten Punkte ausgehen, und zwar in der Weise, dass irgend vier Richtungen durch den ersten Punkt dasselbe Doppelverhältnis wie die entsprechenden vier Richtungen durch den zweiten Punkt haben.

Wenn wir auf den Tangenten der Parameterlinien (u) und (v) des Punktes P der ersten Fläche $\sqrt{G}$ und $\sqrt{E}$ als Strecken auftragen und diese Strecken zum Parallelogramm vervollständigen, wenn wir ferner das Analoge beim Punkt $\bar{P}$ der zweiten Fläche thun, so liegen zwei Parallelogramme vor, innerhalb deren wir jetzt die durch (4) rechnerisch ausgedrückte Beziehung zwischen den unendlich kleinen Flächenbereichen von P und $\bar{P}$ geometrisch herstellen können: Hat nämlich $dv:du$ etwa den Wert k, so werden, wie in Fig. 6, S. 31, die Seiten $\sqrt{G}$ und $\sqrt{\bar{G}}$ mit k multipliciert. Wird dann aus diesen verlängerten Seiten und den anderen Seiten $\sqrt{E}$ bez. $\sqrt{\bar{E}}$ jedesmal das Parallelogramm wieder vervollständigt, so entsprechen die Diagonalen beider Parallelogramme dem gegebenen Wert k von $dv:du$. Wir können die beiden Figuren als unendliche ähnliche Vergrösserungen der unendlich kleinen Parallelogramme auf den Flächen auffassen.

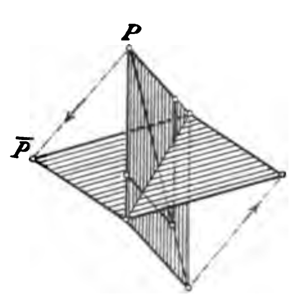


Fig. 25.

Wenn wir nun die eine unserer beiden Figuren, etwa die erste, soweit ähnlich vergrössern, bis die Querdiagonale des aus $\sqrt{G}$ und $\sqrt{E}$ gebildeten Parallelogramms mit der

entsprechenden Diagonale in der zweiten Figur an Länge übereinstimmt, so können wir beide Figuren so an einander legen, dass sie sich längs dieser Diagonale durchdringen. Siehe Fig. 25, S. 92. Aus der Proportionalität der beiden vorhin mit $k = dv:du$ ausgeführten Constructionen folgt dann der in der Figur angedeutete

Satz 48: Sind zwei Flächen Punkt für Punkt auf einander bezogen, so entspricht jedem unendlich kleinen Stück der einen Fläche ein unendlich kleines Stück der anderen Fläche. Bringt man zwei solche einander entsprechende Stücke in eine geeignete Lage zu einander, so kann man die Zuordnung zwischen ihren Punkten durch eine passende ähnliche Vergrösserung des einen Stücks und darauf folgende Parallelprojection des einen Stücks auf das andere geometrisch herstellen.

Doch ist die besondere Art, wie weit die Vergrösserung auszuführen ist, in welche gegenseitige Lage beide Stücke zu bringen sind und in welcher Richtung zu projicieren ist, für jedes andere Paar zugeordneter Stücke natürlich eine andere.

Aus diesem geometrischen Ergebnis hätten wir den obigen Satz 47 mit Hülfe der Sätze des § 11, 3. Abschn. des 1. Bds., ebenfalls ableiten können. Auch die folgenden Betrachtungen lassen sich zum Teil rein geometrisch wiedergeben, aber wir schlagen den analytischen Weg ein.

Die zu zwei Werten k und $\varkappa$ von $dv:du$ gehörigen Fortschreitungsrichtungen im Punkte (u, v) der ersten Fläche bilden einen Winkel α mit einander, für den nach Satz 10, S. 32,

$$(8) \qquad \cos\alpha = \frac{E + F(k+\varkappa) + Gk\varkappa}{\sqrt{(E + 2Fk + Gk^2)(E + 2F\varkappa + G\varkappa^2)}}$$

ist. Die entsprechenden Richtungen im Punkte (u, v) der zweiten Fläche bilden einen Winkel $\bar{\alpha}$ mit einander, für den

$$(9) \qquad \cos\bar{\alpha} = \frac{\bar{E} + \bar{F}(k+\varkappa) + \bar{G}k\varkappa}{\sqrt{(\bar{E} + 2\bar{F}k + \bar{G}k^2)(\bar{E} + 2\bar{F}\varkappa + \bar{G}\varkappa^2)}}$$

ist. Werden k und $\varkappa$ so gewählt, dass die zugehörigen Richtungen auf der ersten Fläche zu einander senkrecht sind, so werden die zugehörigen Richtungen auf der zweiten Fläche im allgemeinen nicht zu einander senkrecht sein. Einem rechten Winkel auf der ersten Fläche entspricht vielmehr nur dann ein rechter Winkel auf

der zweiten, wenn die Bestimmungsstücke k und $\varkappa$ der Schenkel so gewählt werden, dass gleichzeitig $\cos\alpha = 0$ und $\cos\bar{\alpha} = 0$, also

$$(10)\qquad \begin{cases} E + F(k+\varkappa) + Gk\varkappa = 0, \\ \bar{E} + \bar{F}(k+\varkappa) + \bar{G}k\varkappa = 0 \end{cases}$$

ist. Es müssen also k und $\varkappa$ so gewählt werden, dass ihre Summe und ihr Product die Werte haben:

$$(11)\qquad k + \varkappa = \frac{G\bar{E} - E\bar{G}}{F\bar{G} - G\bar{F}}, \quad k\varkappa = \frac{E\bar{F} - F\bar{E}}{F\bar{G} - G\bar{F}},$$

d. h. k und $\varkappa$ sind die beiden Wurzeln der in k quadratischen Gleichung:

$$(12)\qquad (E\bar{F} - F\bar{E}) - (G\bar{E} - E\bar{G})k + (F\bar{G} - G\bar{F})k^2 = 0$$

oder

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} k^2 & E & \bar{E} \\ -k & F & \bar{F} \\ 1 & G & \bar{G} \end{vmatrix} = 0.$$

Hinsichtlich dieser quadratischen Gleichung sind nun drei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: Die Gleichung (12) oder (13) ist identisch erfüllt, d. h. es ist

$$E : F : G = \bar{E} : \bar{F} : \bar{G}.$$

Nach S. 72 ist alsdann die Abbildung in den betrachteten Punkten (u, v) conform. Jedem rechten Winkel durch den Punkt (u, v) der einen Fläche entspricht ein rechter Winkel auf der anderen Fläche.

2. Fall: Die Gleichung (12) oder (13) hat zwei verschiedene Wurzeln. Im Punkte (u, v) der einen Fläche giebt es dann nur einen rechten Winkel, dem auf der anderen Fläche wieder ein rechter Winkel entspricht. Wenn wir k durch $dv : du$ ersetzen, so lautet die Gleichung (12) oder (13) so:

$$(14)\qquad (E\bar{F} - F\bar{E})du^2 - (G\bar{E} - E\bar{G})du\,dv + (F\bar{G} - G\bar{F})dv^2 = 0$$

oder:

$$(15)\qquad \begin{vmatrix} dv^2 & E & \bar{E} \\ -dv\,du & F & \bar{F} \\ du^2 & G & \bar{G} \end{vmatrix} = 0.$$

Nach Satz 5, S. 13, aber definiert diese Gleichung als Differentialgleichung in u und v zwei Curvenscharen auf jeder der beiden Flächen,

und zwar ist in jedem Punkte jeder der beiden Flächen die hindurchgehende Curve der einen Schar senkrecht zur hindurchgehenden Curve der andern Schar. Es giebt also auf der einen Fläche gerade ein Orthogonalsystem von Curven (vgl. S. 33), dem auf der anderen Fläche wieder ein Orthogonalsystem von Curven entspricht. — Sind die beiden Flächen reell und entsprechen reellen Werten der Parameter u, v reelle Punkte, so sind auch die Wurzeln k und $\varkappa$ der quadratischen Gleichung (12) oder (13) reell. Dies sieht man wohl am schnellsten so ein: Deuten wir für den Augenblick

$$\mathfrak{x} = k + \frac{F}{G}, \quad \mathfrak{y} = \varkappa + \frac{F}{G} \tag{16}$$

als rechtwinklige Punktcoordinaten in einer Ebene, so stellt die erste Gleichung (10) die gleichseitige Hyperbel

$$\mathfrak{x}\,\mathfrak{y} = -\frac{D^2}{G^2}$$

dar. Die erste Gleichung (11) bedeutet dann eine Gerade:

$$\mathfrak{x} + \mathfrak{y} = \text{Const.}$$

parallel zur Hauptaxe der Hyperbel. Beide treffen einander in zwei reellen Punkten ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$), deren Coordinaten paarweis vertauscht sind (siehe Fig. 26). Zu jedem Punkt gehört nach (16) ein reelles Wertepaar k, $\varkappa$, das den Gleichungen (10) oder (11) oder (12) genügt. — Im reellen Fall also sind die beiden einander entsprechenden Orthogonalsysteme auch reell.

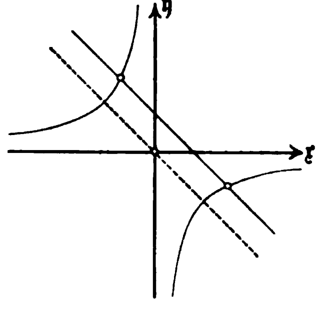


Fig. 26.

3. Fall: Die Gleichung (12) oder (13) hat zwei gleiche Wurzeln. Jetzt fallen die beiden zu einander senkrechten Fortschreitungsrichtungen auf jeder der beiden Flächen zusammen. Nach Satz 49, I S. 339, sind sie also die Richtungen von Minimalgeraden. In der That giebt jede der Gleichungen (10), sobald $k = \varkappa$ gesetzt wird, nach S. 35 die Bedingung für die Richtung k einer durch den Punkt (u, v) der ersten bez. zweiten Fläche gehenden Minimalcurve. Jedes der beiden Orthogonalsysteme des zweiten Falles ist mithin in eine Schar von Minimalcurven ausgeartet. Es liegt daher hier der besondere Fall vor, dass der einen Schar von Minimalcurven auf der ersten Fläche vermöge der Abbildung wieder gerade eine der Scharen von Minimalcurven auf der

zweiten Fläche zugeordnet ist. Übrigens tritt dies bei reeller Abbildung reeller Flächen nie ein, wie die Fig. 26 zeigt, da in dieser Figur die beiden Schnittpunkte der Geraden mit der Hyperbel nur dann zusammenfallen können, wenn die Hyperbel in ihre Asymptoten ausartet, also $D = 0$, d. h. die erste Fläche nach Satz 9, S. 29, die Tangentenfläche einer Minimalcurve ist.

Wenn wir von solchen Flächen absehen, so können wir das Ergebnis, indem wir uns an Satz 37, S. 73, erinnern und den zweiten und dritten Fall vertauschen, so formulieren:

Satz 49: Bildet man eine Fläche Punkt für Punkt auf eine andere Fläche ab und ist keine der beiden Flächen die Tangentenfläche einer Minimalcurve, so sind drei Fälle denkbar:

Erstens: Die beiden Scharen von Minimalcurven der einen Fläche bilden sich als die beiden Scharen von Minimalcurven der anderen Fläche ab. Dann ist die Abbildung conform, und jedem Orthogonalsystem auf der einen Fläche entspricht ein Orthogonalsystem auf der anderen Fläche.

Zweitens: Nur eine Schar von Minimalcurven der einen Fläche bildet sich als Schar von Minimalcurven der anderen Fläche ab. Ausser dieser als Ausartung eines Orthogonalsystems aufzufassenden Schar giebt es alsdann kein Orthogonalsystem auf der einen Fläche, dem auf der anderen Fläche wieder ein Orthogonalsystem entspräche. Bei reeller Abbildung tritt dieser Fall nie ein.

Drittens: Keine der beiden Scharen von Minimalcurven der einen Fläche bildet sich als Schar von Minimalcurven der anderen Fläche ab. Alsdann giebt es ein und nur ein Orthogonalsystem auf der einen Fläche, dem auf der anderen Fläche wieder ein Orthogonalsystem entspricht. Ist die Abbildung reell, so sind es auch diese beiden Orthogonalsysteme.

Der letzte Fall ist der allgemeinste. Wir wollen ihn daher insbesondere für reelle Abbildungen noch einmal als Satz aussprechen:

Satz 50: Wird eine reelle Fläche Punkt für Punkt, aber nicht conform, auf eine andere reelle Fläche abgebildet, so giebt es stets ein und nur ein Orthogonalsystem auf der einen Fläche, dem auf der anderen Fläche wieder ein Orthogonalsystem entspricht; und diese beiden Orthogonal-

systeme sind reell.[1] — Sind auf beiden Flächen einander entsprechende Punkte (x, y, z) und $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ auf dasselbe Parameterpaar bezogen:

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \chi(u,v), \quad z = \psi(u,v),$$
$$\bar{x} = \bar{\varphi}(u,v), \quad \bar{y} = \bar{\chi}(u,v), \quad \bar{z} = \bar{\psi}(u,v)$$

und sind E, F, G bez. $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ die Fundamentalgrössen erster Ordnung auf den beiden Flächen, so werden jene Orthogonalsysteme durch die Differentialgleichung

$$\begin{vmatrix} dv^2 & E & \bar{E} \\ -du\,dv & F & \bar{F} \\ du^2 & G & \bar{G} \end{vmatrix} = 0$$

zwischen u und v definiert.

Sehen wir von dem Specialfall ab, der bei reeller Abbildung nie eintritt, dass nämlich die quadratische Gleichung (12) eine Doppelwurzel hat, so können wir nunmehr annehmen, dass die Parameter u und v schon so gewählt seien, dass gerade die Parameterlinien (u) und (v) auf beiden Flächen Orthogonalsysteme bilden. Im allgemeinen ist dies nur auf eine Weise möglich, im Fall der conformen Abbildung auf unendlich viele Weisen. Hervorzuheben ist noch, dass die so eingeführten neuen Parameter u und v im Fall einer reellen Abbildung für reelle Punkte auch reell sind.

Nach Satz 13, S. 34, ist jetzt $F = \bar{F} = 0$ zu setzen, sodass

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$
$$d\bar{s}^2 = \bar{E}\,du^2 + \bar{G}\,dv^2$$

ist. Jetzt sind die Parallelogramme in Fig. 25, S. 92, Rechtecke, und man erkennt: Geht man von einem Punkte P oder (u, v) der ersten Fläche in der Richtung $(dv : du)$ fort zu einem unendlich benachbarten Punkt Q, so ist für den Winkel φ dieser Richtung mit der Tangente der Parameterlinie (u):

---

[1] Dies wurde zuerst von Tissot, „Sur les cartes géographiques", Comptes Rendus t. 49 (1859), ausgesprochen. Eine ausführliche Begründung gab er 1878 in den Nouvelles Annales de Math., 2. série, t. 17. Dass der Satz bei imaginären Abbildungen nicht ausnahmslos gilt, bemerkte Lie, „Über geodätische Linien", Note I: „Über die allgemeinste geodätische Abbildung einer reellen oder imaginären Fläche", Math. Ann. 20. Bd. (1882). Er machte darin auf den in obigem Satz 49 genannten zweiten Fall aufmerksam.

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{E}\,du}{ds}, \qquad \cos\varphi = \frac{\sqrt{G}\,dv}{ds}.$$

Auf der anderen Fläche kommt entsprechend:

$$\sin\bar{\varphi} = \frac{\sqrt{\bar{E}}\,du}{d\bar{s}}, \qquad \cos\bar{\varphi} = \frac{\sqrt{\bar{G}}\,dv}{d\bar{s}}.$$

(Siehe Fig. 27.) In dem Axenkreuz, das von den Tangenten der

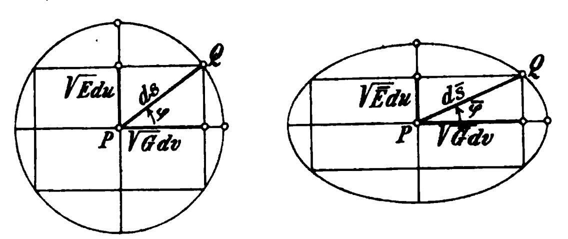


Fig. 27.

durch P gehenden Parameterlinien (u) und (v) gebildet wird, mögen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ rechtwinklige Coordinaten von Q sein. Dann ist:

$$\mathfrak{x} = ds\cos\varphi = \sqrt{G}\,dv, \qquad \mathfrak{y} = ds\sin\varphi = \sqrt{E}\,du.$$

Analog construieren wir das Kreuz der $\bar{\mathfrak{x}}$- und $\bar{\mathfrak{y}}$-Axe bei der zweiten Fläche. Dann hat der Bildpunkt von Q die rechtwinkligen Coordinaten:

$$\bar{\mathfrak{x}} = \sqrt{\bar{G}}\,dv, \qquad \bar{\mathfrak{y}} = \sqrt{\bar{E}}\,du.$$

Daher ist:

$$\bar{\mathfrak{x}} = \sqrt{\frac{\bar{G}}{G}}\,\mathfrak{x}, \qquad \bar{\mathfrak{y}} = \sqrt{\frac{\bar{E}}{E}}\,\mathfrak{y}.$$

Beschreibt Q einen unendlich kleinen Kreis um P mit dem Radius ds, so ist

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 = ds^2,$$

und für die Bahn des Bildpunktes ergiebt sich dann der unendlich kleine Kegelschnitt:

$$\frac{G}{\bar{G}}\,\bar{\mathfrak{x}}^2 + \frac{E}{\bar{E}}\,\bar{\mathfrak{y}}^2 = ds^2.$$

Im reellen Fall sind die Coefficienten hierin positiv (nach S. 17). Dann also ist die Bildcurve eine unendlich kleine Ellipse mit den Halbaxen

$$\sqrt{\frac{\bar{G}}{G}}\,ds, \qquad \sqrt{\frac{\bar{E}}{E}}\,ds.$$

Wir finden also:

Satz 51: Bildet man eine Fläche Punkt für Punkt auf eine andere Fläche ab, so dass ein gewisses Orthogonal-

system der Fläche im Bilde wieder als Orthogonalsystem erscheint, so entspricht jedem unendlich kleinen Kreis um einen Punkt P der Fläche auf der Bildfläche ein Kegelschnitt, dessen Mittelpunkt der Bildpunkt von P ist und dessen Axen in den Tangenten der durch diesen Bildpunkt gehenden Curven des zweiten Orthogonalsystems liegen. Ist die Abbildung reell, so ist der Kegelschnitt eine Ellipse.[1]

Die Radien des Kreises um P bilden sich als die Halbmesser des Kegelschnittes ab. Da die Axen der Ellipse die Maxima oder Minima der Durchmesser sind, so sieht man:

Satz 52: Bildet man eine reelle Fläche punktweis, aber nicht conform auf eine andere reelle Fläche ab, wobei ein Orthogonalsystem der Fläche im Bilde wieder als Orthogonalsystem erscheint, so sind die Curven jenes Orthogonalsystems diejenigen Curven, längs deren an jeder Stelle die durch die Stelle gehenden Bogenelemente bei der Abbildung die grösste Längenverzerrung erleiden.

Auch sieht man ein, dass die Curven ohne Längenverzerrung, für die also $ds = d\bar{s}$ ist, zwei Scharen bilden, derart, dass die Winkel der durch einen Punkt gehenden beiden Curven von den Curven des Orthogonalsystems halbiert werden.

Aus der früheren Formel (8) folgt leicht:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{D(k - \varkappa)}{E + F(k + \varkappa) + G k \varkappa}.$$

Wählen wir die Richtungen k und $\varkappa$ unendlich wenig verschieden von einander, d. h. setzen wir etwa $\varkappa = k - dk$, so wird α unendlich klein, etwa gleich $d\alpha$, und $\operatorname{tg} \alpha = d\alpha$, sodass kommt:

$$d\alpha = \frac{D\,dk}{E + 2Fk + Gk^2}.$$

Diesem unendlich kleinen Winkel entspricht auf der zweiten Fläche ein unendlich kleiner Winkel $d\bar{\alpha}$, für den analog:

$$d\bar{\alpha} = \frac{\pm \bar{D}\,dk}{\bar{E} + 2\bar{F}k + \bar{G}k^2}$$

ist. Wir mussten hier $\pm$ hinzufügen, weil wir über den Sinn der

[1] Tissot a. a. O. Das Bild des Kreises, die Ellipse, wird häufig als Indicatrix bezeichnet. Da man aber einen anderen später (auf S. 139) auftretenden Kegelschnitt, der schon früher in die Flächentheorie eingeführt worden ist, ebenfalls so nennt, so würde man die hier vorkommende Ellipse zur Unterscheidung die Tissot'sche Indicatrix nennen müssen.

Messung der beiden Winkel keine einheitliche Festsetzung getroffen haben. Wir haben aber jetzt $F = \bar{F} = 0$, also $D = \sqrt{EG}$, $\bar{D} = \sqrt{\bar{E}\bar{G}}$, sodass kommt:

$$d\alpha = \frac{\sqrt{EG}}{E + Gk^2}\,dk, \qquad d\bar{\alpha} = \frac{\pm\sqrt{\bar{E}\bar{G}}}{\bar{E} + \bar{G}k^2}\,dk.$$

Demnach hat im reellen Fall, in dem ja E, G und $\bar{E}$, $\bar{G}$ nach S. 17 positiv sind, das Verhältnis

$$\frac{d\bar{\alpha}}{d\alpha} = \pm\sqrt{\frac{\bar{E}\bar{G}}{EG}} \cdot \frac{E + Gk^2}{\bar{E} + \bar{G}k^2}$$

für $k = 0$ und $k = \infty$ ein Maximum oder Minimum, d. h. für $dv = 0$ und für $du = 0$. Also ergiebt sich:

Satz 53: Bildet man eine reelle Fläche punktweis, aber nicht conform auf eine andere reelle Fläche ab, wobei ein gewisses Orthogonalsystem der Fläche wieder als Orthogonalsystem erscheint, so liegen diejenigen unendlich kleinen Winkel auf der einen Fläche, die von allen unendlich kleinen Winkeln mit demselben Scheitel die stärkste Verzerrung bei der Abbildung erleiden, längs der Curven jenes Orthogonalsystems.

Auf die punktweise Abbildung von Flächen auf einander kommen wir gelegentlich zurück. —

Die wichtigsten Formeln dieses Abschnittes haben wir, um die Rückverweisung und Übersicht zu erleichtern, im Anhang zusammengestellt in der Tafel XI, wodurch der Anhang des ersten Bandes, Tafel I bis X, fortgesetzt wird. Wir verweisen auf diese Formeln künftig durch die Zeichen XI (A) bis XI (P).

Zweiter Abschnitt.

Die Krümmung der Fläche.

---

§ 1. Die Krümmung der Flächencurven und die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung.

Beim Rückblick auf den ersten Abschnitt wird der Leser bemerken, dass die wesentliche Grundlage der Untersuchungen die Formel

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

für das Quadrat des Bogenelementes war, anders ausgesprochen: es genügte uns im wesentlichen statt der Kenntnis der Gestalt der Flächen die Kenntnis der drei Fundamentalgrössen erster Ordnung E, F, G als Functionen der Parameter u und v.

Jetzt aber wollen wir die Gestalt der Flächen näher untersuchen, und dabei werden wir uns bald genötigt sehen, zu jenen Grössen noch drei Fundamentalgrössen zweiter Ordnung hinzuzufügen.

Will man eine Fläche

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

in der Umgebung eines allgemein gewählten Punktes (u, v) untersuchen, so liegt es nahe, die Gestalt der verschiedenen durch diesen Punkt gehenden Curven auf der Fläche in Betracht zu ziehen.

Hat man im Punkte (u, v) eine Flächentangente t ausgewählt, so kann man stets solche Curven auf der Fläche ziehen, die im Punkte (u, v) die Tangente t haben, deren begleitendes Dreikant (vgl. I S. 171) aber an dieser Stelle im übrigen ganz beliebig vorgeschrieben worden ist. Um dies zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass man wenigstens eine Curve auf der Fläche ziehen kann, die im Punkte (u, v) die Tangente t hat und deren Schmiegungsebene E in diesem Punkte irgend eine Ebene durch t ist. Eine derartige Curve aber ist z. B. die ebene Curve, in der die Ebene E

die Fläche schneidet. Umsomehr giebt es nicht-ebene Curven von der verlangten Eigenschaft.

Hiernach steht es fest, dass es Curven c auf der Fläche giebt, die im gewählten Punkt P oder (u, v) die gewählte Flächentangente t zur Tangente haben, während ihre Hauptnormale in P einen beliebigen Winkel ω mit der Flächennormale bilden kann. Da die Normalenebene der Curve c in P senkrecht zu t ist und also die Flächennormale enthält, so wird die Hauptnormale in P durch Angabe ihres Winkels ω mit der Flächennormale nur in soweit festgelegt, als sie noch zwei Lagen haben kann. Zu beachten ist dabei, dass wir der Flächennormale auf S. 27 einen positiven Sinn beigelegt haben, wenn sie reell ist, und dass wir natürlich auch der Tangente t einen bestimmten positiven Sinn erteilen werden. Wählen wir eine der beiden Möglichkeiten für die Hauptnormale, so ist alsdann die Binormale in P festgelegt und zwar auch ihrem Sinn nach.

Analytisch wird die Curve c dadurch bestimmt, dass längs ihrer die Parameter u und v Functionen eines Parameters sein müssen (nach S. 10 u. 11). Indem wir den Fall, dass die Curve c eine Minimalcurve sei, ausschliessen, dürfen wir annehmen, dieser eine Parameter sei die Bogenlänge s der Curve, gemessen von irgend einer Stelle an. Jetzt sind u und v in (1) als Functionen von s aufzufassen, sodass auch x, y, z Functionen von s werden, deren Differentiation nach s die Richtungscosinus α, β, γ der Tangente t liefert (nach III (B)):

$$\alpha = x_u u' + x_v v', \quad \beta = y_u u' + y_v v', \quad \gamma = z_u u' + z_v v'. \tag{2}$$

Der Strich deutet die Differentiation nach s an:

$$u' = \frac{du}{ds}, \quad v' = \frac{dv}{ds}. \tag{3}$$

Wenn wie früher (S. 27) X, Y, Z die Richtungscosinus der Flächennormale bedeuten, so ist

$$X\alpha + Y\beta + Z\gamma = 0$$

die Bedingung dafür, dass die Flächennormale auf t senkrecht steht. Hierfür kann nach XI (F)[1] geschrieben werden:

$$\mathbf{S}\,(y_u z_v - z_u y_v)\,\alpha = 0.$$

Hierbei sehen wir grundsätzlich davon ab, dass im Punkte

[1] Tafel XI im Anhang dieses Bandes, vgl. S. 100.

(u, v) oder gar auf der ganzen Fläche die Grösse $D = 0$ sei (siehe S. 28). Die letzte Formel kann auch durch Einsetzen der Werte (2) sofort bestätigt werden. Da sie längs der Curve c überall gilt, darf sie total nach s differenziert werden. Dies giebt nach III (C):

$$\frac{1}{r}\,\mathsf{S}\,(y_u z_v - z_u y_v)\,l + \mathsf{S}\,(y_{uu} z_v + y_u z_{uv} - z_{uu} y_v - z_u y_{uv})\,u'\alpha +$$
$$+ \mathsf{S}\,(y_{uv} z_v + y_u z_{vv} - z_{uv} y_v - z_u y_{vv})\,v'\alpha = 0\,.$$

Hierbei bedeuten l, m, n die Richtungscosinus der Hauptnormale und r den Krümmungsradius der Curve c an der Stelle (u, v) oder (s). Das erste Glied in der Formel ist nach XI (F) gleich

$$\frac{D}{r}\,\mathsf{S}\,X l$$

oder also, da ω den Winkel der Flächennormale mit der Hauptnormale bezeichnen soll, gleich:

$$\frac{D}{r}\cos\omega\,.$$

Setzen wir ferner in den beiden anderen Gliedern die Werte von α, β, γ aus (2) ein, so werden sie homogen vom zweiten Grade in u' und v'. Dabei heben sich mehrere Grössen fort, sodass — nachdem nach den Potenzen von u' und v' geordnet worden ist — die Formel hervorgeht:

$$\frac{D}{r}\cos\omega - \mathsf{S}\,(y_u z_v - z_u y_v)\,x_{uu}\cdot u'^2 -$$
$$- 2\,\mathsf{S}\,(y_u z_v - z_u y_v)\,x_{uv}\cdot u'v' - \mathsf{S}\,(y_u z_v - z_u y_v)\,x_{vv}\cdot v'^2 = 0.$$

Wenn wir nach XI (F) die Werte DX, DY, DZ für die Klammern einführen, so können wir D fortheben, da $D \neq 0$ ist, sodass bleibt:

$$\frac{\cos\omega}{r} = \mathsf{S}\,X x_{uu}\cdot u'^2 + 2\,\mathsf{S}\,X x_{uv}\cdot u'v' + \mathsf{S}\,X_{vv}\cdot v'^2.$$

Nach (3) und wegen der Formel

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

können wir dies Ergebnis auch so schreiben:

$$(4)\qquad \frac{\cos\omega}{r} = \frac{\mathsf{S}\,X x_{uu}\cdot du^2 + 2\,\mathsf{S}\,X x_{uv}\cdot du\,dv + \mathsf{S}\,X_{vv}\cdot dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}\,.$$

Diese Formel dient zur Berechnung der Krümmung $1 : r$ der Flächencurve c an der Stelle P oder (u, v). Die rechte Seite ist bekannt, sobald man den Punkt P sowie die Fortschreitungsrichtung $(dv : du)$ der Curve an dieser Stelle gegeben hat, denn der Bruch

rechts ist in du und dv von nullter Ordnung homogen. Links tritt noch der Winkel ω der Flächennormale mit der Hauptnormale des betrachteten Curvenpunktes auf.

In der Curventheorie haben wir (siehe I S. 179) dem Krümmungsradius im reellen Fall stets das positive Vorzeichen gegeben. Nach I S. 189 liegt der Krümmungsmittelpunkt auf dem positiven Teil der Hauptnormale. Die Formel (4) zeigt nun: Ist alles reell und die rechte Seite in (4) positiv, so muss $\cos\omega$ auch positiv sein, d. h. dann liegt die positive Seite der Hauptnormale von c und mithin auch der Krümmungsmittelpunkt von c auf der positiven Seite der Tangentenebene des Punktes P. Ist die rechte Seite von (4) negativ, so liegt der Krümmungsmittelpunkt auf der negativen Seite der Tangentenebene.

Wir wollen in (4) fortan unter r nicht den Krümmungsradius selbst verstehen, sondern den Abstand des Krümmungsmittelpunktes vom Punkte P und diesen Abstand im reellen Fall als positiv oder negativ bezeichnen, je nachdem der Krümmungsmittelpunkt auf der positiven oder negativen Seite der Tangentenebene liegt. Alsdann ist r nur noch seinem absoluten Werte nach der Krümmungsradius. Aber zur Abkürzung des sprachlichen Ausdruckes soll r doch auch dann noch schlechtweg der Krümmungsradius genannt werden.

Bei dieser Festsetzung ist r im reellen Fall vom selben Vorzeichen wie die rechte Seite in (4), also ω ein spitzer Winkel. Unter ω verstehen wir mithin von jetzt ab den spitzen Winkel, den die Flächennormale mit der Hauptnormale der Curve bildet, ganz abgesehen von den positiven Richtungen.

Wir erkennen aus (4), dass alle diejenigen Flächencurven c, die in P dieselbe Tangente t haben, nach derselben Seite der Tangentenebene gekrümmt sind. Welche Seite dies ist, giebt das Vorzeichen des Bruches rechts in (4) an.

Unter diesen Curven c wählen wir insbesondere diejenigen Curven C heraus, deren Hauptnormalen in P mit der Flächennormale zusammenfallen. Nach den soeben getroffenen Festsetzungen ist für diese Curven $\omega = 0$, also $\cos\omega = +1$ zu setzen, sodass für ihren Krümmungsradius R, mit Vorzeichen versehen, die Formel gilt:

$$\frac{1}{R} = \frac{\mathbf{S}\, X x_{uu} \cdot du^2 + 2\mathbf{S}\, X x_{uv} \cdot du\, dv + \mathbf{S}\, X x_{vv} \cdot dv^2}{E\, du^2 + 2F\, du\, dv + G\, dv^2}. \tag{5}$$

Hieraus und aus (4) folgt nun:

$$r = R\cos\omega. \tag{6}$$

Diese Formel giebt den

Satz 1:[1] Zieht man durch einen Flächenpunkt P alle möglichen Curven c auf der Fläche, die in P dieselbe Tangente t haben, so werden die zu P gehörigen Krümmungskreise der Curven c durch ihre Schmiegungsebenen aus einer Kugel ausgeschnitten, die in P die Tangentenebene der Fläche berührt. (Siehe Fig. 28.)

Hieraus folgt insbesondere:

Satz 2: Unter allen ebenen Schnitten, die man durch eine reelle Tangente einer reellen Fläche legen kann, hat der Normalschnitt in dem Berührungspunkt die kleinste Krümmung.

Man kann den Satz 1 auch anders einkleiden: Wenn man in der zu dem Winkel ω gehörigen Ebene durch die Tangente t das

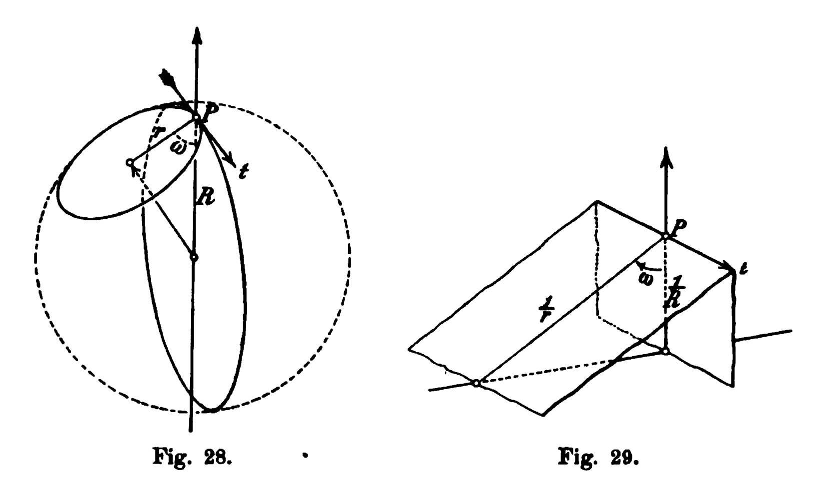


Fig. 28. Fig. 29.

Lot von P aus auf die Tangente errichtet und auf diesem Lot, der Hauptnormale, von P aus den reciproken Wert von r

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R\cos\omega}$$

abträgt, so ist der Ort der Endpunkte für beliebige Werte von ω augenscheinlich eine zu t windschiefe, aber senkrechte Gerade, die von t den kürzesten Abstand $1:R$ hat. (Siehe Fig. 29.) Also:

[1] Dies ist der sogenannte MEUSNIER'sche Satz. Er wurde von MEUSNIER, „Mémoire sur la courbure des surfaces“, Mém. des Savants étrangers t. 10 (lu 1776), 1785, gefunden.

Satz 3:[1] Legt man durch eine Tangente t eines Flächenpunktes P beliebige Ebenen und trägt man jedesmal auf der zugehörigen Normalen der ebenen Schnittcurve von P aus die Krümmung der Schnittcurve in P als Strecke ab, so ist der Ort der Endpunkte eine zur Tangente t windschiefe, aber senkrechte Gerade.

Die in (4) und (5) im Zähler rechts auftretenden Summen sind wegen der Werte XI (F) von X, Y, Z Functionen der ersten und zweiten partiellen Ableitungen von x, y, z nach u und v. Wir nennen sie die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung[2] und bezeichnen sie beständig mit L, M, N. Es soll also sein:

$$(7)\qquad L = \mathbf{S}\, X x_{uu}, \quad M = \mathbf{S}\, X x_{uv}, \quad N = \mathbf{S}\, X x_{vv}$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$(8)\qquad \begin{cases} L = X x_{uu} + Y y_{uu} + Z z_{uu}, \\ M = X x_{uv} + Y y_{uv} + Z z_{uv}, \\ N = X x_{vv} + Y y_{vv} + Z z_{vv}. \end{cases}$$

Nach XI (F) lassen sie sich auch so schreiben:

$$(9)\qquad L = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_{uu} & x_u & x_v \\ y_{uu} & y_u & y_v \\ z_{uu} & z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad M = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_{uv} & x_u & x_v \\ y_{uv} & y_u & y_v \\ z_{uv} & z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad N = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_{vv} & x_u & x_v \\ y_{vv} & y_u & y_v \\ z_{vv} & z_u & z_v \end{vmatrix}.$$

Wir merken für später hier sogleich noch eine andere Schreibweise an: Differenzieren wir XI (I) partiell nach u und partiell nach v, so erhalten wir vier Formeln:

$$\mathbf{S}\, X_u x_u + \mathbf{S}\, X x_{uu} = 0, \qquad \mathbf{S}\, X_u x_v + \mathbf{S}\, X x_{uv} = 0,$$
$$\mathbf{S}\, X_v x_u + \mathbf{S}\, X x_{uv} = 0, \qquad \mathbf{S}\, X_v x_v + \mathbf{S}\, X x_{vv} = 0,$$

aus denen nach (7) folgt:

$$(10)\qquad L = -\mathbf{S}\, X_u x_u, \quad M = -\mathbf{S}\, X_u x_v = -\mathbf{S}\, X_v x_u, \quad N = -\mathbf{S}\, X_v x_v.$$

Die Grössen L, M, N sind hiernach offenbar sämtlich für alle Wertepaare von u und v dann gleich Null, wenn die Fläche eine

---

[1] Nach Hachette, „Éléments de géométrie à trois dimensions", Paris 1817.

[2] Gauss benutzte in seinen „Disquisitiones" (vgl. Anm. S. 5) statt dieser Grössen die drei Grössen DL, DM, DN, die er mit D, D', D'' bezeichnete. Nach dem Vorgang von Hoppe (vgl. Anm. I S. 210), dem sich Andere angeschlossen haben, benutzen wir als Fundamentalgrössen zweiter Ordnung die oben angegebenen.

Ebene ist, denn dann sind ja X, Y, Z als Richtungscosinus der Normalen constant. Umgekehrt: Wenn $L = M = N = 0$ für jedes Wertepaar u, v ist, so folgt aus (10), dass sich X_u, Y_u, Z_u und auch X_v, Y_v, Z_v zu einander verhalten wie

$$\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

oder also nach XI (F) wie $X : Y : Z$. Da aber $\mathbf{S}\, X^2 = 1$ ist und deshalb $\mathbf{S}\, X X_u$ und $\mathbf{S}\, X X_v$ gleich Null sind, so würde sich im Widerspruch hiermit $\mathbf{S}\, X^2 = 0$ ergeben, sobald nicht die Ableitungen von X, Y, Z sämtlich gleich Null sind. Daher sind dann X, Y, Z constant.

Wenn aber die Normalen einer Fläche constante Richtungscosinus haben, also einander parallel sind, so besteht nach XI (I) zwischen den Coordinaten x, y, z eine lineare Gleichung mit constanten Coefficienten. Die Fläche ist folglich eine Ebene.

Wir haben somit erkannt:

Satz 4: Die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung einer Fläche sind dann und nur dann auf der ganzen Fläche gleich Null, wenn die Fläche eine Ebene ist.

Die Voraussetzung $D \neq 0$ brauchte hier garnicht erwähnt zu werden, denn wenn $D = 0$ ist, die Fläche also nach Satz 9, S. 29, die Tangentenfläche einer Minimalcurve ist, so giebt es keine Richtungscosinus für ihre Normale. Also sind dann nicht nur die Formeln (9), sondern auch die Formeln (7) unbrauchbar. Wir sehen also: Nur auf den Tangentenflächen der Minimalcurven versagt die Definition der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung.

Es sei noch hervorgehoben:

Satz 5: Die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung einer Fläche bleiben bei Ausführung einer Bewegung ungeändert.

Der Beweis ist analog dem des entsprechenden Satzes für die Fundamentalgrössen erster Ordnung auf S. 16. Wenn wir wie dort die neuen Coordinaten einführen:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + a, \\ \bar{y} &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + b, \\ \bar{z} &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + c, \end{aligned}$$

wobei die $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ die in der Tafel I angegebenen Relationen erfüllen, so ist:

$$\bar{x}_u = \alpha_1 x_u + \alpha_2 y_u + \alpha_3 z_u$$

u. s. w., ferner:

$$\bar{x}_v = \alpha_1 x_v + \alpha_2 y_v + \alpha_3 z_v$$

u. s. w. Auch die zweiten Ableitungen $\bar{x}_{uu}$, $\bar{x}_{uv}$ $\bar{x}_{vv}$ u. s. w. drücken sich analog durch die zweiten Ableitungen der ursprünglichen Coordinaten x, y, z aus. Berechnen wir nun die in (9) auftretenden Determinanten, geschrieben in $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, so ergiebt das Multiplicationsgesetz der Determinanten sofort, dass diese Determinanten gleich den in (9) selbst stehenden Determinanten multipliciert mit

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix}$$

sind. Aber diese Determinate ist nach I (F) gleich Eins. Da ferner D bei Ausführung einer Bewegung nach S. 18 ungeändert bleibt, so gilt mithin nach (9) dasselbe von L, M und N.

Liegt die Fläche in der Darstellungsform:

$$z = f(x, y)$$

vor und sind p, q, r, s, t die in (3) auf S. 1 definierten Grössen, so ist wie in (9) auf S. 15:

$$E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2 \tag{11}$$

und

$$D = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$$

also nach (9):

$$L = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad M = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad N = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \tag{12}$$

Sind ferner α, β, γ wie oben die Richtungscosinus der Tangente der betrachteten Curve auf der Fläche, so ist:

$$\alpha : \beta : \gamma = dx : dy : dz = dx : dy : (p\,dx + q\,dy),$$

also:

$$\left\{\begin{aligned} \alpha &= \frac{dx}{\sqrt{(1 + p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2}}, \\ \beta &= \frac{dy}{\sqrt{(1 + p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2}}, \\ \gamma &= \frac{p\,dx + q\,dy}{\sqrt{(1 + p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)\,dy^2}}, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

sodass die Formel (4) mit Rücksicht auf (7), (11) und (12) so lautet:

$$\frac{\cos\omega}{r} = \frac{r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Hierin bedeutet r rechts jedoch etwas anderes als links. Deshalb und der Allgemeinheit halber werden wir diese Form nicht anwenden, sondern bei den allgemeinen Parametern u und v bleiben.

§ 2. Normalschnitte und Hauptkrümmungsrichtungen.

Nach dem Satz 1, S. 105, kennt man die Krümmung einer Flächencurve in einem Punkte P, sobald man in P die Krümmung einer solchen Flächencurve kennt, die dort zwar dieselbe Tangente hat, deren Hauptnormale in P aber mit der Flächennormale in P zusammenfällt.

Für solche Curven gilt im Punkte P die Formel (5), S. 104, oder:

$$\frac{1}{R} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}, \tag{1}$$

die zeigt, dass alle Curven, die in P dieselbe Tangentenrichtung $(dv:du)$ und die Flächennormale zur Hauptnormale haben, dort auch denselben Krümmungsmittelpunkt haben, denn R bezeichnet den Abstand des auf der Flächennormalen gelegenen Krümmungsmittelpunktes vom Punkte P, im reellen Fall versehen mit dem positiven oder negativen Zeichen, je nachdem der Krümmungsmittelpunkt auf dem positiven oder negativen Teil der Normale liegt.

Es ist folglich keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir statt der durch P gehenden beliebigen Flächencurven, die dort die Flächennormale zur Hauptnormale haben, insbesondere nur die *ebenen* Flächencurven von dieser Art betrachten. Sie liegen in den Ebenen durch die Flächennormale und sollen kurz die *Normalschnitte der Fläche in* P heissen. Sie sind wohlbemerkt im allgemeinen nur für den einen Punkt P, nicht für jeden Punkt auf ihnen, Normalschnitte. Die Ebene durch die Normale wird durch die Annahme festgelegt, dass sich von P aus auf der Schnittcurve die Parameter u und v im ersten Elemente so ändern sollen, dass $dv:du$ einen gegebenen Wert k hat. Alsdann ist nach (1):

$$\frac{1}{R} = \frac{L + 2Mk + Nk^2}{E + 2Fk + Gk^2} \tag{2}$$

die mit Vorzeichen versehene Krümmung des betreffenden Normalschnittes an der Stelle P.

Wir wollen jetzt die Krümmungen der ∞^1 verschiedenen Normalschnitte durch P mit einander vergleichen. Es soll also die Grösse k variieren. Dabei sind drei verschiedene Fälle denkbar. Dadurch, dass wir die *besonderen Fälle zuerst* abthun, erreichen wir,

dass wir beim dritten — allgemeinen — Fall wissen, welche besonderen Flächen und besonderen Punkte dem allgemeinen Gesetze nicht gehorchen.

Erster specieller Fall: Die rechte Seite der Formel (2) enthält nur scheinbar k. Dies tritt ein, wenn für den betrachteten Punkt P

$$L : M : N = E : F : G \tag{3}$$

ist. Alsdann haben alle Normalschnitte in P denselben Krümmungsmittelpunkt. Der Punkt P heisst dann ein Nabelpunkt.[1] Im allgemeinen stellt die Proportion (3) zwei Gleichungen zwischen u und v vor, d. h. auf einer allgemeinen Fläche werden Nabelpunkte nur vereinzelt auftreten. Auf gewissen Flächen aber können ∞^1 Nabelpunkte liegen, ja es giebt Flächen, deren Punkte sämtlich Nabelpunkte sind.

Für den Fall von ∞^1 Nabelpunkten liefern die Rotationsflächen ein einfaches

Beispiel: Wie in (2), S. 41, liege die Rotationsfläche vor:

$$x = p(u)\cos v, \quad y = p(u)\sin v, \quad z = q(u),$$

deren Nullmeridian ($v = 0$) in der xz-Ebene verläuft und die Gleichungen hat:

$$x = p(u), \quad y = 0, \quad z = q(u).$$

Es bedeute wieder u die Bogenlänge des Meridians, es sei also wie in (3), S. 41:

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = p^2.$$

Setzen wir — was keine Beschränkung der Allgemeinheit ist — voraus, dass für alle Punkte des Meridians ($v = 0$) die Coordinate $x = p(u)$ positiv sei, so ist auch dem Vorzeichen nach (vgl. S. 18):

$$D = p(u).$$

Nach (9), S. 106, ist hier:

$$L = p'q'' - q'p'', \quad M = 0, \quad N = pq'.$$

Da u die Bogenlänge des Nullmeridians und demnach

$$p'^2 + q'^2 = 1, \quad p'p'' + q'q'' = 0$$

ist, so kann man auch schreiben:

$$L = -\frac{p''}{q'}.$$

Die Bedingungen (3) für den Nabelpunkt reducieren sich mithin hier auf nur eine Gleichung:

$$pp'' + q'^2 = 0.$$

---

[1] Nach Monge, dessen grundlegendes Werk: „Application de l'analyse à la géométrie", 4. (noch vom Verfasser selbst besorgte) Auflage, Paris 1809, 5. (von Liouville besorgte) Auflage, Paris 1850, wir schon in I S. 159 genannt haben.

Nach Satz 18, I S. 30, sind daher diejenigen Punkte des Nullmeridians Nabelpunkte, deren Krümmungsmittelpunkte auf der Axe der Rotationsfläche liegen, und sie erzeugen bei der Drehung des Meridians um die Axe solche Breitenkreise, deren Punkte sämtlich Nabelpunkte sind.

Wir wollen jetzt die Flächen, deren Punkte sämtlich Nabelpunkte sind, bestimmen. Die Bedingungen (3) müssen wegen ihrer geometrischen Bedeutung für alle Punkte einer solchen Fläche ohne Rücksicht auf das gerade gewählte Parametersystem bestehen. Wir benutzen zur Vereinfachung der Formeln die Minimalcurven der Fläche als Parameterlinien, was nach Satz 16, S. 36, gestattet ist, da wir ja nach S. 107 von denjenigen Flächen, auf denen $D = 0$ und also nur eine Schar von Minimalcurven vorhanden ist, absehen. Nun ist das Quadrat des Bogenelementes nach Satz 17, S. 36, von der Form:

$$ds^2 = 2F\,du\,dv,$$

sodass $E = G = 0$ ist. Nach (3) soll also auch $L = N = 0$ sein.

Sehen wir zu, was zunächst aus $L = 0$ folgt. Da für die Richtungscosinus X, Y, Z der Normale $\mathbf{S}X^2 = 1$ und also

$$XX_u + YY_u + ZZ_u = 0$$

und wegen $L = 0$ nach (10), S. 106:

$$x_u X_u + y_u Y_u + z_u Z_u = 0$$

ist, so kommt:

$$X_u : Y_u : Z_u = (Yz_u - Zy_u) : (Zx_u - Xz_u) : (Xy_u - Yx_u).$$

Wegen XI(K) und wegen $E = 0$ können wir hierfür schreiben:

$$X_u : Y_u : Z_u = x_u : y_u : z_u. \tag{4}$$

Die Bedingung $N = 0$ ist noch nicht benutzt worden. Sie liefert analog:

$$X_v : Y_v : Z_v = x_v : y_v : z_v.$$

Hiernach dürfen wir setzen:

$$\begin{aligned} X_u &= \lambda x_u, & Y_u &= \lambda y_u, & Z_u &= \lambda z_u; \\ X_v &= \mu x_v, & Y_v &= \mu y_v, & Z_v &= \mu z_v. \end{aligned} \tag{5}$$

Aus der zweiten Gleichung (10), S. 106, folgt nun

$$(\lambda - \mu)\,\mathbf{S}\,x_u x_v = 0 \quad \text{oder} \quad (\lambda - \mu)F = 0.$$

Da $E = G = 0$ und also $F \neq 0$ ist, weil sonst $D = 0$ wäre, so ist $\lambda = \mu$. Ausser den drei Formeln (5) haben wir also noch diese:

$$X_v = \lambda x_v, \quad Y_v = \lambda y_v, \quad Z_v = \lambda z_v. \tag{6}$$

Es muss aber sein:

$$\frac{\partial X_u}{\partial v} = \frac{\partial X_v}{\partial u}$$

u. s. w. Somit folgt aus (5) und (6):

$$\lambda_v x_u - \lambda_u x_v = 0, \quad \lambda_v y_u - \lambda_u y_v = 0, \quad \lambda_v z_u - \lambda_u z_v = 0.$$

Weil die drei aus den Wertepaaren

$$x_u, x_v; \quad y_u, y_v; \quad z_u, z_v$$

zu bildenden zweireihigen Determinanten nach S. 6 nicht sämtlich gleich Null sind, so muß $\lambda_u = \lambda_v = 0$ und daher $\lambda = \text{Const.}$ sein. Ist $\lambda = 0$, so sind X, Y, Z nach (5) und (6) constant; die Fläche hat dann lauter parallele Normalen und ist nach S. 107 eine Ebene. Ist $\lambda = \text{Const.}$, aber $\neq 0$, so folgt aus (5) und (6):

$$X = \lambda x + a, \quad Y = \lambda y + b, \quad Z = \lambda z + c \quad (a, b, c = \text{Const.}),$$

daher wegen $\mathbf{S}\, X^2 = 1$:

$$(\lambda x + a)^2 + (\lambda y + b)^2 + (\lambda z + c)^2 = 1.$$

Dies aber ist die Gleichung einer Kugel. Offenbar sind umgekehrt alle Punkte in der Ebene oder auf der Kugel Nabelpunkte. Daher:

Satz 6: Eine Fläche, auf der D nicht überall gleich Null ist, hat dann und nur dann lauter Nabelpunkte, wenn sie eine Kugel oder insbesondere eine Ebene ist.

Wir können aus $L = 0$ auch wie folgt schliessen: Die erste Formel (8), S. 106, giebt

$$X x_{uu} + Y y_{uu} + Z z_{uu} = 0.$$

Da $E = \mathbf{S}\, x_u^2 = 0$ ist, so ist auch:

$$x_u x_{uu} + y_u y_{uu} + z_u z_{uu} = 0,$$

mithin:

$$x_{uu} : y_{uu} : z_{uu} = (Y z_u - Z y_u) : (Z x_u - X z_u) : (X y_u - Y x_u),$$

woraus wegen XI (K) und $E = 0$ folgt:

$$x_{uu} : y_{uu} : z_{uu} = x_u : y_u : z_u$$

oder:

$$\frac{\partial \log x_u}{\partial u} = \frac{\partial \log y_u}{\partial u} = \frac{\partial \log z_u}{\partial u}.$$

Setzen wir diese drei Differentialquotienten gleich

$$\frac{\partial \log \varrho}{\partial u},$$

indem wir unter ϱ eine Function von u und v verstehen, so kommt:

$$x_u = V_1(v)\varrho, \quad y_u = V_2(v)\varrho, \quad z_u = V_3(v)\varrho, \tag{7}$$

wo V_1, V_2, V_3 Functionen von v allein sind. Natürlich ist hierbei $\varrho \neq 0$ und wegen $E = 0$ noch

$$V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 = 0. \tag{8}$$

Längs der Parameterlinien (v) wachsen x, y, z um Incremente proportional x_u, y_u, z_u, die sich nach (7) zu einander verhalten wie die Functionen V_1, V_1, V_3 von v und daher längs der Curven (v) constante Verhältnisse haben. Die Minimalcurven (v) sind also Geraden.

Dies lässt sich umkehren: Sind die Parametercurven (u) und (v) Minimalcurven und insbesondere die Curven (v) Minimalgeraden, so müssen die Verhältnisse $x_u : y_u : z_u$ frei von u sein, d. h. es müssen dann Gleichungen von der Form (7) bestehen. Berechnen wir auf Grund dieser Gleichungen x_{uu}, y_{uu}, z_{uu}, so lehrt die erste Formel (9), S. 106, dass $L = 0$ ist. Daher:

Satz 7: Sind die Parameterlinien (u) und (v) einer Fläche Minimalcurven, so ist die Fundamentalgrösse L dann und nur dann auf der ganzen Fläche gleich Null, wenn die Curven (v) insbesondere Minimalgeraden sind.

Wenn auch $N = 0$ ist, so sind auch die Parameterlinien (u) Minimalgeraden. Daher:

Satz 8: Die Flächen, deren Punkte sämtlich Nabelpunkte sind, sind mit denjenigen Flächen identisch, die zwei getrennte Scharen von Minimalgeraden enthalten.

Nach Satz 6 folgt hieraus:

Satz 9: Ausser den Ebenen und Kugeln giebt es keine Fläche mit zwei getrennten Scharen von Minimalgeraden.

Wir haben thatsächlich schon in Satz 26, S. 64, gesehen, dass jede Kugel zwei Scharen von Minimalgeraden enthält.

Zweiter specieller Fall:[1] Die rechte Seite der Formel

$$\frac{1}{R} = \frac{L + 2Mk + Nk^2}{E + 2Fk + Gk^2} \tag{9}$$

[1] Über diesen Fall sagen die Lehrbücher der Flächentheorie nichts. Wir finden ihn in SALMON-FIEDLER's „Analytischer Geometrie des Raumes, II. Teil", 3. Aufl., Leipzig 1880, in der Anmerkung 16) auf S. XXIX kurz erwähnt. Untersucht wurde er von STÄCKEL, „Beiträge zur Krümmungstheorie", Leipziger Berichte 1896.

enthält zwar nicht nur scheinbar k, lässt sich aber durch einen in k linearen Factor kürzen. In diesem Fall ist $1:R$ eine linear gebrochene Function von k. Dasselbe gilt dann auch bei Einführung neuer Parameter. Denn wenn u und v gleich Functionen zweier neuer Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ gesetzt werden und unter $\bar{k}$ die Grösse $d\bar{v}:d\bar{u}$ verstanden wird, so ist:

$$k = \frac{dv}{du} = \frac{\frac{\partial v}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial v}{\partial \bar{v}}\bar{k}}{\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial u}{\partial \bar{v}}\bar{k}},$$

also k eine linear gebrochene Function von $\bar{k}$. Setzen wir sie in die Formel für $1:R$ ein, so wird mithin $1:R$ eine linear gebrochene Function von $\bar{k}$, was zu beweisen war.

Die Bedingung für den jetzigen Fall kann auch so ausgesprochen werden: Die beiden in k quadratischen Gleichungen

$$E + 2Fk + Gk^2 = 0, \quad L + 2Mk + Nk^2 = 0$$

sollen eine Wurzel k gemein haben. Für diese gemeinsame Wurzel ist

$$1:2k:k^2 = (FN - GM):(GL - EN):(EM - FL),$$

daher:

$$(10) \qquad 4(EM - FL)(FN - GM) - (GL - EN)^2 = 0.$$

Unter dieser Bedingung also hat $1:R$ die Form:

$$(11) \qquad \frac{1}{R} = \frac{\alpha k + \beta}{\gamma k + \delta},$$

wobei α, β, γ, δ Functionen von u und v bedeuten.

Wir haben in Satz 46, S. 92, gesehen, dass die vier Tangenten des Punktes P oder (u, v), die zu vier Werten von k gehören, dasselbe Doppelverhältnis haben wie die vier Werte von k selbst. Die vier Tangenten sind die Schnittlinien der vier zugehörigen Normalschnittebenen mit der Tangentenebene. Diese vier Ebenen haben nach I S. 334 dasselbe Doppelverhältnis. Dasselbe Doppelverhältnis haben nun nach (11) und Satz 35, I S. 328, die Krümmungsmittelpunkte der vier Normalschnitte. Daher liegt hier der Fall vor, dass irgend vier Normalschnittebenen des Punktes (u, v) dasselbe Doppelverhältnis wie die zugehörigen vier Krümmungsmittelpunkte auf der Normalen des Punktes (u, v) haben. (Siehe Fig. 30, S. 115.)

Durchläuft k alle Werte, so gilt dasselbe von R. Die Grösse

$1:R$ hat für keinen Wert von k ein endliches Maximum oder Minimum, da der Differentialquotient von $1:R$ nach k den Wert

$$\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma k + \delta)^2}$$

hat und nur für $k = -\delta:\gamma$ unendlich gross ist; aber für dieses k ist $1:R$ auch unendlich gross.

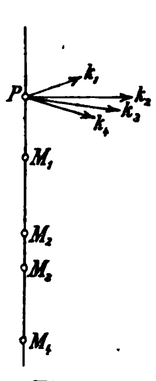


Fig. 30.

Die analytische Bedingung (10) für Punkte (u, v) von dieser Beschaffenheit ist eine Gleichung zwischen u und v. Demnach giebt es im allgemeinen eine gewisse Curve auf der Fläche, deren Punkte diese Eigentümlichkeit haben. Doch kann es sein, dass die Gleichung (10) einen Widerspruch enthält, sodass es keine solche Punkte giebt, oder dass diejenigen Punkte, für die (10) erfüllt ist, noch speciellerer Art, nämlich Nabelpunkte sind.

1. **Beispiel:** Bei der oben im Beispiel betrachteten Rotationsfläche lautet die Bedingung (10) so:

$$\frac{p}{q'}(pp'' + q'^2) = 0.$$

Ist $p = 0$, so liegt der Schnittpunkt des Meridians mit der Drehaxe vor, der offenbar singulär ist (vgl. S. 23). Die Bedingung

$$pp'' + q'^2 = 0$$

giebt, wie wir sahen, nur Nabelpunkte. Rotationsflächen haben also nie Punkte der jetzigen Art.

2. **Beispiel:** Wir können auf folgende Art eine Fläche herstellen, die einen reellen Punkt von dieser besonderen Art enthält: Wir construieren in den Ebenen durch die z-Axe alle Kreise, die im Anfangspunkt die xy-Ebene berühren und deren Mittelpunktshöhe $z = R$ linear gebrochen von der Tangente des Winkels der jeweiligen Ebene mit der xz-Ebene abhängt. Dann hat der Anfangspunkt auf der Fläche der Kreise die gewünschte Eigenschaft.

Es giebt Flächen, die überall Punkte der jetzt betrachteten Art haben. Um sie zu bestimmen, benutzen wir die Minimalcurven der Fläche als Parameterlinien (u) und (v) wie oben. Dann ist $E = G = 0$, $F \neq 0$. Die Bedingung (10) lautet jetzt: $LN = 0$. Nehmen wir etwa $L = 0$ an, so ist $N \neq 0$, weil sonst der Fall der Nabelpunkte vorliegen würde. Nach Satz 7 sagen die Bedingungen $E = G = 0$ und $L = 0$ aus, dass die Parameterlinien (v) Minimalgeraden sind. Die Curven (u) sind keine, weil $N \neq 0$ ist. Mithin

Satz 10: Diejenigen Flächen, bei denen in jedem Punkt das Krümmungsmaass eines Normalschnittes eine linear gebrochene Function der zugehörigen Tangentenrichtung

$(dv:du)$ ist, bei denen also vier Normalschnittebenen eines Punktes stets dasselbe Doppelverhältnis wie die vier zugehörigen Krümmungsmittelpunkte haben, sind identisch mit denjenigen Flächen, die eine Schar von Minimalgeraden und eine Schar von nicht-geraden Minimalcurven enthalten.

Die soeben bestimmten Flächen sind imaginär, denn wenn eine reelle Fläche eine Schar von Minimalgeraden enthält, so enthält sie auch diejenige Schar, die aus den Gleichungen dieser einen Schar durch Vertauschen von i mit $-i$ hervorgeht, und ist also nach Satz 9 eine Ebene oder eine Kugel.

Allgemeiner Fall: Es liege eine Fläche vor, auf der D nicht überall gleich Null ist und die zu keiner der beiden besonderen Flächenarten gehört, d. h. die Fläche soll weder die Tangentenfläche einer Minimalcurve noch eine sonstige Fläche mit einer Schar von Minimalgeraden, noch eine Fläche mit zwei Scharen von Minimalgeraden (Ebene oder Kugel) sein. Kurz gesagt: Wir nehmen jetzt an, die vorliegende Fläche enthalte keine Schar von Minimalgeraden. Auch sei P oder (u, v) ein Punkt allgemeiner Lage auf der Fläche. Alsdann ist die rechte Seite der Formel:

$$\frac{1}{R} = \frac{L + 2Mk + Nk^2}{E + 2Fk + Gk^2} \tag{12}$$

weder frei von k noch durch einen in k linearen Factor zu kürzen. Ist die Fläche reell und weder eine Ebene noch eine Kugel, so liegt für einen allgemein gewählten Punkt der Fläche stets dieser Fall vor.

Die Krümmung des Normalschnittes, der zu k gehört, ist eine quadratisch gebrochene Function von k und erreicht für zwei Werte von k ein Maximum oder Minimum. Denn wenn wir den Bruch rechts nach k differenzieren und den Differentialquotienten gleich Null setzen, so kommt:

$$(M + Nk)(E + 2Fk + Gk^2) - (F + Gk)(L + 2Mk + Nk^2) = 0 \tag{13}$$

oder

$$(EM - FL) - (GL - EN)k + (FN - GM)k^2 = 0 \tag{14}$$

oder auch:

$$\begin{vmatrix} k^2 & E & L \\ -k & F & M \\ 1 & G & N \end{vmatrix} = 0. \tag{15}$$

Sind k_1 und k_2 die beiden Wurzeln dieser quadratischen Gleichung, so ist:

$$(16)\qquad k_1 + k_2 = \frac{GL - EN}{FN - GM}, \quad k_1 k_2 = \frac{EM - FL}{FN - GM}.$$

Mithin verhalten sich die drei Grössen:

$$1, \quad k_1 + k_2, \quad k_1 k_2$$

zu einander gerade so wie die zweireihigen Unterdeterminanten der Elemente der ersten Reihe in der Determinante (15), sodass ein bekannter Determinantensatz ergiebt:

$$(17)\qquad \begin{cases} E + F(k_1 + k_2) + G k_1 k_2 = 0, \\ L + M(k_1 + k_2) + N k_1 k_2 = 0, \end{cases}$$

was sich auch leicht durch Einsetzen der Werte (16) bestätigen lässt. Die Wurzeln k_1 und k_2 dieser beiden Gleichungen erfüllen die quadratische Gleichung (14), und dass sie im reellen Fall reell sind, folgt gerade so wie seinerzeit auf S. 95 die Realität der Wurzeln k und $\varkappa$ der damaligen Gleichungen (10). Auch sind sie von einander verschieden, weil sonst nach (17) der Zähler und der Nenner rechts in (12) einen in k linearen Factor gemein hätten, was ausgeschlossen wurde.

Die erste Gleichung (17) sagt nach Satz 11, S. 33, aus, dass die beiden Richtungen (k_1) und (k_2) zu einander senkrecht sind. Die geometrische Bedeutung der zweiten Gleichung (17) wird später (auf S. 156) erörtert werden.

Im reellen Fall tritt nun für die beiden Werte k_1 und k_2 von k wirklich ein Maximum oder Minimum von $1 : R$ ein, denn wenn wir den Wert (12) von $1 : R$ zweimal nach k differenzieren, so geht, da k_1 und k_2 die Gleichung (14) erfüllen, deren linke Seite der Zähler des ersten Differentialquotienten von $1 : R$ nach k ist, für den zweiten Differentialquotienten ein Bruch mit positivem Nenner hervor, dessen Zähler für die Werte k_1 und k_2 von k gleich der nach k differenzierten linken Seite von (14) ist. Dieser Zähler aber ist von Null verschieden, weil sonst die Gleichung (14) eine Doppelwurzel hätte, also die Bedingung (10) gegen die Voraussetzung erfüllt wäre.

Zur Bestimmung der Maximal- oder Minimalwerte von $1 : R$ ziehen wir aus (12) und (13) die Gleichung:

$$(18)\qquad (M + Nk)R - (F + Gk) = 0 \qquad (k = k_1, k_2),$$

aus der folgt:

$$(19)\qquad k = -\frac{MR - F}{NR - G} \qquad (k = k_1, k_2).$$

Setzen wir dies in (15) ein, so kommt zunächst:

$$\begin{vmatrix} (MR-F)^2 & E & L \\ (MR-F)(NR-G) & F & M \\ (NR-G)^2 & G & N \end{vmatrix} = 0.$$

Zur Vereinfachung subtrahieren wir von der ersten Reihe das $(G - NR)$ fache der zweiten und das $(NR^2 - GR)$ fache der dritten. Dann wird das zweite und dritte Element der ersten Reihe gleich Null, sodass bleibt:

$$(20) \quad (LN - M^2)R^2 - (EN - 2FM + GL)R + (EG - F^2) = 0.$$

Diese Gleichung liefert die zu k_1 und k_2 gehörigen Werte R_1 und R_2 von R, die wir aber auch, wenn k_1 und k_2 gefunden sind, aus (12) oder aus (18) berechnen können.

Die Krümmungen $1 : R_1$ und $1 : R_2$ genügen der quadratischen Gleichung:

$$(21) \quad (LN - M^2) - (EN - 2FM + GL)\frac{1}{R} + (EG - F^2)\frac{1}{R^2} = 0.$$

Hiernach ist

$$(22) \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}, \quad \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Künftig bezeichnen wir diese beiden Werte mit H und K:

$$(23) \quad H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}.$$

Man nennt die beiden Richtungen (k_1) und (k_2) durch P, für die der Krümmungsradius des Normalschnittes ein Maximum oder Minimum hat, die Hauptkrümmungsrichtungen des Flächenpunktes P, entsprechend die mit Vorzeichen versehenen Radien R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien, ihre reciproken Werte die Hauptkrümmungen und die zugehörigen Mittelpunkte die Hauptkrümmungsmittelpunkte des Flächenpunktes.[1]

Wir haben gefunden:

Satz 11: Liegt eine solche Fläche mit den Parametern u, v vor, die keine Schar von Minimalgeraden enthält, so giebt es unter den Normalschnitten eines Flächenpunktes

[1] Die ersten Untersuchungen über die Krümmung der Flächencurven verdankt man Euler, der in der wichtigen Arbeit: „Recherches sur la courbure des surfaces", Mém. de l'Académ. des Sciences de Berlin, T. XVI, 1760, die Krümmungen der Normalschnitte, die Hauptkrümmungsrichtungen und ihre Radien zuerst bestimmt hat.

von allgemeiner Lage zwei nicht zusammenfallende zu einander senkrechte und im reellen Fall reelle Schnitte, für die die Krümmung, verglichen mit den Krümmungen der übrigen Normalschnitte der Stelle, ein Maximum oder Minimum hat. Die Summe H und das Product K dieser beiden mit Vorzeichen versehenen Krümmungen haben, ausgedrückt in den Fundamentalgrössen E, F, G und L, M, N, die Werte:

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}, \qquad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Die zu jenen beiden Normalschnitten gehörigen Hauptkrümmungsrichtungen ($k = dv:du$) auf der Fläche ergeben sich aus der quadratischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} k^2 & E & L \\ -k & F & M \\ 1 & G & N \end{vmatrix} = 0.$$

Beispiel: Bei der gemeinen Schraubenfläche, die durch stetige Schraubung einer in der x-Axe gelegenen Geraden um die x-Axe entsteht und nach (20), S. 60, die Gleichungen hat:

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = qv,$$

ist, wie damals berechnet wurde:

$$E = 1, \quad F = 0; \quad G = u^2 + q^2,$$

daher:

$$D = \sqrt{u^2 + q^2}.$$

Die Quadratwurzel ist nach S. 18 positiv zu nehmen. Ferner giebt die Anwendung der Formeln (9), S. 106:

$$L = 0, \quad M = -\frac{q}{\sqrt{u^2 + q^2}}, \quad N = 0.$$

Der Satz 11 giebt daher:

$$H = 0, \quad K = -\frac{q^2}{(u^2 + q^2)^2}.$$

$H = 0$ bedeutet: Auf der gemeinen Schraubenfläche sind die beiden Hauptkrümmungsradien in jedem Punkte einander entgegengesetzt gleich. Die Gleichung für die beiden Hauptkrümmungsrichtungen k_1 und k_2 giebt hier:

$$k = \pm\frac{1}{\sqrt{u^2 + q^2}}.$$

Dem in Satz 11 ausgesprochenen allgemeinen Fall ordnet sich der erste Fall, der des Nabelpunktes, in gewisser Hinsicht als Specialfall unter. Ein Nabelpunkt tritt, können wir sagen, auf,

wenn $R_1 = R_2$ ist. Deshalb kann man den Satz 6 auch so aussprechen:

Satz 12: Diejenigen Flächen, auf denen in jedem Punkte die beiden Hauptkrümmungsradien einander, auch dem Vorzeichen nach, gleich sind, sind identisch mit den Kugeln, insbesondere mit den Ebenen.

Es muss noch bemerkt werden, dass ausser den oben im ersten und zweiten Fall erwähnten besonderen Erscheinungen, die für gewisse Punkte einer allgemein gewählten Fläche auftreten können, sodass dort der Satz 11 nicht gilt, scheinbar noch andere Ausnahmen von diesem Satze vorkommen können. Denn man kann ja z. B. eine beliebige Schar von ∞^1 Kreisen in den ∞^1 Ebenen durch die z-Axe construieren, die sämtlich im Anfangspunkt die xy-Ebene berühren; sie erzeugen eine Fläche, und auf dieser Fläche sind die Normalschnitte des Anfangspunktes gerade diese beliebig gewählten Kreise. Man wird eine solche Fläche analytisch darstellen, indem man als den einen Parameter etwa den Winkel u der Kreisebenen mit der xz-Ebene und als den anderen etwa den Winkel v des Radius des Punktes mit der z-Axe benutzt. Alsdann sind die Parameterlinien (u) die Kreise. Da sie sich alle im Anfangspunkt treffen, so ist diese Stelle nach S. 6 singulär im Hinblick auf die Parameterdarstellung.

Es darf also, wenn eine reelle Fläche etwa rein geometrisch definiert ist, nicht überraschen, wenn an einzelnen Stellen, an denen die Tangenten regulär eine Ebene bilden, doch der Satz 11 nicht gilt. Solche Stellen sind bei Anwendung zweier Flächenparameter singulär.[1] Doch gilt der Satz 11 stets für allgemein gewählte Punkte einer Fläche, sobald die Fläche keine Schar von Minimalgeraden enthält.

§ 3. Hauptkrümmungen bei einer Rotationsfläche.

Wir wollen die Formeln des vorigen Paragraphen auf eine allgemeine Rotationsfläche anwenden. Die Axe der Fläche wählen wir als z-Axe. Der in der xz-Ebene gelegene Meridian habe (wie auf S. 40) die Gleichungen:

$$x = p(u), \quad y = 0, \quad z = q(u),$$

[1] Hierauf hat Poisson zuerst aufmerksam gemacht: „Mémoire sur la courbure des surfaces“, Journ. f. d. reine u. ang. Math. 8. Bd. (1832).

und u bedeute dabei die Bogenlänge des Meridians. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass $p(u) > 0$ sei, wenn die Fläche reell ist. Die Bogenlänge u sei alsdann im Sinne der wachsenden Coordinate z gewählt, also $q' > 0$. Durch Drehung des Meridians um die z-Axe entsteht die Rotationsfläche:

$$x = p(u)\cos v, \quad y = p(u)\sin v, \quad z = q(u). \tag{1}$$

Wie früher, vgl. S. 110, ist:

$$\begin{cases} E = 1, \quad F = 0, \quad G = p^2, \quad D = p; \\ L = -\frac{p''}{q'}, \quad M = 0, \quad N = pq'. \end{cases} \tag{2}$$

Nach XI (F) ist ferner:

$$X = -q'\cos v, \quad Y = -q'\sin v, \quad Z = p', \tag{3}$$

also für einen Punkt des Meridians ($v = 0$) in der xz-Ebene:

$$X = -q', \quad Y = 0, \quad Z = p'.$$

Da im reellen Fall $q' > 0$ ist, so ist dann die positive Flächennormale nach der z-Axe hingerichtet. Die Gleichung des Satzes 11, S. 119, für k_1 und k_2 ist hier: $k = 0$. Sie hat, aufgefasst als quadratische Gleichung, die Wurzeln $k_1 = 0$, $k_2 = \infty$. Aus (20), S. 118, ergeben sich die zugehörigen Hauptkrümmungsradien:

$$R_1 = -\frac{q'}{p''}, \quad R_2 = \frac{p}{q'}. \tag{4}$$

Da R nach S. 104 der mit Vorzeichen versehene Krümmungsradius eines Normalschnittes ist, so sind

$$\mathfrak{x} = x + XR, \quad \mathfrak{y} = y + YR, \quad \mathfrak{z} = z + ZR$$

die Coordinaten des zugehörigen Krümmungsmittelpunktes. Mithin giebt $k_1 = 0$ für den Punkt P oder $(u, 0)$ des Nullmeridians ($v = 0$) als Coordinaten des einen Hauptkrümmungsmittelpunktes:

$$\mathfrak{x}_1 = p + \frac{q'^2}{p''}, \quad \mathfrak{y}_1 = 0, \quad \mathfrak{z}_1 = q - \frac{p'q'}{p''}.$$

Da $p'^2 + q'^2 = 1$, also $pp' + qq' = 0$ ist, so ist auch

$$\mathfrak{z}_1 = q + \frac{p'^2}{q''}.$$

Dieser Hauptkrümmungsmittelpunkt ist nach Satz 18, I S. 30, der Krümmungsmittelpunkt $\mathfrak{K}$ des in der xz-Ebene gelegenen Nullmeridians ($v = 0$). Dies war vorauszusehen, denn $k_1 = 0$ bedeutet

$dv = 0$, d. h. der zu k_1 gehörige Normalschnitt ist der Meridian Ferner bedeutet $k_2 = \infty$ oder $du = 0$, dass die zweite Hauptkrümmungsrichtung durch die Tangente des Breitenkreises (u) von P angegeben wird. (Siehe Fig. 31.) Der zugehörige Hauptkrümmungsmittelpunkt hat die Coordinaten:

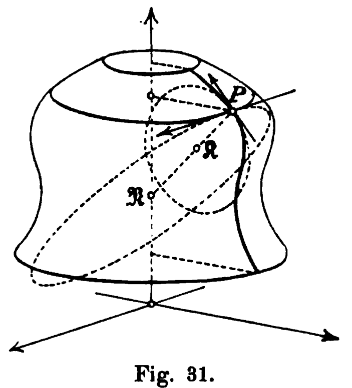


Fig. 31.

$$\mathfrak{x}_2 = 0, \quad \mathfrak{y}_2 = 0, \quad \mathfrak{z}_2 = q + \frac{pp'}{q'},$$

liegt also auf der z-Axe und ist daher der Schnittpunkt $\mathfrak{N}$ der Normalen mit der Drehaxe. Ferner ist nach (23), S. 118:

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\frac{p''}{q'} + \frac{q'}{p},$$

$$K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = -\frac{p''}{p}.$$

Das Product $R_1 R_2$ ist absolut genommen gleich dem Product der Strecken $P\mathfrak{K}$ und $P\mathfrak{N}$, und zwar ist es positiv oder negativ, je nachdem beide Strecken nach derselben Seite von P liegen oder nach verschiedenen Seiten. Daher:

Satz 13: Bei einer Rotationsfläche sind die Hauptkrümmungsrichtungen eines beliebigen Punktes P die Tangente des durch P gehenden Meridians und die Tangente des durch P gehenden Breitenkreises. Die zugehörigen Hauptkrümmungsmittelpunkte sind der Mittelpunkt $\mathfrak{K}$ des Krümmungskreises jenes Meridians und der Schnittpunkt $\mathfrak{N}$ der Flächennormale $P\mathfrak{K}$ mit der Drehaxe. Das Product der Hauptkrümmungsradien ist bei einer reellen Fläche positiv oder negativ, je nachdem $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{N}$ auf derselben Seite von P liegen oder nicht.

Wir haben in Satz 65, I S. 103, alle ebenen Curven bestimmt, bei denen das Product aus dem Krümmungsradius und der Normalen, diese gemessen bis zu ihrem Schnittpunkt mit einer Geraden — damals der y-Axe — constant und zwar gleich ± 1 ist, wobei das Vorzeichen positiv oder negativ angenommen wurde, je nachdem beide Strecken nach derselben oder nach verschiedenen Seiten des Curvenpunktes lagen. Durch ähnliche Vergrösserung gehen aus jenen Curven solche hervor, bei denen das Product einen constanten Wert $(\neq 0)$ hat. Lassen wir diese Curven sich um die y-Axe drehen, so erzeugen sie diejenigen Rotationsflächen, auf denen

$$K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}$$

constant ist. Wenn wir statt der damaligen xy-Ebene die xz-Ebene benutzen und noch die Bemerkungen im Anschluss an jenen Satz beachten, so finden wir:

Satz 14: Jede reelle Rotationsfläche, bei der das Product K der Hauptkrümmungen überall constant, aber von Null verschieden ist, ist einer derjenigen Rotationsflächen ähnlich, die durch Drehung der ebenen Curven:

$$\text{(I a)} \quad x = c \cos\varphi, \quad y = 0, \quad z = E(c, \varphi),$$

$$\text{(I b)} \quad x = \frac{1}{c} \Delta\varphi, \quad y = 0, \quad z = \frac{1}{c} E(c, \varphi) - \frac{1 - c^2}{c} F(c, \varphi),$$

$$\text{(II a)} \quad x = c \cos\varphi, \quad y = 0, \quad z = F(c, \varphi) - E(c, \varphi),$$

$$\text{(II b)} \quad x = \frac{1}{c} \Delta\varphi, \quad y = 0, \quad z = \frac{1}{c} F(c, \varphi) - \frac{1}{c} E(c, \varphi)$$

um die z-Axe hervorgehen. Dabei bedeutet φ den Parameter der Curve und c eine positive Constante kleiner als Eins. Ferner ist:

$$\Delta\varphi = \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi},$$

$$E(c, \varphi) = \int_0^\varphi \Delta\varphi \, d\varphi, \qquad F(c, \varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Das constante Product der Hauptkrümmungen ist bei den Typen (I a) und (I b) gleich $+1$, bei den Typen (II a) und (II b) gleich -1. Insbesondere fallen die beiden ersten Typen für $c = 1$ zusammen und geben die Kugel vom Radius Eins. Ebenso fallen die beiden letzten Typen für $c = 1$ zusammen und geben die Fläche, die durch Drehung der Tractrix

$$x = \cos\varphi, \quad y = 0, \quad z = \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) - \sin\varphi$$

um die z-Axe hervorgeht.

Aus den Schlussbemerkungen jenes citierten Satzes folgt noch:

Satz 15: Verschiebt man eine Rotationsfläche, bei der das Product der Hauptkrümmungen überall constant, gleich K, ist, längs ihrer Axe, so gehen ∞^1 Flächen hervor, die von ∞^1 Rotationsflächen mit derselben Axe, bei denen jenes Product gleich $-K$ ist, überall senkrecht durchschnitten werden.

In den Figuren 32 bis 37 sind die sechs Typen von reellen Rotationsflächen, bei denen $K = \pm 1$ ist, dargestellt. Insbesondere entspricht den Figuren 34 und 35 der Wert $c = 1$, den Figuren 32, 33, 36 und 37 der Wert $c = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ (siehe I S. 105). Die Figuren 32 und 33, dann 34 und 35, endlich 36 und 37 gehören paarweis zusammen, wie es Satz 15 angiebt. Die beiden ersten Figuren gehören zu den Typen (I a) und (II a), die beiden letzten zu den Typen (I b) und (II b) des Satzes 14. Fig. 34 ist die Kugel, Fig. 35 die Rotationsfläche der Tractrix.

Wir wollen auch diejenigen Rotationsflächen bestimmen, auf denen überall die beiden Hauptkrümmungen einander entgegengesetzt gleich sind, d. h. $H = 0$ ist. Nach Satz 13 kommt es darauf an, alle ebenen Curven zu bestimmen, bei denen der Krümmungsradius überall so lang wie die Normale ist, diese bis zu einer festen Geraden gemessen, aber dabei nach der entgegengesetzten Seite gerichtet ist. Durch Drehung einer derartigen Curve um die feste Gerade entsteht eine Rotationsfläche von der gewünschten Beschaffenheit.

Ist s die Bogenlänge der Curve in der xy-Ebene und die y-Axe die feste Gerade, so haben wir zu verlangen, dass die x-Coordinate des Krümmungsmittelpunktes, d. h. nach Satz 18, I S. 30, die Grösse

$$x + \frac{y'^2}{x''}$$

doppelt so gross als x selbst sei, daher:

$$y'^2 = x x'',$$

wenn der Strich die Differentiation nach s andeutet. Da $x'^2 + y'^2 = 1$ ist, folgt hieraus

$$1 - x'^2 = x x''$$

oder:

$$\frac{d x x'}{d s} = 1.$$

Mithin:

$$x x' = s + b \quad (b = \text{Const.})$$

oder:

$$\frac{d(x^2)}{d s} = 2 s + 2 b,$$

also:

$$x^2 = s^2 + 2 b s + a^2 \quad (a^2 = \text{Const.}).$$

Die Bogenlänge sei von derjenigen Stelle an gemessen, an der die Tangente der y-Axe parallel und daher $x x' = 0$ ist, was auf die

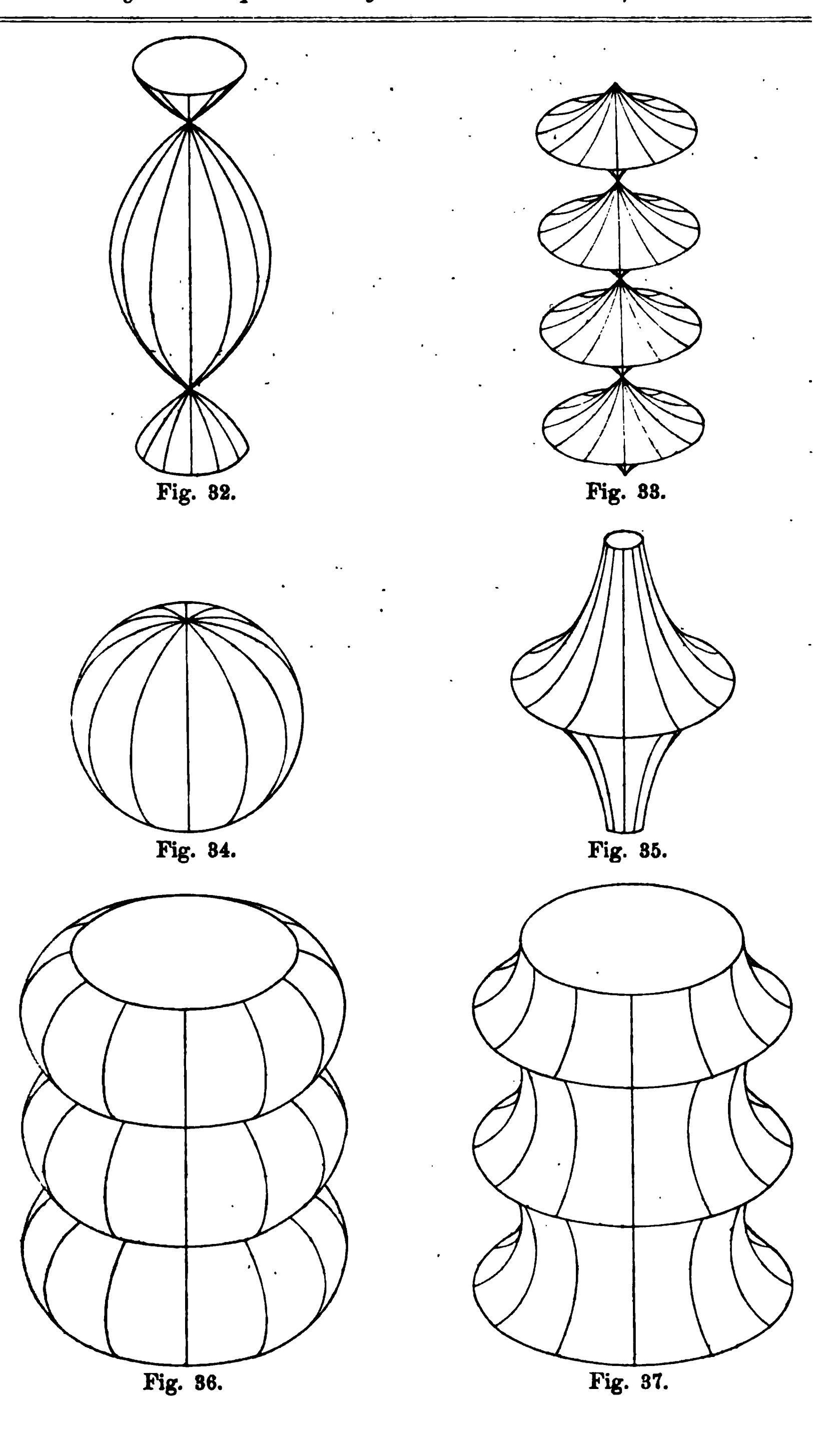


Fig. 32.

Fig. 33.

Fig. 34.

Fig. 35.

Fig. 36.

Fig. 37.

Annahme $b = 0$ hinaus kommt, wodurch also die Allgemeinheit der Betrachtung nicht beschränkt wird. Jetzt ist:

$$x = \sqrt{s^2 + a^2}, \quad x' = \frac{s}{\sqrt{s^2 + a^2}},$$

daher

$$y' = \sqrt{1 - x'^2} = \frac{a}{\sqrt{s^2 + a^2}},$$

also:

$$y = a \log(s + \sqrt{s^2 + a^2}) + c \qquad (c = \text{Const.}).$$

Wenn wir noch durch Verschieben der Curve längs der y-Axe — was ja gestattet ist — den Punkt ($s = 0$) auf die x-Axe bringen, so muss $y = 0$ sein für $s = 0$, mithin $c = -\log a$, sobald wir — im reellen Fall — die Quadratwurzel positiv nehmen, was auch erlaubt ist. Nun kommt:

$$x = \sqrt{s^2 + a^2}, \quad y = a \log \frac{s + \sqrt{s^2 + a^2}}{a}$$

oder wenn s eliminiert wird:

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}}\right).$$

Dies aber ist die Gleichung einer Kettenlinie, deren Leitlinie die

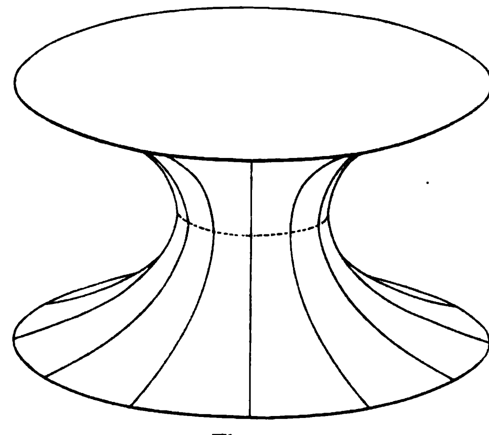


Fig. 38.

y-Axe ist. Durch Drehung der Curve um ihre Leitlinie entsteht ein sogenanntes Catenoid.[1] (Siehe Fig. 38.) Daher:

Satz 16: Die Catenoide sind die einzigen Rotationsflächen, auf denen überall die beiden Hauptkrümmungsradien einander entgegengesetzt gleich sind.

[1] Vgl. die Anmerkung auf S. 42.

§ 4. Haupttangenten.

Es liege eine Fläche vor, die keine Schar von Minimalgeraden enthält. Nach (2), S. 109, erfüllen die mit Vorzeichen versehenen Krümmungsradien R der Normalschnitte eines allgemein gewählten Punktes P oder (u, v) der Fläche die Gleichung:

$$\frac{1}{R} = \frac{L + 2Mk + Nk^2}{E + 2Fk + Gk^2}. \tag{1}$$

Dabei giebt $k = dv : du$ die Fortschreitungsrichtung an, die in dem gewählten Normalschnitte liegt. Wir haben in Satz 11, S. 118, gesehen, dass es zwei Werte k_1 und k_2 von k giebt, für die $1 : R$ ein Maximum oder Minimum erreicht. Es giebt aber auch zwei Werte $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ von k, für die $1 : R$ gleich Null ist. Es sind dies die Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$L + 2Mk + Nk^2 = 0, \tag{2}$$

von denen wir wissen (vgl. S. 116), dass sie nicht auch den Nenner rechts in (1) gleich Null machen. Die zugehörigen Normalschnitte haben nach I S. 33 in dem Punkte P Wendepunkte. Man nennt diese beiden Richtungen $(\varkappa_1)$ und $(\varkappa_2)$ die Haupttangentenrichtungen, die zugehörigen Tangenten der Fläche die Haupttangenten des Punktes P.[1] Nach I S. 226 folgt sofort:

Satz 17: Die Haupttangenten eines Flächenpunktes sind diejenigen Tangenten, die mit der Fläche eine Berührung von zweiter Ordnung eingehen.

Ist die Fläche und die Parameterdarstellung reell, so ist der Nenner rechts in (1), da er, mit du^2 multipliciert, das Quadrat des Bogenelementes bedeutet, stets positiv für reelle Fortschreitungsrichtungen (k). Die Krümmung eines Normalschnittes erfährt also beim Drehen der Normalschnittebene um die Normale des Punktes P nur da einen Zeichenwechsel, wo der Zähler rechts in (1) durch den Wert Null hindurchgeht, also dann, wenn die Normalschnittebene eine der beiden Haupttangenten von P enthält. Diese beiden Normalschnitte trennen also die Gesamtheit der Normalschnitte in diejenigen, deren Krümmungsmittelpunkte auf der positiven, und in diejenigen, deren Krümmungsmittelpunkte auf der negativen Seite der Tangentenebene liegen. Doch sind $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ nicht stets reell;

[1] Diese Geraden wurden zuerst untersucht von Dupin, „Développements de géométrie", Paris 1813.

es kann also ebensowohl vorkommen, dass alle Krümmungsmittelpunkte der Normalschnitte auf derselben Seite der Tangentenebene liegen. Ein Beispiel zeigt dies:

Beispiel: Auf der Rotationsfläche:

$$x = p(u)\cos v, \quad y = p(u)\sin v, \quad z = q(u),$$

bei der wir wieder die auf S. 121 getroffenen Voraussetzungen machen, lautet die Gleichung (2):

$$-\frac{p''}{q'} + p\,q'\,k^2 = 0$$

und giebt:

$$\left.\begin{matrix}\varkappa_1\\ \varkappa_2\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{\frac{p''}{p\,q'^2}}.$$

Es ist aber (vgl. S. 121)

$$p + \frac{q'^2}{p''}$$

die x-Coordinate des Krümmungsmittelpunktes $\mathfrak{K}$ des Meridians ($v = 0$). Da p die x-Coordinate des zugehörigen Punktes P dieses Meridians ist, so ist die obige Quadratwurzel reell, wenn der Krümmungsmittelpunkt $\mathfrak{K}$ auf der positiven Normale von P liegt, die, wie wir sahen, von P nach aussen gerichtet ist, sobald wir die z-Axe, Drehaxe, als im Innern der Fläche gelegen bezeichnen. Überall da also, wo die Meridiancurve nach innen convex ist, also in Fig. 39 in dem ganzen Streifen vom Kreise a bis zum Kreise b, sind $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ reell; da wo sie nach aussen convex ist, wie in den Streifen von b bis c, sind $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ imaginär. Die Breitenkreise der Wendepunkte der Meridiancurven teilen also die Gebiete, in denen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ reell oder imaginär sind, von einander.

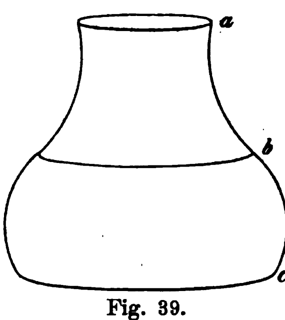


Fig. 39.

Hiernach sind in einem allgemeinen **reellen** Flächenpunkte P drei Fälle denkbar:

Erster Fall: $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sind imaginär, d. h. es ist

$$LN - M^2 > 0.$$

Alle reellen Normalschnitte von P sind also nach derselben Seite der Tangentenebene gekrümmt. Man sagt, die Fläche sei in P convex-convex. Die Haupttangenten von P sind imaginär. R_1 und R_2, die beiden Hauptkrümmungsradien, haben dasselbe Vorzeichen. (Siehe Fig. 40.)[1]

[1] In den drei Figuren 40, 41, 42 haben wir, um die Hauptkrümmungskreise als solche deutlicher zur Anschauung zu bringen, Flächen dargestellt, die mit ihren Hauptkrümmungskreisen ein endliches Stück gemein haben.

Zweiter Fall: $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ fallen zusammen, sind also reell. Hier ist:

$$LN - M^2 = 0.$$

Alle reellen Normalschnitte von P sind nach derselben Seite der Tangentenebene gekrümmt. Nur ein Normalschnitt hat die Krümmung Null, d. h. sein Krümmungskreis artet in die einzige vorhandene Haupttangente aus. Da diese Krümmung Null ein Minimum oder Maximum ist, so ist diese Haupttangente zugleich Tangente einer der beiden Hauptkrümmungsrichtungen. Von R_1 und R_2 ist also der eine Wert unendlich gross. (Siehe Fig. 41.)

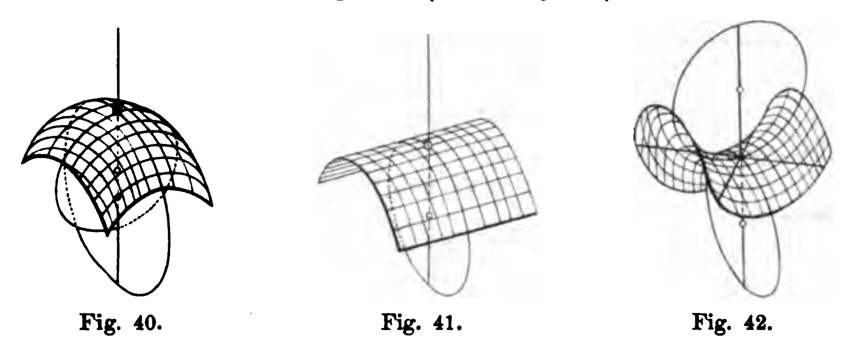


Fig. 40. Fig. 41. Fig. 42.

Dritter Fall: $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ sind reell verschieden, oder es ist:

$$LN - M^2 < 0.$$

Beide Haupttangenten sind reell verschieden. Ihre Normalschnitte teilen das Gebiet der nach der einen Seite gekrümmten Normalschnitte von dem Gebiet der nach der anderen Seite gekrümmten Normalschnitte. Man nennt dann die Fläche in P convex-concav. R_1 und R_2 haben verschiedene Vorzeichen. (Siehe Fig. 42.)

1. Beispiel: Von den reellen Flächen zweiter Ordnung sind, wie man sofort aus der bekannten Gestalt dieser Flächen sieht, das Ellipsoid, das elliptische Paraboloid und das zweischalige Hyperboloid überall convex-convex. Dagegen ist das hyperbolische Paraboloid und das einschalige Hyperboloid überall convex-concav. Der Kegel und der Cylinder zweiter Ordnung sind Flächen, auf denen überall der zweite Fall vorliegt.

2. Beispiel: Die gemeine Schraubenfläche (S. 119) und das Catenoid (S. 126) haben überall entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien. Sie sind mithin überall convex-concav.

3. Beispiel: Betrachten wir irgend eine geradlinige Fläche mit reellen Erzeugenden. Durch einen Punkt P auf ihr geht eine Erzeugende h. Die Normale von P steht auf h senkrecht, die Tangentenebene von P enthält h vgl. I S. 277). Die durch die Normale und h gehende Ebene schneidet die Fläche

in h selbst, d. h. in einer Curve von der Krümmung Null. Mithin ist in P eine der beiden Haupttangenten die Gerade h. Da sie reell ist, so kann nur der 2. oder 3. Fall vorliegen. Auf einer reellen geradlinigen Fläche sind also überall die Hauptkrümmungsradien von verschiedenen Vorzeichen oder einer von ihnen ist unendlich gross. Es giebt also keine convex-convexe geradlinige Fläche mit reellen Erzeugenden. Wir werden sehen, dass das Ellipsoid, das convex-convex ist, zwar als geradlinige Fläche aufgefasst werden kann, aber ihre Erzeugenden sind imaginär. (Siehe S. 144.)

Bei der Unterscheidung der Punkte mit reellen und der Punkte mit imaginären Haupttangenten giebt der Wert des Ausdrucks $LN - M^2$ den Ausschlag. Dieser Ausdruck lässt sich auch in anderer Weise schreiben; es ist nämlich nach (10), S. 106:

$$\begin{aligned} LN - M^2 &= (X_u x_u + Y_u y_u + Z_u z_u)(X_v x_v + Y_v y_v + Z_v z_v) - \\ &- (X_u x_v + Y_u y_v + Z_u z_v)(X_v x_u + Y_v y_u + Z_v z_u) \\ &= \mathbf{S}(Y_u Z_v - Z_u Y_v)(y_u z_v - z_u y_v), \end{aligned}$$

also nach XI (F):

$$LN - M^2 = D \cdot \mathbf{S}\, X(Y_u Z_v - Z_u Y_v),$$

daher:

$$(3) \qquad LN - M^2 = D \begin{vmatrix} X & X_u & X_v \\ Y & Y_u & Y_v \\ Z & Z_u & Z_v \end{vmatrix}.$$

Bei reellen Flächen und reeller Parameterdarstellung ist D nach S. 18 positiv. Die Entscheidung giebt also das Vorzeichen der Determinante. Wir sagen daher:

Satz 18: Eine Fläche, die keine Schar von Minimalgeraden enthält, hat in einem allgemein gewählten reellen Punkt (u, v) mit reellen Parametern zwei reell verschiedene oder zwei reell zusammenfallende oder zwei imaginäre Haupttangenten, je nachdem der Ausdruck $LN - M^2$ oder die Determinante

$$\begin{vmatrix} X & X_u & X_v \\ Y & Y_u & Y_v \\ Z & Z_u & Z_v \end{vmatrix}$$

für das betreffende Wertepaar kleiner als Null oder gleich Null oder grösser als Null ist. Dabei bedeuten L, M, N die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung und X, Y, Z die Richtungscosinus der Normale. Die Richtungen $(dv:du)$ der Haupttangenten werden durch die Bedingung

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$$

bestimmt.

Da $\mathbf{S}X^2 = 1$ und also

$$\mathbf{S}XX_u = 0, \quad \mathbf{S}XX_v = 0$$

ist, so kann die Determinante in (3) auch anders geschrieben werden. Multipliciert man nämlich ihre Zeilen mit X, Y, Z und nimmt ihre Summen als erste Zeile, so ist nur das erste Element dieser Zeile von Null verschieden, nämlich gleich Eins. Daher ist:

$$LN - M^2 = D \cdot \frac{Y_u Z_v - Z_u Y_v}{X}. \tag{4}$$

Hieran reihen sich noch zwei Formeln, die durch cyklische Vertauschung von X, Y, Z hervorgehen.

Es ist leicht, alle Flächen zu bestimmen, auf denen überall $LN - M^2 = 0$ ist. Vorweg heben wir dabei hervor: Wenn auf der Fläche überall $LN - M^2 = 0$ ist, so ist dies auch der Fall bei Einführung irgend eines anderen Parametersystems, weil die Gleichung $LN - M^2 = 0$ aussagt, dass die beiden Haupttangenten zusammenfallen, und weil diese geometrische Bedeutung von der Wahl des Parametersystems unabhängig ist. Ist nun auf der Fläche überall $LN - M^2 = 0$, so folgt aus (4) und aus den beiden analogen Formeln:

$$X_u : Y_u : Z_u = X_v : Y_v : Z_v,$$

also, wenn ϱ eine gewisse Function von u und v bedeutet:

$$X_u = \varrho X_v, \quad Y_u = \varrho Y_v, \quad Z_u = \varrho Z_v. \tag{5}$$

Da nun:

$$dX = X_u du + X_v dv = X_v(\varrho\, du + dv)$$

und entsprechend

$$dY = Y_v(\varrho\, du + dv), \quad dZ = Z_v(\varrho\, du + dv)$$

ist, so bleiben X, Y, Z ungeändert, wenn der Punkt (u, v) auf der Fläche eine Curve beschreibt, längs deren

$$\varrho\, du + dv = 0$$

oder also:

$$\frac{dv}{du} = -\varrho(u, v)$$

ist. Diese Differentialgleichung erster Ordnung in u und v definiert nach Satz 4, S. 12, eine Schar von ∞^1 Curven auf der Fläche. Wir dürfen annehmen, dass wir gerade diese Curven von vornherein als die Parameterlinien (v) gewählt hätten. Dies kommt darauf hinaus, dass wir die Differentialgleichung in der Form $dv = 0$ an-

nehmen dürfen. Dann aber ist $\varrho = 0$, also sind dann X, Y, Z nach (5) frei von u. Aus der ersten Formel XI (I) folgt nun, dass $\mathbf{S}\,Xx$ auch von u frei ist. Es sei etwa:

$$\mathbf{S}\,Xx = V(v). \tag{6}$$

Differenzieren wir diese Formel nach v, so giebt die zweite Gleichung XI (I):

$$\mathbf{S}\,X_v x = V'(v). \tag{7}$$

Da X, Y, Z und V nur von v, nicht von u, abhängen, so stellt die Gleichung

$$\mathbf{S}\,X\mathfrak{x} = V(v)$$

in den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ für jeden Wert von v eine Ebene dar. Diese Ebene schneidet die unendlich benachbarte, zu $v + dv$ gehörige Ebene in der Geraden, die ausserdem der Gleichung

$$\mathbf{S}\,X_v\mathfrak{x} = V'(v)$$

genügt. Da die Gleichungen (6) und (7), in denen x, y, z die Punktcoordinaten der Fläche sind, genau die Form dieser beiden Gleichungen haben, so folgt nach Satz 14, I S. 292, dass die Fläche von den ∞^1 Ebenen

$$\mathbf{S}\,X\mathfrak{x} = V(v) \qquad (v = \text{Const.})$$

umhüllt wird und also abwickelbar ist.

Umgekehrt: Liegt eine abwickelbare Fläche vor, so können wir ihre Gleichungen nach I S. 261 so schreiben:

$$x = \varphi(v) + u\varphi'(v), \quad y = \chi(v) + u\chi'(v), \quad z = \psi(v) + u\psi'(v). \tag{8}$$

Durch Ausrechnung erkennt man, dass hier $L = M = 0$, also $LN - M^2 = 0$ ist. Nach einer oben gemachten Bemerkung gilt diese Gleichung $LN - M^2 = 0$ auch bei jeder anderen Parameterdarstellung der Fläche (8). Also:

Satz 19: Die abwickelbaren Flächen sind die einzigen Flächen, auf denen überall der aus den Fundamentalgrössen zweiter Ordnung gebildete Ausdruck

$$LN - M^2 = 0$$

ist.

Oder auch:

Satz 20: Die abwickelbaren Flächen sind die einzigen Flächen, auf denen überall die beiden Haupttangenten zusammenfallen, — und zwar fallen sie in die geradlinigen Erzeugenden der Fläche.

§ 5. Die Indicatrix eines Flächenpunktes.

Sind E, F, G und L, M, N die Fundamentalgrössen einer auf die Parameter u und v bezogenen Fläche, die keine Schar von Minimalgeraden enthält, so gilt für den Krümmungsradius R eines allgemeinen Normalschnittes der Stelle P oder (u, v) die Formel:

$$\frac{1}{R} = \frac{L + 2Mk + Nk^2}{E + 2Fk + Gk^2},$$

in der $k = dv : du$ die Richtung des Schnittes angiebt. (Vgl. S. 109.)

Um hieraus eine geometrische Construction der Krümmungskreise abzuleiten, benutzen wir ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$, dessen wir uns überhaupt öfters bedienen werden, wenn es sich um Untersuchungen in der Nähe eines bestimmt gewählten Flächenpunktes handelt.

Der Punkt P oder (u, v) sei der neue Anfangspunkt, die $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Axe seien die Tangenten der beiden Hauptkrümmungsschnitte des Punktes P, die ja nach S. 117 auf einander senkrecht stehen und im reellen Fall auch reell sind. Die $\mathfrak{z}$-Axe soll dann auch ihrem Sinn nach mit der Normalen des Punktes P zusammenfallen. In dem neuen Coordinatensystem wollen wir die Coordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ selbst als Parameter, statt u und v, benutzen. Die Fläche denken wir uns also analytisch in der Form dargestellt:

$$\mathfrak{z} = f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}).$$

Wir nennen das neue rechtwinklige Axenkreuz kurz das begleitende Axenkreuz des Flächenpunktes P.

Die der neuen Darstellung zugehörigen Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung seien mit $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ bezeichnet, sodass wir haben:

$$\frac{1}{R} = \frac{\mathfrak{L} + 2\mathfrak{M}\mathfrak{k} + \mathfrak{N}\mathfrak{k}^2}{\mathfrak{E} + 2\mathfrak{F}\mathfrak{k} + \mathfrak{G}\mathfrak{k}^2},$$

wobei nun

$$\mathfrak{k} = d\mathfrak{y} : d\mathfrak{x}$$

ist. Da die Parameterlinie $(\mathfrak{y} = 0)$ im neuen Anfangspunkt P die $\mathfrak{x}$-Axe und die Parameterlinie $(\mathfrak{x} = 0)$ dort die $\mathfrak{y}$-Axe berührt, so ist für den Anfangspunkt P:

$$(1) \qquad \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}}\right)_0 = 0.$$

Der Index 0 soll daran erinnern, dass sich diese Gleichungen nur auf den Punkt P beziehen. Nach XI (A) und XI (C) ist für diesen Punkt:

$$(2) \qquad \mathfrak{E}_0 = 1, \quad \mathfrak{F}_0 = 0, \quad \mathfrak{G}_0 = 1, \quad \mathfrak{D}_0 = 1.$$

Da ferner $d\mathfrak{y} = 0$ und $d\mathfrak{x} = 0$ oder also $\mathfrak{k} = 0$ und $\mathfrak{k} = \infty$ die Hauptkrümmungsrichtungen von P liefern, so muss die quadratische Gleichung für $\mathfrak{k}$, die — nur mit lateinischen statt deutschen Buchstaben — in Satz 11, S. 119, angegeben wurde, für den Punkt P die Form $\mathfrak{k} = 0$ haben. Also ist jetzt auch für den Punkt P:

$$(3) \qquad \mathfrak{M}_0 = 0$$

oder nach (9), S. 106:

$$(4) \qquad \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}\, \partial \mathfrak{y}}\right)_0 = 0.$$

Nunmehr kommt:

$$\frac{1}{R} = \frac{\mathfrak{L}_0 + \mathfrak{N}_0 \mathfrak{k}^2}{1 + \mathfrak{k}^2}.$$

Für $\mathfrak{k} = 0$ und $\mathfrak{k} = \infty$ ergeben sich die beiden Hauptkrümmungen:

$$(5) \qquad \frac{1}{R_1} = \mathfrak{L}_0, \quad \frac{1}{R_2} = \mathfrak{N}_0,$$

sodass nach (9), S. 106, für den Punkt P:

$$(6) \qquad \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}^2}\right)_0 = \frac{1}{R_1}, \quad \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}^2}\right)_0 = \frac{1}{R_2}$$

ist. Ferner sei φ der Winkel der Richtung ($\mathfrak{k}$) mit der Richtung der $\mathfrak{x}$-Axe ($\mathfrak{k} = 0$), also:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = \mathfrak{k}.$$

Die Formel für $1 : R$ kann nun so geschrieben werden:

$$(7) \qquad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2}.$$

Da wir für jeden Flächenpunkt P diese Betrachtung anstellen können, indem wir immer das zugehörige begleitende Axenkreuz benutzen, so folgt:

Satz 21: Sind R_1 und R_2 die Abscissen der Mittelpunkte der beiden Hauptkrümmungskreise eines Flächenpunktes, gemessen vom Flächenpunkte an auf seiner Normalen, so haben die Krümmungsmittelpunkte derjenigen Normalschnitte, die mit dem ersten Hauptkrümmungsschnitt die

Winkel $\pm\varphi$ bilden, eine Abscisse R, die sich aus der Formel

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}$$

bestimmt.[1].

Geben wir φ den Wert $\varphi + \frac{\pi}{2}$, so erkennen wir hieraus sofort:

Satz 22: Die Summe der Krümmungen zweier zu einander senkrechter Normalschnitte ist gleich der Summe der Hauptkrümmungen der betreffenden Stelle.

Da die Formel (7) nur die Quadrate des Sinus und Cosinus von φ enthält, so kommt es auf den Sinn der Messung des Winkels φ gar nicht an.

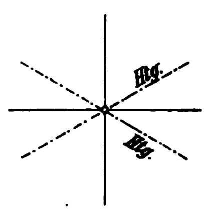


Fig. 43.

Die Haupttangenten sind durch die Eigenschaft $1 : R = 0$ charakterisiert (nach S. 127), sodass ihre Winkel α mit der ersten Hauptkrümmungsrichtung nach (7) durch:

$$\frac{\cos^2\alpha}{R_1} + \frac{\sin^2\alpha}{R_2} = 0$$

oder:

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{-\frac{R_2}{R_1}} \tag{8}$$

bestimmt werden. Also (siehe Fig. 43)

Satz 23: Die Hauptkrümmungsrichtungen eines Flächenpunktes halbieren die Winkel seiner Haupttangenten.

Ferner:

Satz 24: Der Winkel der Haupttangenten eines Flächenpunktes hängt nur von den Werten der Hauptkrümmungen des Punktes ab.

Sind R_1 und R_2 beide positiv, so gilt dasselbe nach (7) von jedem Krümmungsradius R des Punktes P, der dann convexconvex ist (nach S. 128). Tragen wir auf der Tangente von P, die mit der $\mathfrak{x}$-Axe den Winkel φ bildet, von P aus nach beiden Seiten den Wert der Quadratwurzel des zugehörigen Krümmungsradius R auf, so bilden die Endpunkte, die man so für beliebige Werte von φ erhält, eine Ellipse, denn sie haben die Coordinaten:

$$\mathfrak{x} = \pm\sqrt{R}\cos\varphi, \quad \mathfrak{y} = \pm\sqrt{R}\sin\varphi,$$

[1] Dieser Satz heisst der Euler'sche Satz. Siehe die Anmerkung auf S. 118.

die nach (7) die Gleichung erfüllen:

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2} = 1.$$

$\sqrt{R_1}$ und $\sqrt{R_2}$ sind die auf der $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Axe gelegenen Halbaxen der Ellipse. (Siehe Fig. 44.)

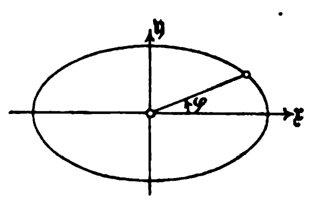


Fig. 44.

Sind R_1 und R_2 beide negativ, so gilt dasselbe nach (7) von jedem Krümmungsradius R des Punktes P. Die Stelle ist wieder convex-convex. Wir tragen auf allen Tangenten von P aus nunmehr $\sqrt{-R}$ ab und erhalten die Ellipse:

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{-R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{-R_2} = 1.$$

In beiden betrachteten Fällen hat P nach (8) imaginäre Haupttangenten, und zwar sind die Haupttangenten offenbar die imaginären Asymptoten der betreffenden Ellipse.

Ist R_1 positiv und R_2 negativ, so sind die Haupttangenten nach (8) reell. Es sei α der positive spitze Winkel, für den dann

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = -\frac{R_2}{R_1}$$

ist. Nun ist nach (7) der Wert R positiv, solange φ zwischen $+\alpha$ und $-\alpha$ liegt, sonst negativ. (Vgl. S. 129.) Die Fläche ist an der Stelle P convex-concav. Tragen wir wieder auf allen Tangenten den zugehörigen Wert der Quadratwurzel von R bez. $-R$ ab, je nachdem R positiv oder negativ ist, so erfüllen die Endpunkte entweder die Gleichung:

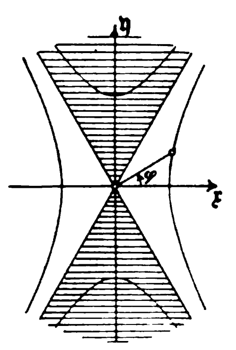


Fig. 45.

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} - \frac{\mathfrak{y}^2}{-R_2} = 1 \qquad (\text{für } R > 0)$$

oder die Gleichung

$$-\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{-R_2} = 1 \qquad (\text{für } R < 0).$$

Es sind dies die Gleichungen zweier conjugierter Hyperbeln, die die beiden Haupttangenten zu Asymptoten haben. (Siehe Fig. 45.)

Ist R_1 negativ und R_2 positiv, so werden die Haupttangenten ebenso construiert. Im übrigen gilt über das Vorzeichen

von R gerade das Entgegengesetzte wie vorher. Es gehen die beiden conjugierten Hyperbeln hervor:

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{-R_1} - \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2} = 1 \qquad (\text{für } R < 0)$$

und:

$$-\frac{\mathfrak{x}^2}{-R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2} = 1 \qquad (\text{für } R > 0),$$

die wieder die Haupttangenten zu Asymptoten haben.

Ist endlich einer der beiden Hauptkrümmungsradien unendlich gross, so erhalten wir statt der Ellipse oder des Hyperbelpaares ein Paar paralleler Geraden. Ist nämlich etwa $R_1 = \infty$ und R_2 positiv, so reduciert sich (7) auf:

$$\frac{1}{R} = \frac{\sin^2 \varphi}{R_2},$$

d. h.: R ist überall positiv. Tragen wir $\sqrt{R}$ auf der zugehörigen Tangente ab, so liegt der Endpunkt auf einer der beiden Geraden (siehe Fig. 46)

$$\mathfrak{y} = \pm \sqrt{R_2}.$$

Ist $R_1 = \infty$ und R_2 negativ, so ist R überall negativ und das Abtragen von $\sqrt{-R}$ auf die Tangenten giebt die beiden Geraden $\mathfrak{y} = \pm \sqrt{-R_2}$. Ist R_1 positiv und $R_2 = \infty$, so treten die beiden Geraden

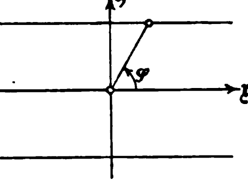


Fig. 46.

$$\mathfrak{x} = \pm \sqrt{R_1}$$

auf, ebenso wenn R_1 negativ und $R_2 = \infty$ ist, die beiden Geraden $\mathfrak{x} = \pm \sqrt{-R_1}$. Überhaupt fallen bei den vier letzten Annahmen, d. h. wenn einer der Hauptkrümmungsradien unendlich gross ist, die beiden Haupttangenten in diejenige Tangente durch P zusammen, die den beiden erwähnten Geraden parallel ist.

Die beiden durch den Flächenpunkt P gehenden Minimalcurven der Fläche (vgl. Satz 16, S. 36) haben dort Richtungen, die nach (2) durch

$$d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2 = 0$$

bestimmt werden, also die Richtungen:

$$\frac{d\mathfrak{y}}{d\mathfrak{x}} = \pm i.$$

Doch gilt dies nur an der Stelle P selbst. Daraus folgt:

Satz 25: Die beiden durch einen Flächenpunkt gehenden Minimalcurven der Fläche haben daselbst Tangenten, die symmetrisch zu den Hauptkrümmungstangenten des Punktes liegen. —

Die Kegelschnitte, die wir benutzt haben, sind nicht nur Hülfsmittel zur Construction der Krümmungsradien, sondern treten auch direct auf, allerdings unendlich verkleinert, sobald man die Frage beantwortet, wie eine Ebene, die einer Tangentenebene der Fläche unendlich benachbart ist, die Fläche schneidet.

Da wir wie bisher den betrachteten Flächenpunkt P als Anfangspunkt eines Coordinatensystems ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$) benutzen können, so können wir diese Frage analytisch so behandeln: Zur Tangentenebene von P, d. i. zur $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}$-Ebene, legen wir eine parallele Ebene im unendlich kleinen Abstand $\mathfrak{z}$. Sie schneidet die Fläche in einer Curve, und wir untersuchen, wie der Verlauf dieser Curve unendlich nahe bei P ist. Wir fassen also nur unendlich kleine Coordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ ins Auge. Da für hinreichend kleine Werte von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Reihenentwickelung gilt:

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{1}\left[\left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}}\right)_0 \mathfrak{x} + \left(\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}}\right)_0 \mathfrak{y}\right] + \\ + \frac{1}{1\,.\,2}\left[\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}^2}\right)_0 \mathfrak{x}^2 + 2\left(\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}\,\partial \mathfrak{y}}\right)_0 \mathfrak{x}\,\mathfrak{y} + \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{y}^2}\right)_0 \mathfrak{y}^2\right] + \cdots,$$

so können wir hierfür nach (1), (4) und (6) schreiben:

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2}\right) + \cdots \tag{9}$$

Dies also ist, bei festem unendlich kleinen $\mathfrak{z}$, in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Gleichung der zu untersuchenden Curve.

Ist weder $1 : R_1$ noch $1 : R_2$ gleich Null, so sind, sobald $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ unendlich klein gewählt werden, also nur die Umgebung der Stelle P betrachtet wird, die nur angedeuteten Glieder von höherer Ordnung unendlich klein als die angegebenen, sodass bleibt:

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_1} = 2\mathfrak{z}. \tag{10}$$

Diese Gleichung stellt einen Kegelschnitt mit unendlich kleinen Axen dar, der zu den oben betrachteten Kegelschnitten

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2} = \pm 1$$

ähnlich, ähnlich gelegen und concentrisch ist. Es hat sich also ergeben:

Satz 26: Schneidet man eine Fläche durch eine Ebene, die der Tangentenebene eines Flächenpunktes P mit den Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 unendlich nah und parallel ist, so ist die Schnittcurve in der unendlich kleinen Umgebung der Stelle P durch einen Kegelschnitt ersetzbar, dessen Gleichung in laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ lautet:

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2} = 2\mathfrak{z}.$$

Vorausgesetzt ist dabei, dass weder R_1 noch R_2 unendlich gross sei. Ferner ist dabei $\mathfrak{z}$ der auf der Normale von P mit entsprechendem Vorzeichen zu messende unendlich kleine Abstand der Schnittebene von der Tangentenebene, und das Coordinatensystem ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$) hat die Projectionen der Hauptkrümmungstangenten von P auf die Schnittebene zu

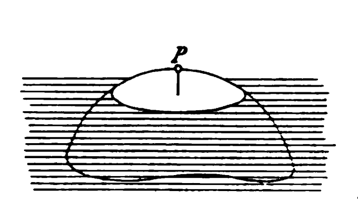


Fig. 47.

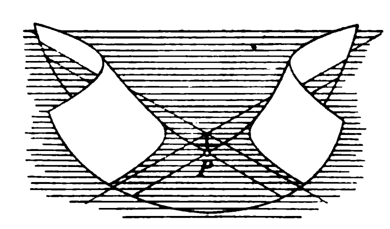


Fig. 48.

Axen. (Siehe Fig. 47 für den Fall, dass $R_1 R_2 > 0$, ist und Fig. 48 für den Fall, dass $R_1 R_2 < 0$ ist).

Obgleich die Schnittcurve nur in unendlicher Nähe von P durch den Kegelschnitt ersetzt werden darf, braucht man doch häufig die unexacte Redeweise: Die der Tangentenebene unendlich benachbarte Ebene schneide die Fläche in jenem Kegelschnitt (10), und auch wir werden uns der Kürze halber dieser Redeweise bedienen. Der Kegelschnitt (10) heisst die **Indicatrix des Punktes** P **der Fläche**.[1]

Liegt ein reeller convex-convexer Punkt vor, d. h. haben R_1 und R_2 einerlei Vorzeichen, so ist die Curve (10) eine unendlich kleine reelle Ellipse, wenn $\mathfrak{z}$ dasselbe Vorzeichen wie R_1 und R_2 hat, dagegen imaginär, wenn $\mathfrak{z}$ das andere Vorzeichen hat. Von den zur Tangentenebene unendlich benachbarten parallelen Ebenen

---

[1] Nach Dupin, von dem diese Theorie überhaupt herrührt. Man vergleiche die Anmerkungen auf S. 99 und S. 127.

schneiden also nur die auf der einen Seite gelegenen die Fläche in einer reellen Ellipse. Convex-convexe Punkte der Fläche heissen auch elliptische Punkte der Fläche. Ist der Punkt insbesondere ein Nabelpunkt (vgl. S. 119, 120), d. h. $R_1 = R_2$, so ist die Indicatrix ein Kreis.

Liegt eine reelle convex-concave Stelle P vor, d. h. haben R_1 und R_2 verschiedene Vorzeichen, so ist die Curve (10) eine Hyperbel, wenn $\mathfrak{z}$ positiv ist, und die conjugierte Hyperbel, wenn $\mathfrak{z}$ durch $-\mathfrak{z}$ ersetzt wird. Diejenigen Ebenen parallel der Tangentenebene also, die auf der einen Seite unendlich nahe liegen, schneiden die Fläche in einer Curve, die unendlich nahe bei P wie eine Hyperbel verläuft, deren Hauptaxe in der einen Hauptkrümmungsebene liegt. Wird die Ebene jedoch auf der anderen Seite der Tangentenebene angenommen, so tritt an die Stelle dieser Hyperbel eine Hyperbel, deren Hauptaxe in der anderen Hauptkrümmungsebene von P liegt. Convex-concave Punkte der Fläche heissen auch hyperbolische Punkte der Fläche.

Wird $\mathfrak{z} = 0$ gesetzt, so geht aus (10) die Gleichung

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2} = 0$$

eines Geradenpaares hervor, das imaginär ist, wenn R_1 und R_2 dasselbe Zeichen haben. Nach (8) sind diese Geraden die Haupttangenten des Punktes P. Wir können also sagen, indem wir auf I S. 74 verweisen:

Satz 27: Für die Schnittcurve einer reellen Fläche mit der Tangentenebene eines ihrer Punkte P ist dieser Punkt singulär und zwar ein isolierter Punkt, wenn die Fläche in P convex-convex ist, dagegen ein Doppelpunkt, wenn sie in P convex-concav ist. Die imaginären bez. reellen Tangenten der Schnittcurve in P sind die Haupttangenten von P.

Die Projectionen dieser Haupttangenten auf die zur Tangentenebene parallelen unendlich benachbarten Ebenen sind die imaginären bez. reellen Asymptoten der oben erwähnten Ellipsen bez. Hyperbeln. Die Haupttangenten nennt man deshalb auch zuweilen die Asymptoten von P.

Den Übergang von den convex-convexen oder elliptischen Stellen zu den convex-concaven oder hyperbolischen Stellen bilden diejenigen Punkte, in denen R_1 oder R_2 unendlich gross ist. Man nennt sie parabolische Punkte der Fläche. Ist z. B. $1 : R_1 = 0$, so ist

der Schluss von (9) auf (10) nicht mehr richtig. Dann schliessen wir vielmehr wie in I S. 75, dass die Schnittcurve der zur Tangentenebene parallelen Ebene $\mathfrak{z} = \text{Const.}$ in unendlicher Nähe von P im allgemeinen durch die Curve

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{2R_2}\mathfrak{y}^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}^3}\right)_0 \mathfrak{x}^3$$

ersetzt werden darf. In der Ebene ($\mathfrak{z}$) bilden dabei die Geraden, in denen sie die $\mathfrak{x}\mathfrak{z}$- bez. $\mathfrak{y}\mathfrak{z}$-Ebene schneidet, die $\mathfrak{x}$- bez. $\mathfrak{y}$-Axe für die analytische Darstellung dieser ebenen Curve dritter Ordnung, während $\mathfrak{z}$ die Rolle einer bestimmten unendlich kleinen Grösse spielt. Man sieht, dass die Ordnungen, in denen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in der Nähe von P unendlich klein sind, die 2. und 3. sein müssen, d. h. die Curve schmiegt sich der $\mathfrak{x}$-Axe in unendlicher Nähe des Anfangspunktes an. Da aus

$$\mathfrak{y} = \pm\sqrt{2R_2}\sqrt{\mathfrak{z} - \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{x}^3}\right)_0 \mathfrak{x}^3}$$

folgt, dass $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial \mathfrak{x}}$ und $\frac{\partial^2 \mathfrak{y}}{\partial \mathfrak{x}^2}$ für $\mathfrak{x} = 0$ auch gleich Null sind, so sind die Curvenpunkte mit den Coordinaten:

$$\mathfrak{x} = 0, \quad \mathfrak{y} = \pm\sqrt{2R_2\mathfrak{z}}$$

Wendepunkte (nach I S. 14), deren Tangenten der $\mathfrak{x}$-Axe parallel sind. Bei dem parabolischen Punkte P tritt also an die Stelle jener unendlich kleinen Ellipsen bez. Hyperbeln in unendlicher Nähe von P ein Paar paralleler Geraden:

$$\mathfrak{y} = \pm\sqrt{2R_2\mathfrak{z}},$$

die reell sind, wenn R_2 und $\mathfrak{z}$ dasselbe Zeichen haben. Da zwei parallele Geraden als eine ausgeartete Parabel aufzufassen sind, so ist der Name: parabolischer Punkt gerechtfertigt.

Im Fall eines parabolischen Punktes werden wir das gefundene Geradenpaar als die Indicatrix bezeichnen und nicht die Curve dritter Ordnung.

Es dürfte nicht unnütz sein, für die Indicatrix auch bei Benutzung eines beliebigen Axenkreuzes (x, y, z) und beliebiger Parameter eine analytische Darstellung zu geben: Die Tangentenebene des Punktes (u, v) hat die Gleichung:

$$X(\mathfrak{x} - x) + Y(\mathfrak{y} - y) + Z(\mathfrak{z} - z) = 0,$$

wenn $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ ihre laufenden Coordinaten sind. Die Parallelebene im Abstand ε hat die Gleichung:

$$\mathbf{S}\, X(\mathfrak{x} - x) = \varepsilon, \tag{11}$$

denn sie wird durch

$$\mathfrak{x} = x + X\varepsilon, \quad \mathfrak{y} = y + Y\varepsilon, \quad \mathfrak{z} = z + Z\varepsilon$$

wegen $\mathbf{S}\, X^2 = 1$ erfüllt. Soll nun der Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ in der Schnittcurve der Parallelebene mit der Fläche liegen und dem Punkte (x, y, z) oder (u, v) unendlich benachbart sein, so muss er Parameter haben, die von u und v unendlich wenig abweichen, sodass wir setzen können:

$$\mathfrak{x} = x + x_u du + x_v dv + \tfrac{1}{2}(x_{uu} du^2 + 2 x_{uv} du\, dv + x_{vv} dv^2) + \dots$$

u. s. w. Setzen wir diese Werte in (11) ein, so kommt wegen XI (I):

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{S}\, X x_{uu} du^2 + 2\, \mathbf{S}\, X x_{uv} du\, dv + \mathbf{S}\, X x_{vv} dv) + \dots = \varepsilon$$

oder nach (7), S. 106:

$$L du^2 + 2M du\, dv + N dv^2 + \dots = 2\varepsilon.$$

Berücksichtigen wir nur die Glieder niedrigster Ordnung, so finden wir:

Satz 28: Diejenigen einem Punkte (u, v) einer Fläche unendlich benachbarten Punkte $(u + du,\ v + dv)$, die in einer zur Tangentenebene des Punktes (u, v) unendlich benachbarten und parallelen Ebene liegen, sind an die Gleichung gebunden:

$$L du^2 + 2M du\, dv + N dv^2 = 2\varepsilon.$$

Darin bedeutet ε den auf der Normalen des Punktes (u, v) mit Vorzeichen gemessenen Abstand der Parallelebene von der Tangentenebene.

Die Formel dieses Satzes stellt also analytisch die Indicatrix des Punktes (u, v) dar und zwar nach der oben getroffenen Festsetzung auch für den Fall eines parabolischen Punktes.

Im Anschluss hieran soll ein zweites analoges Problem ganz kurz erledigt werden:

Wir wählen auf der Normalen des Punktes (u, v) einen unendlich benachbarten Punkt, dessen Coordinaten also etwa sind:

$$x + X\eta, \quad y + Y\eta, \quad z + Z\eta,$$

wenn η eine unendlich kleine Grösse bedeutet, und wollen diejenigen Tangentenebenen der Fläche construieren, die durch diesen Punkt gehen. Sie werden einen Kegel umhüllen, der die Fläche längs einer dem Punkte (u, v) unendlich benachbarten Curve berührt. Ist $(u + du,\ v + dv)$ ein solcher Berührungspunkt, so muss seine Tangentenebene durch den gewählten Punkt gehen. Aber die Normale

des Punktes $(u + du,\ v + dv)$ hat die Richtungscosinus, die aus X, Y, Z hervorgehen, wenn darin $u + du$ und $v + dv$ statt u und v geschrieben wird, d. h. die Tangentenebene dieses Punktes $(u + du,\ v + dv)$ hat in den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Gleichung:

$$\mathbf{S}(X + X_u du + X_v dv)(\mathfrak{x} - x - x_u du - x_v dv) = 0\,.$$

Setzen wir hierin die Coordinaten $x + X\eta,\ y + Y\eta,\ z + Z\eta$ des angenommenen Punktes für $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ ein, so geht die Bedingung hervor:

$$\mathbf{S}(X + X_u du + X_v dv)\,(X\eta - x_u du - x_v dv) = 0\,.$$

Hierfür kann nach XI (H), XI (I) und (10), S. 106, geschrieben werden:

$$\eta + L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0\,.$$

Daher:

Satz 29: Legt man durch einen Punkt, der auf der Normalen des Flächenpunktes (u, v) liegt und von diesem den mit Vorzeichen gemessenen unendlich kleinen Abstand η hat, alle diejenigen Ebenen, die die Fläche unendlich nah beim Punkte (u, v) berühren, so besteht die Berührungscurve aus den an die Gleichung:

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = -\eta$$

gebundenen Punkten $(u + du,\ v + dv)$.

Also kommt nach Satz 28:

Satz 30: Die Ebenen, die eine Fläche längs der Indicatrix eines Flächenpunktes P berühren, bilden einen Kegel, dessen Spitze so liegt, dass der Punkt P selbst die Strecke von der Spitze bis zur Indicatrixmitte im Verhältnis 2 : 1 teilt.

Anhangsweise erwähnen wir noch, dass aus dem Satze 27 folgt, dass jede Fläche zweiter Ordnung zwei Scharen von Geraden enthält. Denn jede Ebene, also auch jede Tangentenebene schneidet eine Fläche zweiter Ordnung in einem Kegelschnitt. Da er nach dem Satze 27 im Berührungspunkt einen Doppelpunkt haben muss, zerfällt er in zwei Geraden. Durch jeden Punkt der Fläche gehen demnach zwei Geraden, die der Fläche angehören. Nur wenn der Punkt parabolisch ist, fallen die beiden Geraden zusammen. Wenn dies überall auf der Fläche der Fall ist, so ist die Fläche nach Satz 20, S. 132, abwickelbar. Aber eine abwickelbare Fläche wird — wenn sie kein Kegel oder Cylinder ist — von jeder Normalen-

ebene ihrer Gratlinie nach Satz 3, I S. 268, in einer Curve mit Spitze geschnitten. Da die Fläche von zweiter Ordnung sein soll, so geht dies nur so an, dass diese Schnittcurve eine doppelt zählende Gerade ist, die Fläche also die der Tangenten einer ebenen Curve und daher selbst eine Ebene ist. Die Ebene ist aber nur, wenn sie doppelt aufgefasst wird, von zweiter Ordnung. Alle anderen abwickelbaren Flächen zweiter Ordnung sind mithin Kegel oder Cylinder.

Umgekehrt: Wenn eine Fläche zwei Scharen von Geraden enthält, so beweist man in der analytischen Geometrie, dass sie von zweiter Ordnung ist, indem man nämlich drei Gerade der einen Schar beliebig annimmt und alle Geraden bestimmt, die diese drei treffen. Mithin:

Satz 31: Die nicht abwickelbaren Flächen zweiter Ordnung sind die einzigen Flächen mit zwei verschiedenen Scharen von je ∞^1 Geraden.

Auf dem einschaligen Hyperboloid und dem hyperbolischen Paraboloid sind die beiden Scharen reell, auf dem zweischaligen Hyperboloid, dem elliptischen Paraboloid und dem Ellipsoid imaginär. Zum Ellipsoid gehört die Kugel, von der wir schon wissen, dass sie zwei Scharen von Minimalgeraden enthält (vgl. Satz 26, S. 64).

§ 6. Veranschaulichung der Krümmungen in einem Flächenpunkte.

Will man sich von den Krümmungsverhältnissen in einem Flächenpunkte eine Vorstellung machen, so kann man noch verschiedene andere Wege einschlagen. Einige Arten der Verdeutlichung seien hier erwähnt:

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen legen es uns nahe, die Fläche in der Umgebung des Punktes P durch ein Paraboloid zu ersetzen, dessen Scheitel in P liegt und das in P dieselbe Indicatrix wie die Fläche hat. Wenn wir nämlich das begleitende Axenkreuz ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$) des Punktes P wie dort benutzen, sodass die Indicatrix, die in einer der Tangentenebene unendlich benachbarten Ebene $\mathfrak{z} = \text{Const.}$ liegt, die Gleichung (vgl. Satz 26, S. 139):

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2} = 2\,\mathfrak{z} \tag{1}$$

hat, so brauchen wir nur die Beschränkung, dass $\mathfrak{z}$ unendlich klein sein soll, aufzuheben, um in (1) die Gleichung des Paraboloids vor uns zu haben. Berücksichtigen wir den Satz 1, S. 105, so folgt:

Satz 32: Sind R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien eines Flächenpunktes P und construiert man das Paraboloïd mit der Gleichung:

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2} = 2\mathfrak{z},$$

das auf dasjenige Coordinatensystem bezogen ist, dessen $\mathfrak{x}$- und $\mathfrak{y}$-Axe mit den Hauptkrümmungstangenten von P zusamenfallen, während die $\mathfrak{z}$-Axe die positive Normale von P ist, so besteht zwischen der Fläche und dem sie mit seinem Scheitel in P berührenden Paraboloid folgende Beziehung: Wird in P irgend eine Tangente an die Fläche und durch diese Tangente irgend eine Ebene gelegt und construiert man auf der Fläche und auf dem Paraboloid je eine Curve, die durch P geht, dort jene Tangente und die Ebene zur Schmiegungsebene hat, so haben beide Curven in P auch denselben Krümmungskreis, anders ausgesprochen: Sie berühren einander in zweiter Ordnung.

Man vergleiche hierzu Satz 16, I S. 190, und Satz 15, I S. 28. Mit Rücksicht auf die Bemerkung in I S. 171 oben nennen wir dies Paraboloid das osculierende Paraboloid des Flächenpunktes P.[1] (Vgl. auch S. 203.)

Der Satz 32 kann weniger exact, aber kürzer so ausgesprochen werden:

Satz 33: In Hinsicht auf die Krümmung der Flächencurven in einem Punkte P kann man die Fläche durch ein gewisses Paraboloid ersetzen, das die Fläche mit seinem Scheitel in P berührt.

Oder auch:

Satz 34: Hinsichtlich der Krümmung der Flächencurven hat der Scheitel eines allgemeinen Paraboloids den Charakter eines allgemeinen Flächenpunktes.

Ist P elliptisch oder hyperbolisch, so gilt dasselbe von dem osculierenden Paraboloid. Ist insbesondere P ein Nabelpunkt (S. 119), so ergiebt sich ein Rotationsparaboloid. Ist P parabolisch, z. B. $1 : R_2 = 0$, so artet das Paraboloid in einen parabolischen Cylinder

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} = 2\mathfrak{z}$$

aus.

[1] Dies osculierende Paraboloid kommt schon bei Euler in seinen erwähnten „Recherches“ vor. Siehe die Anmerkung zu S. 118.

Eine andere Art der Veranschaulichung besteht darin, dass man die von den Krümmungskreisen der Normalschnitte des Flächenpunktes P gebildete Fläche construiert. Ihre Gleichungen sind leicht aufzustellen, denn in der Normalschnittebene, die mit der ersten Hauptkrümmungstangente den Winkel φ bildet, liegt der Krümmungskreis mit dem Radius R, der nach (7), S. 134, durch

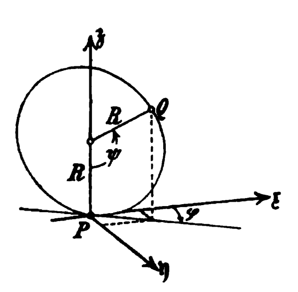


Fig. 49.

$$(2) \qquad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}$$

bestimmt wird. (Siehe Fig. 49.) Ist ψ der Winkel, den der Radius eines Punktes Q dieses Kreises mit dem Radius des Punktes P bildet, so hat Q die Coordinaten:

$$\mathfrak{x} = R\sin\psi\cos\varphi, \quad \mathfrak{y} = R\sin\psi\sin\varphi, \quad \mathfrak{z} = R(1-\cos\psi).$$

Hierin ist der Wert

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi}$$

einzusetzen. Also sind, geschrieben mittels der beiden Parameter φ und ψ:

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{x} &= \frac{R_1 R_2 \sin\psi\cos\varphi}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi}, \\ \mathfrak{y} &= \frac{R_1 R_2 \sin\psi\sin\varphi}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi}, \\ \mathfrak{z} &= \frac{R_1 R_2 (1-\cos\psi)}{R_1\sin^2\varphi + R_2\cos^2\varphi} \end{aligned} \right.$$

die Gleichungen der gesuchten Fläche. Die Fläche ist in der Form $F(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}) = 0$ durch eine algebraische Gleichung ausdrückbar. Statt diese Gleichung durch Elimination von φ und ψ aus (3) abzuleiten, findet man sie bequemer so: Der Kreis mit dem Radius R liegt in der Ebene

$$\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}} = \operatorname{tg}\varphi$$

und auf der Kugel

$$\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2 = 2R\mathfrak{z}.$$

Aus der ersten Gleichung und aus (2) folgt aber:

$$\frac{1}{R} = \left(\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2}\right)\frac{1}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2},$$

sodass die Substitution dieses Wertes in die Gleichung der Kugel giebt:

$$(4) \qquad (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)\left(\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2}\right) = 2\mathfrak{z}(\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2).$$

Die Krümmungskreise der Normalschnitte eines Flächenpunktes bilden somit eine Fläche vierter Ordnung. Je nachdem der Punkt elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch ist, hat diese Fläche wesentlich verschiedenes Aussehen. Gänzlich im Endlichen liegt sie nur im Fall eines elliptischen Punktes. Für diesen Fall ist sie unter der Annahme $R_2 = 2R_1$ in den beiden Figuren 50 und 51

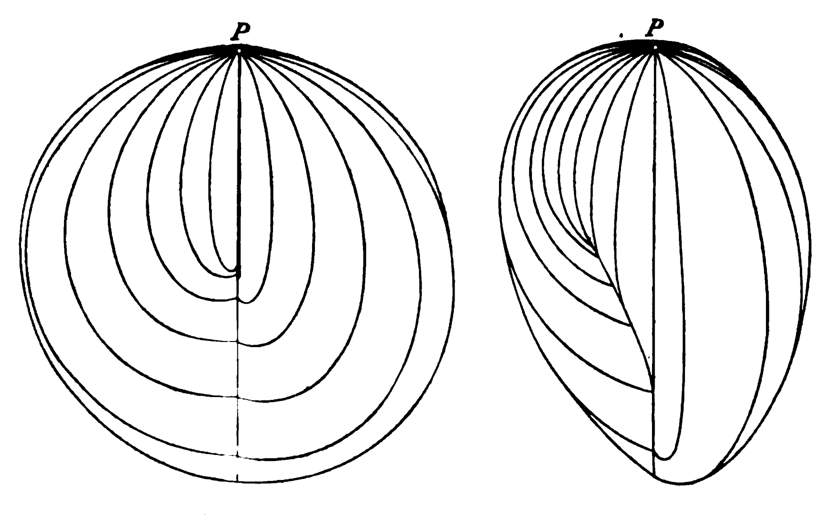


Fig. 50. Fig. 51.

in zwei verschiedenen Stellungen wiedergegeben. Längs eines Teiles der Flächennormale durchneidet sie sich selbst.

Eine andere Fläche, die zur Veranschaulichung der Lage aller ∞^2 Krümmungskreise aller normalen und schiefen Schnitte durch den Flächenpunkt P dienen kann, hat den Vorzug, für die drei Fälle des elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Punktes stets dieselbe Gestalt zu haben. Nur ihre Grösse und Lage ist veränderlich. Man erhält sie so:

Auf S. 105 erkannten wir: Legen wir durch einen Punkt P der Fläche eine Tangente t und construieren wir Flächencurven durch P mit dieser Tangente, so kann man jedesmal auf der betreffenden durch P gehenden Hauptnormale die Krümmung auftragen; der Ort der Endpunkte ist eine zur Tangente t windschiefe,

aber senkrechte Gerade $\mathfrak{g}$. Lassen wir die Tangente $\mathfrak{t}$ sich um P in der Tangentenebene drehen, so gehen ∞^1 Geraden $\mathfrak{g}$ hervor. Die gesuchte Fläche ist die von ihnen gebildete geradlinige Fläche.

Benutzen wir wieder das Axenkreuz $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ und fassen wir die Tangente $\mathfrak{t}$ des Punktes P ins Auge, die mit der $\mathfrak{x}$-Axe den Winkel φ bildet, so ist die zugehörige Gerade $\mathfrak{g}$ diejenige, die den Winkel $\varphi + \frac{\pi}{2}$ mit der $\mathfrak{x}$-Axe bildet, der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene parallel läuft und die $\mathfrak{z}$-Axe im Punkte G mit der Abscisse

$$\mathfrak{z} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}$$

schneidet. Also sind:

$$(5) \qquad \mathfrak{x} = -t\sin\varphi, \quad \mathfrak{y} = t\cos\varphi, \quad \mathfrak{z} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}$$

die Gleichungen dieser Geraden, ausgedrückt mittels des Parameters t. Geben wir φ und t alle möglichen Werte, so sind dies zugleich die Gleichungen der geradlinigen Fläche, ausgedrückt mittels der Parameter φ und t. Wir können sie auch so schreiben:

$$(6) \quad \mathfrak{x} = -t\sin\varphi, \quad \mathfrak{y} = t\cos\varphi, \quad \mathfrak{z} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\cos 2\varphi.$$

Wegen der Bedeutung von t sehen wir: Geben wir t einen bestimmten Wert, während φ beliebig bleibt, so erhalten wir die Schnittcurve der Fläche mit demjenigen Rotationscylinder um die $\mathfrak{z}$-Axe, dessen Radius gleich t ist. Diesen Cylinder wickeln wir, um die Natur der Schnittcurve zu erkennen, auf diejenige Ebene E ab, die ihn längs der Geraden in der Ebene $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$ berührt. (Siehe Fig. 52.) In dieser Ebene sei eben diese Gerade die η-Axe und die Tangente des in der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene gelegenen Kreises die ξ-Axe eines rechtwinkligen Coordinatensystems (ξ, η). Die abgewickelte Schnittcurve hat nun die Gleichungen:

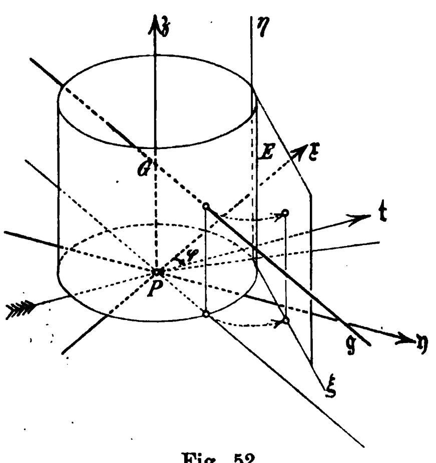


Fig. 52.

$$\xi = t\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \quad \eta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\cos 2\varphi.$$

Wird der Radius t des Cylinders gerade gleich

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$$

gewählt, so kommt:

$$\xi = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\cdot\left(2\varphi + \frac{\pi}{2}\right), \quad \eta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\cos 2\varphi,$$

oder, wenn

$$2\varphi + \frac{\pi}{2} = \omega$$

gesetzt wird:

$$\xi = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\omega, \quad \eta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\sin\omega.$$

Diese Curve entsteht aus der Sinuslinie (vgl. I S. 34):

$$\xi = \omega, \quad \eta = \sin\omega$$

durch Vergrösserung im Maassstab

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) : 1$$

und durch Schiebung längs der η-Axe um die Strecke

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Die Periode der Sinuslinie geht von $\omega = 0$ bis $\omega = 2\pi$, die Periode der abgewickelten Curve hat also die Länge

$$\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\pi = t\pi,$$

d. h. sie ist halb so gross als der Cylinderumfang. Daraus erhellt nach I S. 195, 196, dass die geradlinige Fläche (6) ein Cylindroid ist. (Siehe Fig. 53, S. 150.) Somit:[1]

Satz 35: Zieht man durch einen Flächenpunkt P beliebige Curven auf der Fläche und trägt man auf ihren durch P gehenden Hauptnormalen von P aus jedesmal die — mit Vorzeichen versehene — Krümmung der betreffenden Curve in P als Strecke auf, so ist der Ort der Endpunkte dieser Strecken ein Cylindroid.

[1] In etwas anderer Fassung findet man diesen Satz in SALMON-FIEDLER's „Analytischer Geometrie des Raumes, II. Teil", 3. Aufl., Leipzig 1880, S. 560.

Die Cylindroide sind alle einander ähnlich. Ihre Grösse hängt nur von dem Radius

$$t = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}$$

desjenigen Cylinders ab, auf den zwei Perioden einer der Sinuslinie ähnlichen Curve aufgewickelt werden. Das Cylindroid hat die

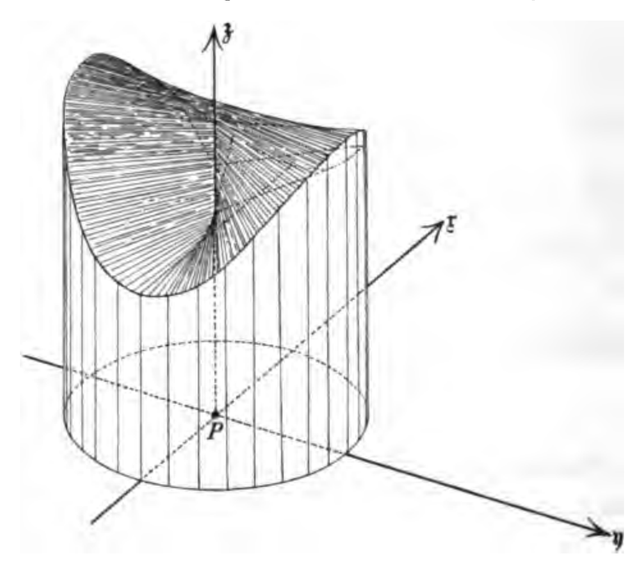


Fig. 53.

Flächennormale zur Axe. Seine Mitte bilden die Geraden, die (6) für den Wert $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$ darstellt, also die Geraden, die in der Höhe

$$\mathfrak{z} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2} H$$

(vgl. (23) auf S. 118) über der Tangentenebene liegen. Die Tangentenebene schneidet das Cylindroid in den Haupttangenten von P, was geometrisch leicht erhellt und auch daraus folgt, dass der Wert von $\mathfrak{z}$ in (6) für

$$\operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{-\frac{R_2}{R_1}} \quad \text{oder} \quad \cos 2\varphi = \frac{R_1 + R_2}{R_1 - R_2}$$

gleich Null wird (vgl. (8) auf S. 135).

Wenn das Cylindroid die Tangentenebene nicht schneidet, so ist der Flächenpunkt elliptisch, berührt es diese Ebene, so ist er parabolisch, schneidet es diese Ebene, so ist er hyperbolisch.

§ 7. Conjugierte Richtungen.

Wir haben in Satz 7, S. 26, festgestellt, dass eine Fläche durch die Gesamtheit ihrer Tangentenebenen völlig definiert werden kann. Wir sahen, dass eine nicht abwickelbare Fläche ∞^2 Tangentenebenen hat, während eine abwickelbare nur ∞^1 hat. Dem steht gegenüber, dass eine Schar von ∞^2 Punkten eine Fläche, eine Schar von nur ∞^1 aber eine Curve erzeugt. Da der Raum insgesamt ∞^3 Punkte und ∞^3 Ebenen enthält, so giebt es ausserdem keine Gebilde, die von stetigen Scharen von Punkten oder Ebenen erzeugt werden.

In gewissem Sinne also stehen den Punkten einer Fläche die Tangentenebenen der Fläche gleichwertig gegenüber. Fasst man die Flächen als Erzeugnisse ihrer Punkte auf, so haben die Curven — aufgefasst als degenerierte Flächen — eine Ausnahmestellung. Fasst man die Flächen dagegen als Erzeugnisse ihrer Tangentenebenen auf, so haben die abwickelbaren Flächen eine Ausnahmestellung.

Wir wollen hier nicht weiter auf diese doppelte Auffassung eingehen und nur das eine Ergebnis daraus zur Richtschnur für die folgenden Betrachtungen ziehen: Um die Natur einer Stelle auf einer Fläche zu untersuchen, können wir — statt wie bisher die Punkte der Fläche, die einem bestimmten Punkt unendlich benachbart sind — auch die Tangentenebenen der Fläche, die einer bestimmten Tangentenebene unendlich benachbart sind, ins Auge fassen. Dies soll im gegenwärtigen Paragraphen geschehen.

Es sei P ein Flächenpunkt und $\mathfrak{P}$ seine Tangentenebene. Eine unendlich benachbarte Tangentenebene $\mathfrak{Q}$ wird die Fläche in einem Punkte Q berühren, der dem Punkte P unendlich benachbart ist. Fragen wir uns nun, wie diese beiden Tangentenebenen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ gegen einander liegen, so haben wir erstens ihre Schnittgerade und zweitens ihren unendlich kleinen Winkel zu bestimmen.

Was die Schnittgerade anbetrifft, so kann man bei flüchtiger Überlegung leicht zu einer ganz falschen Auffassung kommen: Da nämlich die Tangentenebene von P die zu P unendlich benachbarten Flächenpunkte, mithin auch den Punkt Q enthält, umgekehrt also auch die Tangentenebene von Q den Punkt P, so schliesst man, dass PQ die Schnittgerade sei. Aber dies ist f a l s c h. Ein einfaches Beispiel zeigt es deutlich: Auf einem Rotationscylinder wählen wir zwei zunächst endlich entfernte Punkte P und Q auf einem Kreis. Ihre Tangentenebenen sind parallel zur Axe des Cylinders und

schneiden einander daher auch in einer Parallelen zur Axe, und dies gilt, wie nahe auch P und Q einander rücken mögen, während doch die Gerade PQ die Axe senkrecht kreuzt.

Der Fehler in der obigen Überlegung liegt darin, dass der Punkt Q thatsächlich nicht in der Ebene $\mathfrak{P}$ liegt, sondern von ihr einen Abstand hat, der von höherer Ordnung unendlich klein ist, wenn die Strecke PQ als unendlich klein von erster Ordnung aufgefasst wird. Ebenso hat P von der Ebene $\mathfrak{Q}$ einen unendlich kleinen Abstand von höherer Ordnung, während die Tangentenebenen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ einen von erster Ordnung unendlich kleinen Winkel mit einander bilden. Vergrössern wir die Figur so weit, dass die unendlich kleine Strecke PQ endlich wird, so bleibt der Winkel der Ebenen immer noch unendlich klein von erster Ordnung, während P von $\mathfrak{Q}$ und Q von $\mathfrak{P}$ ebenfalls je einen unendlich kleinen Abstand von erster Ordnung hat. Man erkennt aber: Da der Winkel unendlich klein ist, so sind diese beiden letzteren Abstände unendlich klein, wo auch P in $\mathfrak{P}$ und Q in $\mathfrak{Q}$ liegen mag, und so erhellt aus der vergrösserten Fig. 54, dass die Gerade PQ durchaus nicht die Richtung der Schnittgeraden beider Ebenen zu haben braucht.

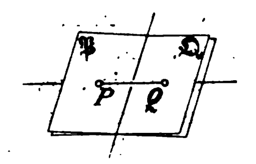


Fig. 54.

Nun soll die Schnittgerade zweier unendlich benachbarter Tangentenebenen analytisch bestimmt werden:

Ein Punkt P oder (u, v) oder (x, y, z) hat, wenn X, Y, Z die Richtungscosinus seiner Normalen sind, die Tangentenebene in den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$:

$$(1) \qquad X(\mathfrak{x} - x) + Y(\mathfrak{y} - y) + Z(\mathfrak{z} - z) = 0.$$

Ziehen wir irgend eine Curve auf der Fläche, d. h. nehmen wir v als Function von u an, nach S. 11, so können wir längs der Curve in jedem Punkte (u, v) die Tangentenebene construieren, und in den Coefficienten ihrer Gleichung (1) tritt dann nur der eine Parameter u auf. Nach Satz 15, I S. 293, umhüllen diese ∞^1 Ebenen eine abwickelbare Fläche. Auf ihr ist die durch den Punkt (u, v) gehende Erzeugende die Schnittgerade der Tangentenebene dieses Punktes mit der Tangentenebene des unendlich benachbarten Curvenpunktes $(u + du,\ v + dv)$. Sie ist nach Satz 14, I S. 292, durch die Gleichung (1) und die aus (1) durch totale Differentiation nach u hervorgehende Gleichung dargestellt. Dadurch ergiebt sich aber die Gleichung:

$$\mathbf{S}\left(X_u + X_v \frac{dv}{du}\right)(\mathfrak{x} - x) - \mathbf{S}\,X\left(x_u + x_v \frac{dv}{du}\right) = 0$$

oder nach XI (I) einfacher:

$$\mathbf{S}\left(X_u + X_v \frac{dv}{du}\right)(\mathfrak{x} - x) = 0. \tag{2}$$

Die Gleichungen (1) und (2) stellen also zusammen die Schnittgerade der Tangentenebene des Punktes (u, v) mit der Tangentenebene des Punktes $(u + du,\ v + dv)$ dar. Sie geht durch den Punkt (u, v) oder (x, y, z) selbst. (Streng genommen freilich geht sie unendlich nah an ihm vorbei, was aber bei der Aufstellung der endlichen Gleichungen der Geraden nicht in Betracht kommt.) Es mögen u und v beim Fortschreiten auf der Schnittgeraden Incremente δu und δv erfahren. Alsdann müssen die Werte

$$\mathfrak{x} = x + x_u\,\delta u + x_v\,\delta v$$

u. s. w. beide Gleichungen (1) und (2) erfüllen. Die erste Gleichung wird wegen XI (I) identisch erfüllt, während die zweite liefert:

$$\mathbf{S}\left(X_u + X_v \frac{dv}{du}\right)\left(x_u + x_v \frac{\delta v}{\delta u}\right) = 0.$$

Multiplicieren wir dies aus, so ergiebt sich nach (10), S. 106:

$$L + M\left(\frac{dv}{du} + \frac{\delta v}{\delta u}\right) + N\frac{dv}{du}\cdot\frac{\delta v}{\delta u} = 0$$

oder, wenn $dv : du = k$ und $\delta v : \delta u = \varkappa$ gesetzt wird:

$$L + M(k + \varkappa) + Nk\varkappa = 0. \tag{3}$$

Also haben wir den

Satz 36: Die Tangentenebene eines Flächenpunktes (u, v) schneidet die Tangentenebene des in der Richtung $(k = dv{:}du)$ unendlich nah gelegenen Punktes der Fläche in einer Geraden, deren Richtung $(\varkappa = \delta v : \delta u)$ durch die Formel

$$L + M(k + \varkappa) + Nk\varkappa = 0$$

bestimmt wird.

Man bemerkt sofort, dass die Formel (3) symmetrisch in k und $\varkappa$ ist. Die Beziehung zwischen beiden Richtungen (k) und $(\varkappa)$ ist also vollkommen wechselseitig.

Die Formel (3) wird im allgemeinen für verschiedene Werte von k verschiedene Werte von $\varkappa$ geben. Dies ist nur dann nicht der Fall, wenn ihre linke Seite das Product zweier linearer Ausdrücke ist von der Form:

$$(\alpha + \beta k)(\alpha + \beta\varkappa),$$

denn dann gehört zu jedem Werte k immer derselbe Wert $\varkappa = -\alpha:\beta$. Dieser Ausnahmefall tritt ein, wenn

$$L:M:N = \alpha^2:\alpha\beta:\beta^2$$

oder also

$$LN - M^2 = 0$$

ist, d. h. nach Satz 19, S. 132, für die abwickelbaren Flächen. Dies ist nicht überraschend, denn eine abwickelbare Fläche hat ja nur ∞^1 Tangentenebenen, und je zwei unendlich benachbarte schneiden sich in einer Erzeugenden. Wenn also P auf einer abwickelbaren Fläche nach irgend einer Richtung fortschreitet und nicht gerade in der durch P gehenden Erzeugenden bleibt, so wird die neue Tangentenebene die alte längs der Erzeugenden von P schneiden.

Da wir bei unseren Betrachtungen die Richtungscosinus X, Y, Z der Normalen gebraucht haben, so haben wir von vornherein die Tangentenflächen der Minimalcurven (siehe S. 28, 29) ausgeschlossen. Weil aber diese Flächen auch zu den abwickelbaren gehören, so ist der folgende Satz allgemein richtig:

Satz 37: Auf einer nicht-abwickelbaren Fläche ist jeder Fortschreitungsrichtung von einem Punkte P der Fläche aus eine zweite Fortschreitungsrichtung, und zwar wechselseitig, zugeordnet derart, dass sich die Tangentenebene des Punktes P um die eine Richtung dreht, wenn der Punkt die andere Richtung einschlägt.

Diese Paare (k), $(\varkappa)$ von Richtungen heissen conjugierte Richtungen und ihre zugehörigen Tangenten conjugierte Tangenten, und zwar deshalb, weil zu ihnen conjugierte Durchmesser der Indicatrix des Flächenpunktes P gehören.[1] In der That, wenn wir das begleitende Axenkreuz von P (vgl. S. 133) und die Grössen $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ als Parameter benutzen, sodass

$$k = d\mathfrak{y}:d\mathfrak{x}, \quad \varkappa = \delta\mathfrak{y}:\delta\mathfrak{x}$$

zu setzen ist, so tritt an die Stelle von (3):

$$\frac{1}{R_1} + \frac{k\varkappa}{R_2} = 0, \tag{4}$$

vgl. (3) und (6) auf S. 134. Aber conjugierte Durchmesser der Indicatrix:

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2} = 2\mathfrak{z},$$

[1] Nach Dupin, siehe die Anm. auf S. 127.

vgl. (10) auf S. 138, bilden mit der ersten Axe des Kegelschnittes solche Winkel α und β, für die

$$\frac{1}{R_1} + \frac{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{R_2} = 0 \tag{5}$$

ist. Nun sind k und $\varkappa$ auf der andern Seite gerade die Tangenten derjenigen Winkel, die von den Richtungen (k) und $(\varkappa)$ mit dieser Axe gebildet werden. Die Vergleichung von (4) mit (5) lehrt also:

Satz 38: Die conjugierten Durchmesserpaare der Indicatrix eines Flächenpunktes P sind parallel zu solchen Fortschreitungsrichtungen von dem Punkte P aus, von denen die eine die Drehgerade der Tangentenebene ist, sobald der Berührungspunkt von P aus die andere Richtung einschlägt.

Die Formel (3) soll noch — indem wir wieder zu den Parametern u, v zurückkehren und also $k = dv:du$, $\varkappa = \delta v:\delta u$ setzen — in dem Satze festgehalten werden:

Satz 39: Es ist

$$L\,du\,\delta u + M(du\,\delta v + dv\,\delta u) + N\,dv\,\delta v = 0$$

die Bedingung dafür, dass zwei Fortschreitungsrichtungen $(dv:du)$ und $(\delta v:\delta u)$ auf der Fläche zu einander conjugiert sind.

Will man sich den Zusammenhang zwischen den conjugierten Fortschreitungsrichtungen und den conjugierten Durchmessern der Indicatrix geometrisch verständlich machen, so kann man so verfahren: Die Tangentenebene von P ist der Ebene der Indicatrix parallel, siehe Fig. 55. Wird nun ein zu P unendlich benachbarter Punkt Q irgendwo auf der Indicatrix gewählt, so enthält seine Tangentenebene die Tangente t der Indicatrix. Da t der ersteren Ebene parallel ist, so schneiden die beiden Ebenen einander in einer Parallelen zu t. Aber beim Kegelschnitt ist bekanntlich der zum Durchmesser des Punktes Q conjugierte Durchmesser parallel der Tangente t von Q. Also ist auch die Schnittgerade beider Tangentenebenen diesem conjugierten Durchmesser parallel.

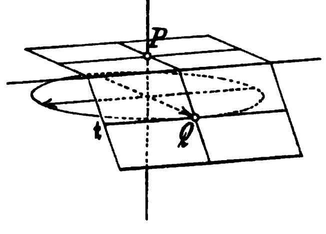


Fig. 55.

Den Inhalt der Formel (5) wollen wir noch in dem Satze aussprechen:

Satz 40: Zwei Fortschreitungsrichtungen von einem Flächenpunkte P aus, die mit der ersten Hauptkrüm-

mungsrichtung von P die Winkel α und β bilden, sind dann und nur dann conjugiert, wenn

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = -\frac{R_2}{R_1}$$

ist, wobei R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien von P bedeuten.

Nach Satz 11, S. 33, ist:

$$E + F(k + \varkappa) + Gk\varkappa = 0$$

die Bedingung dafür, dass die beiden Richtungen ($k = dv : du$) und ($\varkappa = \delta v : \delta u$) auf einander senkrecht stehen, während wir oben die Formel:

$$L + M(k + \varkappa) + Nk\varkappa = 0$$

als Bedingung für conjugierte Richtungen erhalten haben. Sind beide Bedingungen erfüllt, so sind die zugehörigen Durchmesser der Indicatrix die Hauptaxen und die Richtungen (k) und ($\varkappa$) also die Hauptkrümmungsrichtungen. Hiermit sind die beiden Formeln (17) auf S. 117 geometrisch gedeutet. Also:

Satz 41: Die Hauptkrümmungsrichtungen eines Flächenpunktes sind die gleichzeitig zu einander senkrechten und zu einander conjugierten Fortschreitungsrichtungen des Punktes.

Bekanntlich sind die Asymptoten eines Kegelschnittes die zu sich selbst conjugierten Durchmesser. Sie ergeben sich hier durch die Annahme $k = \varkappa$. Also ist

$$L + 2Mk + Nk^2 = 0$$

die Bedingung für die Richtung (k) einer Asymptote der Indicatrix oder, was dasselbe ist, einer Haupttangente (vgl. (2) auf S. 127). Also:

Satz 42: Die Haupttangenten eines Flächenpunktes sind diejenigen Tangenten, von denen jede zu sich selbst conjugiert ist.

Mithin auch:

Satz 43: Nur dann dreht sich die Tangentenebene eines Flächenpunktes um die Fortschreitungsrichtung des Punktes, wenn diese Richtung die einer Haupttangente ist.

Ist ein Flächenpunkt ein Nabelpunkt (S. 110), so ist die Indicatrix ein Kreis und die Bedingung für das Conjugiertsein iden-

tisch mit der für das Orthogonalsein. Deshalb ist auf der Kugel (vgl. Satz 6, S. 112) jede Tangente zu der zu ihr senkrechten Tangente desselben Punktes conjugiert.

Da die Asymptoten eines Kegelschnittes jedes conjugierte Durchmesserpaar harmonisch trennen, so ergiebt sich bei der Anwendung auf die Indicatrix ein flächentheoretischer Satz, den wir aber direct beweisen wollen:

Es seien λ_1 und λ_2 die zu den Haupttangenten von P gehörigen Werte von $dv:du$, sodass

$$(6) \qquad L + 2M\lambda + N\lambda^2 = 0 \qquad (\text{für } \lambda = \lambda_1 \text{ oder } \lambda_2)$$

ist. Ferner seien (k) und $(\varkappa)$ zwei Richtungen, die von den Haupttangenten harmonisch getrennt werden. Nach Satz 46, S. 92, ist alsdann das Doppelverhältnis:

$$\frac{\lambda_1 - k}{\lambda_1 - \varkappa} : \frac{\lambda_2 - k}{\lambda_2 - \varkappa} = -1$$

(vgl. I S. 332) oder

$$\lambda_1 \lambda_2 - \tfrac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(k + \varkappa) + k\varkappa = 0.$$

Da aber nach (6)

$$\lambda_1 \lambda_2 : (\lambda_1 + \lambda_2) : 1 = L : -2M : N$$

ist, so kommt:

$$L + M(k + \varkappa) + Nk\varkappa = 0$$

wie in (3). Somit:

Satz 44: Conjugierte Tangenten eines Flächenpunktes sind solche, die von den Haupttangenten des Punktes harmonisch getrennt werden.

Wir sprachen oben von den conjugierten Tangenten für den Fall einer abwickelbaren Fläche. Wir können nun eine beliebige Curve c auf einer nicht-abwickelbaren Fläche zu einer abwickelbaren, wie auf S. 152 geschah, in Beziehung bringen, da die Tangentenebenen längs c eine abwickelbare Fläche umhüllen. In jedem Punkte von c ist die Tangente von c sowohl auf dieser Fläche wie auf der nicht-abwickelbaren zur Erzeugenden der abwickelbaren Fläche, die ja auch Tangente ist, conjugiert. Daher:

Satz 45: Construiert man diejenige abwickelbare Fläche, die eine gegebene Fläche längs einer Curve c berührt, so ist in jedem Punkte von c die Tangente von c zur hindurchgehenden Erzeugenden der abwickelbaren Fläche conjugiert.

Wird eine Fläche durch eine solche Lichtquelle, die als ein Punkt L aufgefasst werden kann, beleuchtet, so ist die Schattengrenze auf der Fläche die Curve, in der die Fläche von demjenigen Tangentialkegel berührt wird, dessen Spitze L ist. Die Tangenten der Schattengrenze sind daher nach unserem Satze conjugiert zu den jeweiligen tangierenden Lichtstrahlen. —

Es erübrigt nun, die oben angekündigte zweite Aufgabe zu behandeln, nämlich den unendlich kleinen Winkel zweier unendlich benachbarter Tangentenebenen zu bestimmen. Dieser Winkel ist derselbe wie der zweier unendlich naher Flächennormalen; und diesen untersuchen wir im nächsten Paragraphen.

§ 8. Unendlich benachbarte Normalen.

Um die geometrische Natur einer Stelle auf einer Fläche noch weiter zu erforschen, betrachten wir jetzt die Lagerung der unendlich vielen Normalen der Fläche, die einer Normalen unendlich benachbart sind.[1] Dabei brauchen wir die Richtungscosinus X, Y, Z der Normalen und ihre Änderungen bei unendlich kleinen Änderungen der Parameter u, v, d. h. also ihre partiellen Differentialquotienten nach u und v.

Nach XI (H) ist:

$$\mathbf{S}\, X X_u = 0.$$

Nach (10), S. 106, ist ausserdem:

$$\mathbf{S}\, x_u X_u = -L,$$
$$\mathbf{S}\, x_v X_u = -M.$$

Dies sind drei in X_u, Y_u, Z_u lineare Gleichungen, deren Determinante nach XI (L) den Wert D hat. Mithin giebt ihre Auflösung mit Rücksicht auf XI (K):[2]

[1] Die Beziehungen zwischen den Winkeln unendlich benachbarter Flächennormalen wurden von Bertrand zuerst genauer untersucht: „Mémoire sur la théorie des surfaces", Journal de Mathém. pures et appl., 1. série, t. IX (1844), auch Comptes Rendus t. XVII (1843).

[2] Diese Formeln finden sich implicite bei Weingarten, „Über eine Classe auf einander abwickelbarer Flächen", Journ. f. d. reine u. angew. Math. 59. Bd. (1861), während sie für specielle Parametercurven schon früher vorkommen.

$$
(1) \quad \begin{cases}
X_u = \frac{1}{D^2}[(FM - GL)x_u + (FL - EM)x_v], \\
Y_u = \frac{1}{D^2}[(FM - GL)y_u + (FL - EM)y_v], \\
Z_u = \frac{1}{D^2}[(FM - GL)z_u + (FL - EM)z_v].
\end{cases}
$$

Ebenso lassen sich X_v, Y_v, Z_v berechnen. Bequemer finden wir sie aber aus (1), wenn wir u mit v, E mit G und L mit N vertauschen:

$$
(2) \quad \begin{cases}
X_v = \frac{1}{D^2}[(FN - GM)x_u + (FM - EN)x_v], \\
Y_v = \frac{1}{D^2}[(FN - GM)y_u + (FM - EN)y_v], \\
Z_v = \frac{1}{D^2}[(FN - GM)z_u + (FM - EN)z_v].
\end{cases}
$$

Wir leiten hieraus sogleich noch einige nachher nützliche Formeln ab. Aus (1) und XI (A) folgt:

$$\mathbf{S}X_u^2 = \frac{1}{D^4}[(FM-GL)^2E + 2(FM-GL)(FL-EM)F + (FL-EM)^2G].$$

Multiplicieren wir alles aus, so heben sich mehrere Glieder, und es bleibt:

$$\mathbf{S}X_u^2 = \frac{1}{D^4}[(EG - F^2)GL^2 - 2(EG - F^2)FLM + (EG - F^2)EM^2]$$

oder:

$$(3) \qquad \mathbf{S}X_u^2 = \frac{GL^2 - 2FLM + EM^2}{D^2}.$$

Analog kommt nach (2)

$$(4) \qquad \mathbf{S}X_v^2 = \frac{EN^2 - 2FMN + GL^2}{D^2}.$$

Eine ähnliche Rechnung liefert nach (1) und (2):

$$(5) \qquad \mathbf{S}X_uX_v = \frac{GLM + EMN - FM^2 - FLN}{D^2}.$$

Mit Rücksicht auf die Werte von H und K in Satz 11, S. 119, können wir kürzer schreiben:

$$(6) \quad \mathbf{S}X_u^2 = HL - KE, \quad \mathbf{S}X_uX_v = HM - KF, \quad \mathbf{S}X_v^2 = HN - KG.$$

Die Normale des Flächenpunktes P oder (x, y, z) oder (u, v) hat in den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Gleichungen:

$$(7) \qquad \mathfrak{x} = x + Xt, \qquad \mathfrak{y} = y + Yt, \qquad \mathfrak{z} = z + Zt,$$

ausgedrückt mittels eines Parameters t, der den (mit Vorzeichen

versehenen) Abstand des Punktes ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$) der Normalen von ihrem Fusspunkt (x, y, z) bedeutet. Analoge Bedeutung hat der Parameter τ in den Gleichungen:

$$(8)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = x + dx + (X + dX)\tau, \\ \mathfrak{y} = y + dy + (Y + dY)\tau, \\ \mathfrak{z} = z + dz + (Z + dZ)\tau \end{cases}$$

der Normalen eines dem Punkte P oder (x, y, z) unendlich benachbarten Punktes Q oder ($x + dx$, $y + dy$, $z + dz$) der Fläche. Die zu Q gehörigen Flächenparameter seien $u + du$, $v + dv$.

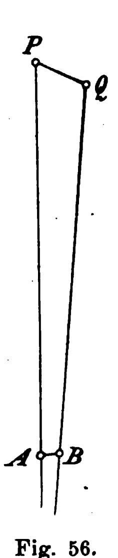


Fig. 56.

Im allgemeinen werden die beiden Normalen (7) und (8) — wie überhaupt zwei unendlich benachbarte Geraden, vgl. I S. 270 bis 272, — einander nicht schneiden, sodass es ein Problem ist, ihren kürzesten Abstand AB zu bestimmen. (Siehe Fig. 56.)

Es fragt sich, welchen Parameterwert t bez. τ der durch (7) bez. (8) dargestellten Punkt hat, wenn er einer der Endpunkte A bez. B dieses Abstandes ist. Da der Abstand zu den Normalen senkrecht ist, liegt er in der Ebene, die in dem Punkt A auf der ersten Normalen senkrecht steht und deren Gleichung in den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ so lautet:

$$X(\mathfrak{x} - x) + Y(\mathfrak{y} - y) + Z(\mathfrak{z} - z) = t.$$

Setzen wir hierin die Werte (8) ein, so ergiebt sich für den Punkt B auf der zweiten Normalen die Bedingung

$$\mathbf{S}\, X dx + \mathbf{S}\, X(X + dX)\tau = t.$$

Wegen XI (H) und XI (I) kommt hieraus: $\tau = t$.

Die beiden Endpunkte A und B des gesuchten kürzesten Abstandes gehören also zu einem und demselben, aber noch unbekannten Werte n von t und τ. Dieser Wert muss so beschaffen sein, dass die Verbindende der beiden Punkte A und B oder (7) und (8) auch auf der zweiten Normalen senkrecht steht. Da diese Normale die Richtungscosinus $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ hat, dagegen die Richtungscosinus der Geraden AB den Differenzen entsprechender Coordinaten (7) und (8) für $t = \tau = n$ proportional sind, so ist zu fordern:

$$\mathbf{S}\,(X + dX)(dx + dX \cdot n) = 0.$$

Wegen XI (H) und XI (I) reduciert sich diese Bedingung auf:

$$\mathbf{S}\, dX dx + \mathbf{S}\, dX^2 \cdot n = 0$$

und giebt:

$$n = -\frac{\mathbf{S}\, dX dx}{\mathbf{S}\, dX^2}. \tag{9}$$

Hierin ist der Zähler:

$$\mathbf{S}\, dX dx = \mathbf{S}\,(X_u du + X_v dv)(x_u du + x_v dv) =$$
$$= \mathbf{S}\, X_u x_u du^2 + (\mathbf{S}\, X_u x_v + \mathbf{S}\, X_v x_u) du\, dv + \mathbf{S}\, X_v x_v dv^2$$

oder nach (10), S. 106:

$$\mathbf{S}\, dX dx = -(L du^2 + 2M du\, dv + N dv^2). \tag{10}$$

Ferner hat der Nenner, nämlich:

$$\mathbf{S}\, dX^2 = \mathbf{S}\,(X_u du + X_v dv)^2 = \mathbf{S}\, X_u^2 du^2 + 2\mathbf{S}\, X_u X_v du\, dv + \mathbf{S}\, X_v^2 dv^2,$$

nach (6) den Wert:

$$\mathbf{S}\, dX^2 = H(L du^2 + 2M du dv + N dv^2) - K(E du^2 + 2F du dv + G dv^2), \tag{11}$$

sodass (9) giebt:

$$n = \frac{L du^2 + 2M du\, dv + N dv^2}{H(L du^2 + 2M du\, dv + N dv^2) - K(E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2)}. \tag{12}$$

Dies ist also der Abstand PA für denjenigen Punkt A, in dem der kürzeste Abstand der Normalen des Punktes P oder (u, v) von der Normalen des Punktes Q oder $(u + du,\ v + dv)$ beginnt.

Ferner bezeichne $d\nu$ den unendlich kleinen Winkel, den beide Normalen mit einander bilden. Nach (17), I S. 182, ist, da X, Y, Z die Richtungscosinus der einen und $X + dX$, $Y + dY$, $Z + dZ$ die der anderen Normalen sind:

$$d\nu^2 = \mathbf{S}\, dX^2, \tag{13}$$

also nach (11):

$$d\nu^2 = H(L du^2 + 2M du dv + N dv^2) - K(E du^2 + 2F du dv + G dv^2). \tag{14}$$

Da

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2$$

das Quadrat des Bogenelementes PQ ist, so folgt aus (14):

$$L du^2 + 2M du\, dv + N dv^2 = \frac{d\nu^2 + K ds^2}{H} \tag{15}$$

und also nach (12):

$$\left(\frac{d\nu}{ds}\right)^2 = \frac{K}{Hn - 1}. \tag{16}$$

Endlich sei noch $d\mathfrak{n}$ die Länge des kürzesten Abstandes AB beider Normalen. Da die Grössen (7) für $t = n$ die Coordinaten von A und die Grössen (8) für $\tau = n$ die Coordinaten von B sind, so ist:

$$(17) \qquad d\mathfrak{n}^2 = \mathsf{S}(dx + dX \cdot n)^2 = \mathsf{S}\,dx^2 + 2n\,\mathsf{S}\,dx\,dX + n^2\,\mathsf{S}\,dX^2.$$

Nach (10), (13), (15) und (16) folgt hieraus:

$$(18) \qquad \left(\frac{d\mathfrak{n}}{ds}\right)^2 = 1 - \frac{K}{Hn - 1}n^2.$$

oder auch:

$$(19) \qquad d\mathfrak{n}^2 + n^2 dv^2 = ds^2.$$

Zum besseren Verständnis möge die Fig. 57 dienen, in der PA die eine und QB die andere Normale bedeuten soll, also die Strecke PQ und ebenso der Winkel von PA und QB als unendlich klein aufzufassen ist. Zieht man durch B die Parallele BC zu AP und macht sie gleich AP, so steht $PC \parallel AB$ auf PA und QB und deshalb auch auf der Ebene QBC senkrecht. Das Dreieck PQC hat also in C einen rechten Winkel, sodass:

$$PC^2 + CQ^2 = PQ^2$$

ist. Da CQ die Projection von PQ auf die Ebene QBC ist und $\sphericalangle PQB$ nur um unendlich wenig von einem rechten Winkel abweicht, weil QB die Normale von Q ist, so weicht auch $\sphericalangle CQB$ nur unendlich wenig von einem rechten ab. Weil ferner $\sphericalangle QBC = dv$ und $CB = PA = n$ ist, so ist also — abgesehen von unendlich kleinen Gliedern höherer Ordnung:

Fig. 57.

$$CQ = n\,dv.$$

Ausserdem ist $PC = AB = d\mathfrak{n}$ und $PQ = ds$. Setzen wir diese Werte in die obige Gleichung ein, so geht wieder die Formel (19) hervor.

Die Richtungscosinus des kürzesten Abstandes AB sind nach S. 160 proportional

$$dx + n\,dX, \qquad dy + n\,dY, \qquad dz + n\,dZ.$$

PC ist die zu dem kürzesten Abstand AB parallele Fortschreitungsrichtung auf der Fläche. Längs ihrer mögen u und v um δu und δv wachsen. Dann müssen die eben angegebenen Grössen den drei anderen:

$$x_u\,\delta u + x_v\,\delta v, \qquad y_u\,\delta u + y_v\,\delta v, \qquad z_u\,\delta u + z_v\,\delta v$$

proportional sein. Es giebt also einen Factor $\varrho\,(u, v)$ derart, dass:

$$x_u\,\delta u + x_v\,\delta v = \varrho\,[(x_u + n\,X_u)\,du + (x_v + n\,X_v)\,dv]\,,$$
$$y_u\,\delta u + y_v\,\delta v = \varrho\,[(y_u + n\,Y_u)\,du + (y_v + n\,Y_v)\,dv]\,,$$
$$z_u\,\delta u + z_v\,\delta v = \varrho\,[(z_u + n\,Z_u)\,du + (z_v + n\,Z_v)\,dv]$$

ist. Multiplicieren wir die drei Gleichungen mit X, Y, Z und addieren sie, so geht wegen X (H) und X (I) eine Identität hervor. Es liegen also thatsächlich höchstens zwei von einander unabhängige Gleichungen vor. Um sie umzuformen, multiplicieren wir die drei Gleichungen mit X_u, Y_u, Z_u bez. X_v, Y_v, Z_v und addieren sie jedesmal. Nach (10), S. 106, kommt dann:

$$-\,L\,\delta u - M\delta v = \varrho\,[-\,L\,du - M dv + n(\mathbf{S}\,X_u^2\,du + \mathbf{S}\,X_u\,X_v\,dv)]\,,$$
$$-\,M\delta u - N\,\delta v = \varrho\,[-\,M du - N\,dv + n(\mathbf{S}\,X_u\,X_v\,du + \mathbf{S}\,X_v^2\,dv)]\,.$$

Um die Hülfsgrösse ϱ zu eliminieren, multiplicieren wir die erste Gleichung mit du und die zweite mit dv. Addieren wir sie dann, so wird nämlich die rechte Seite wegen (6) und (12) gleich Null, sodass bleibt:

$$L\,du\,\delta u + M(du\,\delta v + dv\,\delta u) + N dv\,\delta v = 0\,.$$

Nach Satz 39, S. 155, heisst dies: Die Richtung $(\delta v : \delta u)$ ist zur Richtung $(dv : du)$ conjugiert. Mithin, da die Richtung $\delta v : \delta u$ die von PC oder AB in Fig. 57 ist:

Satz 46: Geht man von einem Flächenpunkt P zu einem unendlich benachbarten Q über, construiert die Normalen beider und den kürzesten Abstand der Normalen, so ist die Richtung dieses kürzesten Abstandes dieselbe wie die zu PQ conjugierte Fortschreitungsrichtung auf der Fläche.

Man hätte dies auch aus Satz 38 und Fig. 55 auf S. 155 geometrisch folgern können, denn die Schnittlinie der Tangentenebenen von P und Q ist zu beiden Normalen senkrecht und hat also die Richtung des kürzesten Abstandes beider Normalen.

Oben erkannten wir im Anschluss an (8), dass die Normale des Punktes Q die zur Tangentenebene von P im Abstande t parallele Ebene in demjenigen Punkte trifft, dessen Coordinaten durch (8) für $\tau = t$ gegeben werden.

Nehmen wir jetzt t irgendwie bestimmt an, während wir die Incremente du und dv beliebig lassen, so geben nach (8) die Gleichungen

$$(20)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = x + x_u du + x_v dv + (X + X_u du + X_v dv) t, \\ \mathfrak{y} = y + y_u du + y_v dv + (Y + Y_u du + Y_v dv) t, \\ \mathfrak{z} = z + z_u du + z_v dv + (Z + Z_u du + Z_v dv) t \end{cases}$$

die Schnittpunkte ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$) jener Parallelebene mit den unendlich vielen Normalen an, die der Normalen von P unendlich benachbart sind. Da hier zwei willkürliche, wenn auch unendlich kleine Grössen du und dv auftreten, so folgern wir, dass alle diese Schnittpunkte innerhalb eines unendlich kleinen Flächenstücks auf der Ebene liegen, das sich im allgemeinen nicht auf ein Curvenelement reducieren wird. Anders gesagt: Wenn die Normale von P die Parallelebene etwa in N trifft, so wird durch jeden Punkt der Parallelebene, der zu N unendlich benachbart ist, eine unendlich benachbarte Normale gehen.

Dies wird nur dann nicht der Fall sein, wenn die drei Functionen (20), aufgefasst als Functionen von du und dv, von einander abhängig sind, oder auch, da sie linear in du und dv sind, wenn die Coefficienten von du denen von dv proportional sind:

$$(21)\quad \frac{x_u + X_u t}{x_v + X_v t} = \frac{y_u + Y_u t}{y_v + Y_v t} = \frac{z_u + Z_u t}{z_v + Z_v t},$$

denn dann kann man die Gleichungen (20) — sobald man diese drei Brüche mit $1 : \varrho$ bezeichnet — so schreiben:

$$(22)\quad \begin{cases} \mathfrak{x} = x + Xt + (x_u + X_u t)(du + \varrho\, dv), \\ \mathfrak{y} = y + Yt + (y_u + Y_u t)(du + \varrho\, dv), \\ \mathfrak{z} = z + Zt + (z_u + Z_u t)(du + \varrho\, dv). \end{cases}$$

Sie enthalten dann die Veränderlichen du und dv nur in der Verbindung $du + \varrho\, dv$, die linear auftritt, sodass alle diese Punkte ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$) alsdann eine Gerade erfüllen. Indem wir die Forderung, dass alle drei Brüche (21) denselben Wert $1 : \varrho$ haben sollen, etwas anders schreiben, erkennen wir also Folgendes:

Nur dann, wenn man zwei Grössen t und ϱ so bestimmen kann, dass

$$(23)\quad \begin{cases} x_v + X_v t = \varrho (x_u + X_u t), \\ y_v + Y_v t = \varrho (y_u + Y_u t), \\ z_v + Z_v t = \varrho (z_u + Z_u t) \end{cases}$$

wird, schneiden alle diejenigen ∞^2 Normalen, die den Normalen von P unendlich benachbart sind, die zur Tangentenebene von P

parallele und von ihr um die Strecke t entfernte Ebene in einer Geraden. Diese Gerade geht alsdann von dem Punkte N aus, in dem die Parallelebene die Normale von P schneidet, und hat nach (22) Richtungscosinus proportional

$$x_u + X_u t, \quad y_u + Y_u t, \quad z_u + Z_u t.$$

Nun ist es in der That möglich, die Gleichungen (23) durch passende Werte von t und ϱ zu befriedigen. Wenn wir nämlich die Gleichungen (23) mit X, Y, Z multiplicieren und dann addieren, so geht nach XI (H) und XI (I) eine Identität hervor. Thatsächlich liegen also nur zwei Bedingungsgleichungen vor. Diese können wir in bequemerer Form schreiben, indem wir die Gleichungen (23) das eine Mal mit x_u, y_u, z_u und das andere Mal mit x_v, y_v, z_v multiplicieren und dann jedesmal addieren. Dann kommt nach XI (A) und nach (10), S. 106:

$$F - Mt = \varrho(E - Lt),$$
$$G - Nt = \varrho(F - Mt).$$

Elimination der Hülfsgrösse ϱ führt zu der Gleichung:

$$(LN - M^2)t^2 - (EN - 2FM + GL)t + (EG - F^2) = 0,$$

die nach (20), S. 118, aussagt, dass t gleich einem der beiden Hauptkrümmungsradien R_1, R_2 sein muss, vorausgesetzt, dass überhaupt Hauptkrümmungsradien vorhanden sind. Dies ist nach S. 115 nicht der Fall, wenn die Fläche eine Schar von Minimalgeraden enthält; vgl. den damaligen Satz 10. In diesem Ausnahmefall hat die quadratische Gleichung für t eine Doppelwurzel, denn die Bedingung (10) auf S. 114 für eine derartige Fläche kann ja auch so geschrieben werden:

$$4(EG - F^2)(LN - M^2) - (EN - 2FM + GL)^2 = 0.$$

Man sieht also, dass diese besonderen Flächen eine besondere Betrachtung verlangen würden. Daher sehen wir von jetzt an von den Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden ab.

Alsdann können wir sagen: Die Flächennormalen, die der des Punktes P unendlich benachbart sind, schneiden nur zwei zur Tangentenebene von P parallele Ebenen in Geraden, nämlich die Ebenen durch die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte C_1 und C_2 von P. In jeder dieser Ebenen giebt es eine Gerade $\mathfrak{g}_1$ bez. $\mathfrak{g}_2$ durch C_1 bez. C_2, die von allen ∞^2 unendlich benachbarten Normalen getroffen wird.

Die Richtungscosinus der Geraden $\mathfrak{g}_1$ sind proportional

$$x_u + X_u R_1, \quad y_u + Y_u R_1, \quad z_u + Z_u R_1$$

oder nach (1) proportional drei Grössen, von denen die erste diese ist:

$$(EG - F^2)x_u + (FM - GL)R_1 x_u + (FL - EM)R_1 x_v$$

und die beiden anderen durch cyklische Vertauschung von x, y, z aus ihr hervorgehen. Zur Vereinfachung dieser Grössen gehen wir auf die Formeln für die Hauptkrümmungen zurück. Sind k_1 und k_2 die Werte von $dv:du$ für die beiden Hauptkrümmungsrichtungen, so ist nach (18), S. 117:

$$R_1 = \frac{F + k_1 G}{M + k_1 N}.$$

Setzen wir diesen Wert ein, so finden wir, dass die Richtungscosinus der Geraden $\mathfrak{g}_1$ drei solcher Grössen proportional sind, von denen die erste den Wert hat:

$$[G(EM - FL) + k_1 G(EN - GL) - k_1 F(FN - GM)]x_u - \\ - (EM - FL)(F + k_1 G)x_v$$

und die beiden anderen durch cyklische Vertauschung hieraus hervorgehen. Nach (16), S. 117, ist jedoch:

$$EM - FL = (FN - GM)k_1 k_2,$$
$$EN - GL = -(FN - GM)(k_1 + k_2).$$

Setzen wir diese Werte ein, so kann bei den drei Grössen ein gemeinsamer Factor gestrichen werden, sodass sich ergiebt, dass die Richtungscosinus von $\mathfrak{g}_1$ den drei Grössen:

$$x_u + k_2 x_v, \quad y_u + k_2 y_v, \quad z_u + k_2 z_v$$

proportional sind. Diese Grössen sind aber andererseits proportional den Richtungscosinus der zweiten Hauptkrümmungstangente von P. Entsprechende Schlüsse machen wir hinsichtlich der Geraden $\mathfrak{g}_2$. Daher kommt:

Satz 47:[1] Liegt eine Fläche vor, die keine Schar von ∞^1 Minimalgeraden enthält, so schneiden die Normalen, die der Normalen des Flächenpunktes P unendlich benachbart sind, sämtlich zwei Geraden $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$, von denen

[1] Siehe Ch. Sturm, „Mémoire sur la théorie de la vision", Comptes Rendus (1845).

die erste durch den ersten Hauptkrümmungsmittelpunkt C_1 von P geht und der zweiten Hauptkrümmungstangente von P parallel ist, während die zweite durch den zweiten Hauptkrümmungsmittelpunkt C_2 von P geht und der ersten Hauptkrümmungstangente von P parallel ist.

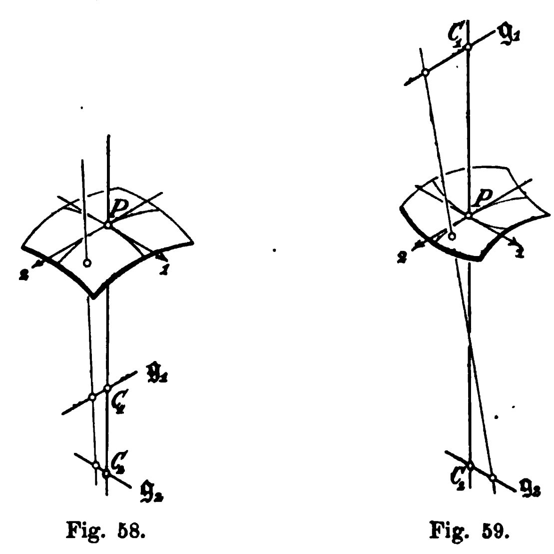


Fig. 58. Fig. 59.

Siehe Fig. 58 für einen elliptischen und Fig. 59 für einen hyperbolischen Punkt.

Zugleich hat sich noch ergeben:

Satz 48: Die Richtungscosinus der ersten Hauptkrümmungstangente eines Flächenpunktes (u, v) sind proportional:

$$x_u + X_u R_2, \quad y_u + Y_u R_2, \quad z_u + Z_u R_2$$

oder:

$$x_v + X_v R_2, \quad y_v + Y_v R_2, \quad z_v + Z_v R_2$$

und die der zweiten Hauptkrümmungstangente proportional:

$$x_u + X_u R_1, \quad y_u + Y_u R_1, \quad z_u + Z_u R_1$$

oder:

$$x_v + X_v R_1, \quad y_v + Y_v R_1, \quad z_v + Z_v R_1.$$

Vorausgesetzt ist dabei, dass die Fläche keine Schar von ∞^1 Minimalgeraden enthält.

Wir hatten zwar nur das Eine bewiesen, dass

$$x_u + X_u R_1, \quad y_u + Y_u R_1, \quad z_u + Z_u R_1$$

proportional den Richtungscosinus der zweiten Hauptkrümmungstangente sind, aber das Übrige folgt durch Vertauschung der beiden Hauptkrümmungen und durch Vertauschen der beiden Parameter u und v.

Man erkennt aus dem Satze 47, dass die Gesamtheit der ∞^2 Normalen einer (nicht-abwickelbaren) Fläche die besondere Eigentümlichkeit hat, dass alle einander unendlich benachbarten Normalen zwei zu einander zwar windschiefe, aber senkrechte Geraden schneiden. Hieraus können wir den Schluss ziehen, dass nicht jede Schar von ∞^2 Geraden als die Schar der Normalen einer Fläche aufgefasst werden kann. Denn es giebt hiernach z. B. keine Fläche, deren Normalen sämtlich zwei zu einander windschiefe Geraden schneiden.

Um aus unseren Formeln weitere geometrische Schlüsse zu ziehen, empfiehlt sich wieder die Einführung des Coordinatensystems $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$, dessen Axen das begleitende System des Punktes P bilden (vgl. S. 133). Dabei werden dann $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ selbst als Parameter benutzt. Die Fundamentalgrössen des Punktes P haben alsdann die Werte:

$$\mathfrak{E} = 1, \quad \mathfrak{F} = 0, \quad \mathfrak{G} = 1;$$

$$\mathfrak{L} = \frac{1}{R_1}, \quad \mathfrak{M} = 0, \quad \mathfrak{N} = \frac{1}{R_2},$$

während nach (23), S. 118:

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2}$$

ist, sodass die Formel (12) die Gestalt annimmt:

$$n = \frac{\frac{1}{R_1} d\mathfrak{x}^2 + \frac{1}{R_2} d\mathfrak{y}^2}{\frac{1}{R_1^2} d\mathfrak{x}^2 + \frac{1}{R_2^2} d\mathfrak{y}^2} = \frac{\frac{1}{R_1} \cos^2\varphi + \frac{1}{R_2} \sin^2\varphi}{\frac{1}{R_1^2} \cos^2\varphi + \frac{1}{R_2^2} \sin^2\varphi}, \tag{24}$$

wenn φ den Winkel bezeichnet, den die Richtung $(d\mathfrak{y} : d\mathfrak{x})$ mit der ersten Hauptkrümmungstangente von P bildet. Ferner giebt (14):

$$\left(\frac{d\nu}{ds}\right)^2 = \frac{1}{R_1^2} \cos^2\varphi + \frac{1}{R_2^2} \sin^2\varphi. \tag{25}$$

Diese Formel erinnert an die Formel des Satzes 21, S. 135, mittels deren die Krümmung eines beliebigen Normalschnittes des Flächenpunktes P bestimmt wird. Doch standen in jener Formel rechts R_1 und R_2 statt R_1^2 und R_2^2. Wir können daher hier eine analoge geometrische Veranschaulichung wie auf S. 135 u. f. be-

nutzen: Auf der Richtung, die mit der ersten Hauptkrümmungsrichtung den Winkel φ bildet, tragen wir als Radiusvector den reciproken Wert von $d\nu : ds$ auf. Dabei ist zu beachten, dass im Fall einer reellen Fläche der Winkel $d\nu$ ebenso wie das Bogenelement ds als wesentlich positiv aufzufassen ist. Die Endpunkte der Radienvectoren bilden dann in der $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$-Ebene den Kegelschnitt:

$$\frac{\mathfrak{x}^2}{R_1^2} + \frac{\mathfrak{y}^2}{R_2^2} = 1,$$

der im reellen Fall eine Ellipse ist, die aber nicht mit der Ellipse auf S. 136 verwechselt werden darf, da sie die absoluten Werte der beiden Hauptkrümmungsradien, nicht aber die Wurzeln daraus zu Halbaxen hat. Also:

Satz 49: Trägt man auf jeder Fortschreitungsrichtung auf einer Fläche von einem Punkte P aus den Quotienten aus dem Bogenelement ds und demjenigen unendlich kleinen Winkel $d\nu$ auf, um den sich bei der Zurücklegung dieses Bogenelementes ds die Richtung der Flächennormale ändert, so bilden die Endpunkte der Radienvectoren einen Kegelschnitt, dessen Halbaxen auf den Hauptkrümmungstangenten von P liegen und die absoluten Werte der beiden Hauptkrümmungsradien von P als Längen haben. Im reellen Fall ist der Kegelschnitt eine Ellipse. Vorausgesetzt ist hierbei, dass die Fläche keine Schar von ∞^1 Minimalgeraden enthalte.

Sind φ_1 und φ_2 die Winkel, die zwei zu einander senkrechte Fortschreitungsrichtungen mit der ersten Hauptkrümmungsrichtung von P bilden, so ist $\cos^2\varphi_2 = \sin^2\varphi_1$ und $\sin^2\varphi_2 = \cos^2\varphi_1$, sodass nach (25) für die beiden zu diesen Richtungen gehörigen Werte von $\frac{d\nu}{ds}$ der Satz hervorgeht:

Satz 50: Geht man von einem Flächenpunkte P aus nach zwei zu einander senkrechten Richtungen um unendlich kleine Bogenelemente ds_1 und ds_2 weiter, so genügen die unendlich kleinen Winkel $d\nu_1$ und $d\nu_2$, um die sich zugleich die Richtung der Flächennormale ändert, der Gleichung:

$$\left(\frac{d\nu_1}{ds_1}\right)^2 + \left(\frac{d\nu_2}{ds_2}\right)^2 = \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2},$$

wenn R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien von P sind, die Fläche also keine Schar von ∞^1 Minimalgeraden enthält.

Gehören dagegen φ_1 und φ_2 zu conjugierten Richtungen, so ist nach Satz 40, S. 156:

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_1 \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi_2 = \frac{R_2^2}{R_1^2}.$$

Nun lässt sich $\operatorname{tg}^2 \varphi$ aus (25) leicht berechnen. Setzen wir dann die Werte von $\operatorname{tg}^2 \varphi_1$ und $\operatorname{tg}^2 \varphi_2$ hier ein, so ergiebt sich ohne Mühe:

Satz 51:[1] Geht man von einem Flächenpunkte nach conjugierten Richtungen um die Bogenelemente ds_1 und ds_2 fort, so genügen die unendlich kleinen Winkel $d\nu_1$ und $d\nu_2$, um die sich dabei die Richtung der Flächennormale ändert, der Gleichung:

$$\left(\frac{d\nu_1}{ds_1} \cdot \frac{d\nu_2}{ds_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{R_1 R_2}\right)^2,$$

wobei vorausgesetzt ist, dass die Fläche keine Schar von ∞^1 Minimalgeraden enthalte.

Die Formel (24) kann auch so geschrieben werden:

$$\frac{n - R_1}{n - R_2} = -\frac{R_1^2}{R_2^2} \operatorname{tg}^2 \varphi. \tag{26}$$

Ist ψ der Winkel, den der kürzeste Abstand AB der beiden Normalen PA und QB (siehe Fig. 57, S. 162) mit der Richtung der ersten Hauptkrümmung von P macht, so ist nach Satz 46 und nach dem schon soeben citierten Satz 40, S. 156:

$$\operatorname{tg} \varphi \cdot \operatorname{tg} \psi = -\frac{R_2}{R_1}, \tag{27}$$

sodass wir (26) auch so schreiben können:

$$\frac{n - R_1}{n - R_2} = -\operatorname{ctg}^2 \psi. \tag{28}$$

Wollen wir jetzt ausser der bestimmt gewählten Flächennormale PA alle unendlich benachbarten ins Auge fassen, so haben wir φ oder ψ alle möglichen Werte zu geben. Zu jedem Werte von ψ gehört ein kürzester Abstand AB. Die Gesamtheit aller kürzesten Abstände bestimmt eine Schar von ∞^1 Geraden, also eine geradlinige Fläche, deren Erzeugende die Normale PA oder die $\mathfrak{z}$-Axe senkrecht

[1] Diesen Satz finden wir ausdrücklich formuliert bei Kommerell, „Verallgemeinerung des Enneper'schen Satzes von der Torsion der Asymptotenlinien", Math.-naturw. Mitteilungen in Württemberg, 2. Serie, 3 Bd. (1901).

schneiden und zwar in Punkten A, deren Abstände n von P nach (28) als Functionen derjenigen Winkel ψ bestimmt werden, die diese Geraden mit der Richtung der ersten Hauptkrümmung von P, also mit der $\mathfrak{x}$-Axe, bilden. Es kommt nach (28):

$$n = \tfrac{1}{2}(R_1 + R_2) - \tfrac{1}{2}(R_1 - R_2)\cos 2\psi,$$

sodass in den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$:

$$(29) \quad \mathfrak{x} = t\cos\psi, \quad \mathfrak{y} = t\sin\psi, \quad \mathfrak{z} = \tfrac{1}{2}(R_1 + R_2) - \tfrac{1}{2}(R_1 - R_2)\cos 2\psi$$

die Gleichungen einer dieser Geraden AB sind, ausgedrückt mittels eines Parameters t. Bleiben t und ψ willkürlich, so liegt hier eine analytische Darstellung jener geradlinigen Fläche vor. Durch eine Betrachtung, die ähnlich der auf S. 149 ist, folgern wir hieraus:

Satz 52: Die Geraden der kürzesten Abstände einer bestimmten Flächennormale von den ihr unendlich benachbarten Normalen bilden ein Cylindroid.

Aus (28) erkennt man sofort: Im reellen Fall liegen die verschiedenen Endpunkte A der kürzesten Abstände, da $PA = n$ ist, zwischen den Punkten, für die $n = R_1$ und $n = R_2$ ist, d. h. zwischen den beiden Hauptkrümmungsmittelpunkten C_1 und C_2 von P. Für $\psi = \frac{\pi}{2}$ und $\psi = 0$ ergeben sich die beiden äussersten Lagen $n = R_1$ und $n = R_2$. Dabei ist nach (27) der Winkel $\varphi = 0$ bez. $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Die zu $\varphi = 0$ gehörige Gerade AB geht also durch den ersten Hauptkrümmungsmittelpunkt C_1 und ist zur zweiten Hauptkrümmungsrichtung von P parallel, und bei der Geraden für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist es umgekehrt. Hieraus folgt, dass diese beiden Geraden die oben (in Fig. 58 und 59) mit $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ bezeichneten Geraden sind.

Noch erwähnen wir: Für $\varphi = 0$ oder $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ergiebt sich ausser $n = R_1$ bez. R_2 noch aus (25):

$$\left(\frac{d\nu}{ds}\right)^2 = \frac{1}{R_1{}^2} \quad \text{bez.} \quad \frac{1}{R_2{}^2}$$

und also nach (19) noch $d\mathfrak{n} = 0$. Dies bedeutet: In diesem Falle giebt es zwischen den beiden unendlich nahen Normalen einen unendlich kleinen Abstand von höherer Ordnung als ds. Dann also schneiden die beiden Normalen einander. (Vgl. I S. 272, 273.) Dies hätten wir auch aus Satz 47 folgern können. Wir können dies Ergebnis so formulieren:

Satz 53: Eine Flächennormale schneidet eine unendlich benachbarte nur dann, wenn der Fusspunkt der letz-

teren auf einer Hauptkrümmungsrichtung des Fusspunktes der ersteren liegt, und zwar ist der Schnittpunkt alsdann der zugehörige Hauptkrümmungsmittelpunkt. Dabei ist vorausgesetzt, dass die Fläche keine Schar von ∞^1 Minimalgeraden enthalte.

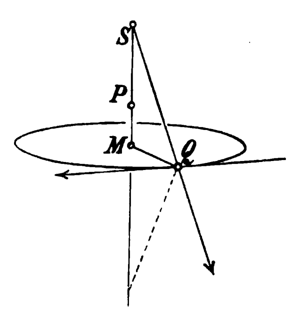


Fig. 60.

Es ist gut, sich dies geometrisch mit Hülfe der Indicatrix klar zu machen. In Fig. 60 sei P ein Flächenpunkt. Zu seiner Tangentenebene parallel legen wir eine Ebene in unendlich kleinem Abstand. Sie schneidet die Fläche nach S. 139 in der Indicatrix von P. In der Figur ist als Indicatrix eine Ellipse gewählt. Die Nor-

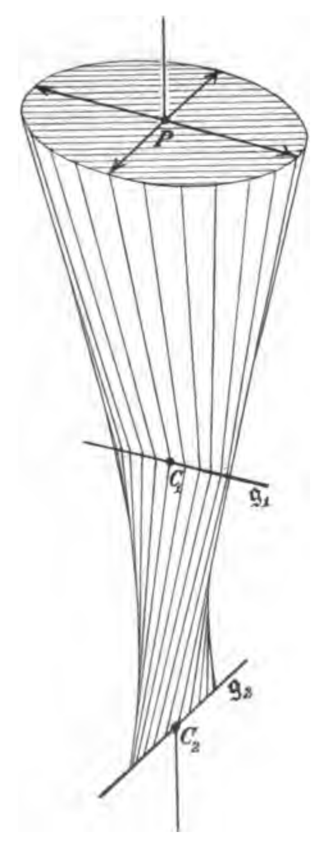


Fig. 61.

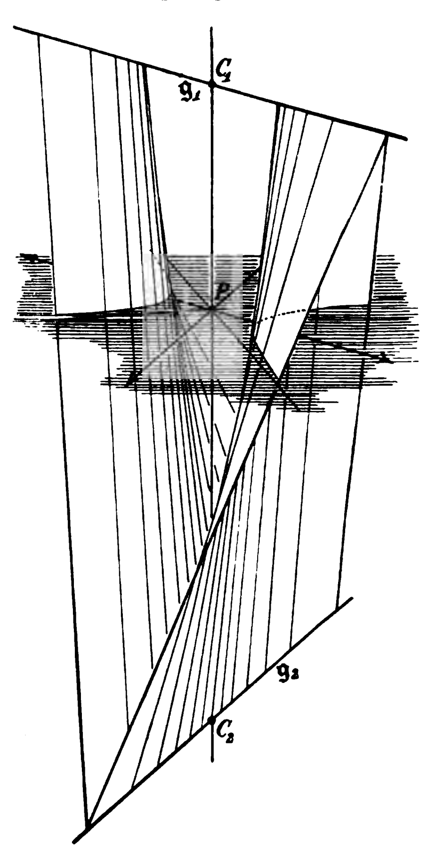


Fig. 62.

male von P geht durch die Mitte M der Indicatrix. Ist Q irgend ein Punkt auf der Indicatrix, so ist die Indicatrixtangente von Q zugleich Flächentangente. Da der Kegel, der die Fläche längs der Indicatrix berührt, nach Satz 30, S. 143, seine Spitze S in dem Punkte auf der Verlängerung von PM über P hinaus hat, für den PS doppelt so gross wie PM ist, so geht eine Flächentangente des Punktes Q nach dieser Stelle S. Jetzt haben wir zwei Tangenten von Q construiert. Auf beiden muss die Normale von Q senkrecht stehen.

Wenn nun diese Normale die Normale von P schneiden soll, so muss QM ihre Projection auf die Ebene der Indicatrix sein, sodass QM auf der Indicatrixtangente von Q senkrecht stehen muss. Dies aber tritt nur in den Scheiteln der Indicatrix ein, d. h. wenn Q auf einer Hauptkrümmungsrichtung von P liegt. So kommen wir wieder zu Satz 53.

In den Figuren 61 und 62 haben wir versucht, von der Lagerung der Normalen längs der Indicatrix eine Vorstellung zu geben. In Fig. 61 ist als Indicatrix eine Ellipse, in Fig. 62 eine Hyperbel gewählt. Doch hat man sich die Axen dieser Kegelschnitte, verglichen mit den Entfernungen PC_1 und PC_2, unendlich klein zu denken. Es sind die Geraden construiert worden, die ausser der Indicatrix noch die Geraden $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ treffen.

§ 9. Krümmungscurven und Haupttangentencurven.

Bisher haben wir unsere Betrachtungen immer auf die Umgebung eines beliebig gewählten Punktes (u, v) der Fläche beschränkt. Wir dehnen sie jetzt auf die ganze Fläche aus. Sind wie immer E, F, G und $L, M N$ die Fundamentalgrössen der Fläche, so haben wir im Punkte (u, v) drei Paare von Richtungen (k) als besonders ausgezeichnet kennen gelernt:

Erstens die Minimalrichtungen, für die

$$E + 2Fk + Gk^2 = 0$$

ist (vgl. S. 35), zweitens die Hauptkrümmungsrichtungen, für die

$$(EM - FL) - (GL - EN)k + (FN - GM)k^2 = 0$$

oder:

$$\begin{vmatrix} k^2 & E & L \\ -k & F & M \\ 1 & G & N \end{vmatrix} = 0$$

ist (vgl. S. 116), drittens die Haupttangentenrichtungen, für die

$$L + 2Mk + Nk^2 = 0$$

ist (vgl. S. 127). Schreiben wir $dv:du$ für k, so liegen die drei Gleichungen vor:

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = 0, \tag{1}$$

$$\begin{vmatrix} dv^2 & E & L \\ -dudv & F & M \\ du^2 & G & N \end{vmatrix} = 0, \tag{2}$$

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0. \tag{3}$$

Jede ist nach Satz 5, S. 13, als ein Paar von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung in u und v aufzufassen und definiert zwei Scharen von je ∞^1 Curven. Die durch (1) definierten Curven sind die schon öfters erwähnten Minimalcurven der Fläche.

Die durch (2) definierten beiden Scharen von je ∞^1 Curven heissen die Krümmungscurven der Fläche[1] und die durch (3) definierten beiden Scharen die Haupttangentencurven oder asymptotischen Curven der Fläche.[2]

Durch jeden allgemein gewählten Flächenpunkt (u, v) gehen zwei Minimalcurven, zwei Krümmungscurven und zwei Haupttangentencurven. Ihre Richtungen daselbst sind die Minimalrichtungen, die Hauptkrümmungsrichtungen und die Haupttangentenrichtungen. Die Minimalcurven sind stets imaginär, die Krümmungscurven auf reellen Flächen nach S. 117 stets reell und die Haupttangentencurven auf reellen Flächen an den hyperbolischen Stellen reell, an den elliptischen imaginär, nach S. 130.

Stillschweigend haben wir vorausgesetzt, dass der allgemeine Flächenpunkt zwei Hauptkrümmungsrichtungen habe. Da es jedoch nach S. 120 Flächen giebt, die nirgends solche haben, nämlich die Flächen mit einer oder zwei Scharen von Minimalgeraden, so müssen wir uns fragen, wie wir auf diesen die Krümmungscurven und Haupttangentencurven definieren wollen.

Bezüglich der Krümmungscurven bleiben wir stets bei der Definition durch die Gleichung (2). Enthält die Fläche zwei Scharen von Minimalgeraden, ist sie also nach Satz 9, S. 113,

---

[1] Nach Monge, siehe die Anm. auf S. 110.

[2] Nach Dupin, siehe die Anm. auf S. 127.

eine Kugel, so sind die Fundamentalgrössen L, M, N nach (3), S. 110, den Fundamentalgrössen E, F, G proportional, sodass die Gleichung (2) zur Identität wird. Daher ist jede beliebige Curve auf der Kugel, insbesondere in der Ebene, eine Krümmungscurve. Enthält die Fläche nur eine Schar von Minimalgeraden, ist sie aber nicht die Tangentenfläche einer Minimalcurve, so ist, wenn wir die krummen Minimalcurven als Parameterlinien (u) und die geraden Minimalcurven als Parameterlinien (v) benutzen, nach Satz 7, S. 113:

$$E = G = L = 0, \quad F \neq 0, \quad N \neq 0,$$

sodass (2) ergiebt: $dv^2 = 0$. Hier also fallen die beiden Scharen von Krümmungscurven in die Schar der Minimalgeraden (v) zusammen. Ist endlich die Fläche die Tangentenfläche einer Minimalcurve, so verlieren L, M, N nach S. 107 ihre Bedeutung, d. h. bei solchen Flächen sprechen wir überhaupt nicht von Krümmungscurven.

Nach Satz 53, S. 171, haben die Krümmungscurven auf einer Fläche von allgemeiner Art die Eigenschaft, dass die Flächennormalen, die von zwei unendlich benachbarten Punkten der Curve ausgehen, einander stets schneiden, dass also die Normalen der Fläche längs einer Krümmungscurve eine abwickelbare Fläche bilden. Diese Eigenschaft kann man direct zur Definition der Krümmungscurven benutzen. Denn die Normale des Punktes (u, v)

$$\mathfrak{x} = x + Xt, \quad \mathfrak{y} = y + Yt, \quad \mathfrak{z} = z + Zt$$

schneidet die Normale des unendlich benachbarten Punktes $(u + du, v + dv)$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= x + dx + (X + dX)\,t, \\ \mathfrak{y} &= y + dy + (Y + dY)\,t, \\ \mathfrak{z} &= z + dz + (Z + dZ)\,t \end{aligned}$$

nach (5) in I S. 272 dann und nur dann, wenn:

$$\begin{vmatrix} dx & X & dX \\ dy & Y & dY \\ dz & Z & dZ \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

ist. Multiplicieren wir diese Gleichung mit der nach XI (L) nicht verschwindenden Determinante

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v & X \\ y_u & y_v & Y \\ z_u & z_v & Z \end{vmatrix},$$

indem wir Reihe mit Reihe multiplicieren, so kommt

$$\begin{vmatrix} \mathbf{S}\, x_u\, dx & \mathbf{S}\, x_u X & \mathbf{S}\, x_u\, dX \\ \mathbf{S}\, x_v\, dx & \mathbf{S}\, x_v X & \mathbf{S}\, x_v\, dX \\ \mathbf{S}\, X dx & \mathbf{S}\, X^2 & \mathbf{S}\, X dX \end{vmatrix} = 0.$$

Aber es ist nach XI (A)

$$\mathbf{S}\, x_u\, dx = \mathbf{S}\, x_u (x_u\, du + x_v\, dv) = E\, du + F\, dv$$

u. s. w., ferner $\mathbf{S}\, x_u X = 0$, $\mathbf{S}\, x_v X = 0$ nach XI (I), weiterhin nach (10), S. 107.

$$\mathbf{S}\, x_u\, dX = \mathbf{S}\, x_u (X_u\, du + X_v\, dv) = - L\, du - M\, dv$$

u. s. w., sodass kommt:

$$\begin{vmatrix} E du + F dv & L du + M dv \\ F du + G dv & M du + N dv \end{vmatrix} = 0.$$

Aber dies ist die Gleichung (2). Daher:

Satz 54: Die Krümmungscurven einer Fläche sind diejenigen Curven der Fläche, längs deren die Flächennormalen eine abwickelbare Fläche bilden.

Dies gilt auch für die Flächen mit Scharen von Minimalgeraden.

Zugleich hat sich ergeben, dass die Differentialgleichung (2) auch in der Form (4) geschrieben werden kann.

Die Bedingung für eine Krümmungscurve kann noch anders ausgesprochen werden: Schreiben wir in der Determinante (4) statt der ersten Zeile die Summe der bez. mit X, Y, Z multiplicierten ersten, zweiten und dritten Zeile, so kommt wegen $\mathbf{S}\, X^2 = 1$, $\mathbf{S}\, X dX = 0$, $\mathbf{S}\, X dx = 0$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ dy & Y & dY \\ dz & Z & dZ \end{vmatrix} = 0$$

oder:

$$\frac{dY}{dy} = \frac{dZ}{dz}.$$

Ebenso kommt, dass dieser Bruch gleich $dX : dx$ ist. Also ist längs einer Krümmungscurve

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dY}{dy} = \frac{dZ}{dz}.$$

Umgekehrt ziehen diese Relationen die Gleichung (4) nach sich. Daher:

Satz 55: Die Krümmungscurven einer Fläche sind diejenigen Curven, längs deren die Incremente der rechtwinkligen Punktcoordinaten proportional den Incrementen der Richtungscosinus der Normalen sind.

Sind auf der Fläche in einem allgemein gewählten Punkt zwei Hauptkrümmungsrichtungen vorhanden, so stehen sie nach Satz 11, S. 119, auf einander senkrecht. Im allgemeinen also bilden die Krümmungscurven ein Orthogonalsystem. Wir haben uns zu fragen, wie es hiermit in den Ausnahmefällen steht: Enthält die Fläche eine Schar von Minimalgeraden und eine Schar von krummen Minimalcurven, so fallen, wie wir vorhin sahen, beide Scharen von Krümmungscurven in die Minimalgeraden zusammen. Aber nach Satz 47, I S. 338, können wir sagen, dass jede Minimalgerade auf sich selbst senkrecht steht, mithin auch, dass die Orthogonalität der Krümmungscurven auch jetzt statt hat. Wenn die Fläche zwei getrennte Scharen von Minimalgeraden enthält und demnach eine Kugel oder insbesondere eine Ebene ist, so ist, wie wir sahen, jede Curve eine Krümmungscurve, also können wir auch hier Orthogonalsysteme von Krümmungscurven bilden; es giebt ihrer aber unendlich viele.

Liegt insbesondere eine abwickelbare Fläche vor, die natürlich nicht die Tangentenfläche einer Minimalcurve sein soll, so fallen überall nach Satz 20, S. 132, die beiden Haupttangenten in die Erzeugenden, und deshalb sind nach Satz 23, S. 135, die Krümmungscurven der einen Schar diese Erzeugenden selbst. Die der anderen Schar sind die orthogonalen Trajectorien c der Erzeugenden, d. h. nach Satz 16, I S. 296, die Filarevolventen der Gratlinie. Nach Satz 54 also bilden die Flächennormalen längs einer jeden dieser Trajectorien c eine abwickelbare Fläche.

Dies Ergebnis ist aber nur ein specieller Fall des Satzes 29, I S. 316, nach dem auch diejenigen Geraden, die längs einer orthogonalen Trajectorie c diese Curve c senkrecht schneiden und einen nicht notwendig rechten, aber constanten Winkel mit den Erzeugenden bilden, auf einer abwickelbaren Fläche liegen.

Aus diesem Satze können wir einen anderen über Krümmungscurven ableiten:

Es seien zwei Flächen F_1 und F_2 gegeben, die einander längs einer Curve c unter constantem Winkel α schneiden, sodass also in jedem Punkte P von c die Normalen n_1 und n_2 beider Flächen denselben Winkel α mit einander bilden. Ist dann c eine Krümmungscurve auf der einen Fläche, auf F_1, so bilden die Normalen n_1

nach Satz 54 eine abwickelbare Fläche. Auf dieser Fläche ist c eine orthogonale Trajectorie der Erzeugenden n_1. Nun schneiden die Geraden n_2 als Normalen von F_2 die Curve c ebenfalls senkrecht; da sie ausserdem mit den Geraden n_1 den constanten Winkel α bilden, so folgt nach dem soeben angegebenen Satze: Die Normalen n_2 der zweiten Fläche F_2 längs c bilden auch eine abwickelbare Fläche. Nach Satz 54 folgt hieraus: Die Curve c ist auch auf F_2 eine Krümmungscurve. Daher:

Satz 56: Schneiden zwei Flächen einander längs einer Curve unter constantem Winkel und ist die Curve auf der einen Fläche eine Krümmungscurve, so ist sie es auch auf der anderen.

Um dies auch analytisch zu beweisen, bezeichnen wir die Richtungscosinus der Normalen auf der einen Fläche F_1 mit X_1, Y_1, Z_1, auf der anderen Fläche F_2 mit X_2, Y_2, Z_2. In einem Punkte (x, y, z) der Schnittcurve c beider Flächen sollen nach Voraussetzung die Normalen einen constanten Winkel α bilden, d. h.:

$$\mathbf{S}\, X_1 X_2 = \cos\alpha\,.$$

Wenn wir also längs der Schnittcurve c fortschreiten, so muss

$$\mathbf{S}\, X_1\, d X_2 + \mathbf{S}\, X_2\, d X_1 = 0$$

sein. Ist nun c auf F_1 eine Krümmungscurve, so sind dX_1, dY_1, dZ_1 nach Satz 55 proportional dx, dy, dz, sodass sich $\mathbf{S}\, X_2\, dX_1$ nur um einen Factor von $\mathbf{S}\, X_2\, dx$ unterscheidet. Diese Summe aber ist gleich Null, da die Richtung $(X_2 : Y_2 : Z_2)$ auf der Tangentenrichtung $(dx : dy : dz)$ von c senkrecht steht. Unsere Gleichung giebt also:

$$\mathbf{S}\, X_1\, dX_2 = 0\,.$$

Ausserdem ist wegen $\mathbf{S}\, X_2^2 = 1$ auch:

$$\mathbf{S}\, X_2\, dX_2 = 0\,.$$

Andererseits ist, weil die Normalen auf den Tangenten von c senkrecht stehen:

$$\mathbf{S}\, X_1\, dx = 0\,, \quad \mathbf{S}\, X_2\, dx = 0\,.$$

Also folgt, dass dx, dy, dz denselben beiden linearen homogenen Gleichungen genügen wie dX_2, dY_2, dZ_2. Mithin sind die einen Incremente den anderen längs c proportional, d. h. nach Satz 55 ist c auf F_2 eine Krümmungscurve.

Wir können diese Schlussfolgerung umkehren: Es werde vorausgesetzt, dass die beiden Flächen F_1 und F_2 einander in einer

Curve c schneiden, die auf beiden Flächen Krümmungscurve ist. Nach Satz 55 sind dann längs der Schnittcurve c sowohl die Incremente dX_1, dY_1, dZ_1 als auch die Incremente dX_2, dY_2, dZ_2 proportional dx, dy, dz. Da aber $\mathbf{S}\, X_1\, dx = 0$ und $\mathbf{S}\, X_2\, dx = 0$ ist, so folgt also:

$$\mathbf{S}\, X_1\, dX_2 = 0, \quad \mathbf{S}\, X_2\, dX_1 = 0,$$

also auch:

$$\mathbf{S}\, X_1\, dX_2 + \mathbf{S}\, X_2\, dX_1 = 0$$

oder:

$$\mathbf{S}\, X_1\, X_2 = \text{Const.}$$

und zwar längs c. Somit:[1]

Satz 57: Schneiden zwei Flächen einander längs einer Curve, die auf beiden Flächen eine Krümmungscurve ist, so bilden sie längs der Curve einen constanten Winkel mit einander.

Aus der Proportionalität von dX_1, dY_1, dZ_1 mit dx, dy, dz darf nicht ohne weiteres auf die Gleichwertigkeit der Gleichungen $\mathbf{S}\, X_2\, dX_1 = 0$ und $\mathbf{S}\, X_2\, dx = 0$ geschlossen werden, sobald dX_1, dY_1, dZ_1 alle drei gleich Null sind, weil dann der Proportionalitätsfactor gleich Null ist. Dieser Fall tritt nur dann ein, wenn längs der Schnittcurve c die eine Fläche constante Stellung hat, d. h. wenn c der senkrechte Querschnitt eines Cylinders und somit eben ist. Da alle Curven in einer Ebene Krümmungscurven sind, so brauchen wir unsere Sätze nur noch für den Fall des Schnittes einer Fläche mit einer Ebene zu beweisen.

Sind X, Y, Z die Richtungscosinus einer Fläche, a, b, c die einer Ebene, so ist längs der Schnittcurve

$$\mathbf{S}\, X dx = 0, \quad \mathbf{S}\, a dx = 0.$$

Findet der Schnitt unter constantem Winkel α statt, so ist längs der Curve:

$$\mathbf{S}\, a X = \cos \alpha,$$

d. h.

$$\mathbf{S}\, a dX = 0.$$

Da ausserdem

$$\mathbf{S}\, X dX = 0$$

ist, so folgt, dass dX, dY, dZ denselben beiden linearen homogenen Gleichungen wie dx, dy, dz genügen, also einander proportional sind, sodass die Curve auf der Fläche nach Satz 55 eine Krümmungs-

[1] Die Sätze 56 und 57 rühren her von BONNET, „Mémoire sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques", Journal de l'École polyt., 35. cah. (1853).

curve ist. Die Umkehrung ist erlaubt: Ist die Curve auf der Fläche eine Krümmungscurve, so sind dX, dY, dZ proportional dx, dy, dz, sodass aus der letzten Gleichung rückwärts die übrigen folgen. Daher:[1]

Satz 58: Schneidet eine Ebene eine Fläche unter constantem Winkel, so ist die Schnittcurve eine Krümmungscurve der Fläche.

Und:

Satz 59: Hat eine Fläche eine ebene Krümmungscurve, so hat sie längs der Curve eine constante Neigung zur Ebene der Curve.

Da auch auf der Kugel jede Curve eine Krümmungscurve ist, so folgt insbesondere aus Satz 56:

Satz 60: Schneidet eine Kugel eine Fläche unter constantem Winkel, so ist die Schnittcurve eine Krümmungscurve der Fläche.

Und aus Satz 57:

Satz 61: Hat eine Fläche eine sphärische Krümmungscurve, so hat sie längs der Curve eine constante Neigung zur Kugel der Curve.

Ist eine Krümmungscurve einer Fläche eine Gerade, so muss nach Satz 59 jede Ebene durch die Gerade die Fläche unter constantem Winkel schneiden, d. h. die Fläche muss längs der Geraden überall dieselbe Tangentenebene haben.

Satz 62: Enthält eine Fläche eine Gerade, so ist diese Gerade dann und nur dann eine Krümmungscurve, wenn die Fläche in allen Punkten der Geraden dieselbe Tangentenebene hat.

Wenn alle Krümmungscurven der einen Schar Geraden sein sollen, so muss daher die geradlinige Fläche nach Satz 7, I S. 277, abwickelbar sein.

Zu unseren Sätzen geben wir einige Beispiele:

1. Beispiel: Eine Rotationsfläche wird von jeder Ebene senkrecht zur Drehaxe und von jeder Ebene durch die Drehaxe in einer Krümmungscurve

---

[1] Die Sätze 58 bis 61 fasst man unter dem Namen des Satzes von Joachimsthal zusammen, siehe für ebene Krümmungscurven seine Abhandlung: „Demonstrationes theorematum ad superficies curvas spectantium", Journal f. d. reine u. angew. Mathem. 30. Bd. (1846). Die oben erwähnten allgemeinen Sätze von Bonnet sind jüngeren Datums.

geschnitten. Dass in der That die Flächennormalen längs eines Breitenkreises eine abwickelbare Fläche, nämlich einen Kegel, und die längs eines Meridians ebenfalls eine abwickelbare Fläche, nämlich eine Ebene, bilden, leuchtet unmittelbar ein.

2. Beispiel: Die Rotationsflächen, von denen soeben die Rede war, kann man durch Drehung eines Meridians um die Axe erzeugen. Indem man diese Erzeugungsweise verallgemeinert, kommt man zur Familie der Gesimsflächen:[1] Eine starr gedachte Ebene E, in der eine Curve γ liegt, werde stetig in ∞^1 Lagen übergeführt. Dabei umhüllt sie nach Satz 15, I S. 293, eine abwickelbare Fläche und ist Schmiegungsebene der Gratlinie c dieser Fläche. Die Fläche aller Lagen von γ, die sogenannte Gesimsfläche, hat nun die Curven γ zu Krümmungscurven. Jeder Punkt P von γ bewegt sich nämlich beständig nach I S. 299 auf einer Planevolvente k von c, und die Tangente seiner Bahn ist jederzeit senkrecht zur Ebene E. Hiernach ist nun auch die Tangentenebene der Fläche in P senkrecht zur Ebene E. Die Ebene E schneidet also die Fläche in allen ihren Lagen überall senkrecht, woraus die Behauptung nach Satz 58 folgt. Die zweite Schar der Krümmungscurven besteht aus den erwähnten Planevolventen k von c. Wählen wir irgend eine Planevolvente von c aus, also die Curve $\mathfrak{c}$, die alle ∞^1 Ebenen E senkrecht schneidet, und bewegen wir nun eine Ebene senkrecht zu $\mathfrak{c}$ so, wie es in Satz 21, I S. 305, angegeben ist, so erzeugt eine Curve γ in dieser Ebene wieder eine Gesimsfläche. Ist γ insbesondere ein Kreis um den Punkt, in dem die Ebene die Curve $\mathfrak{c}$ trifft, so entsteht eine Fläche von ∞^1 congruenten Kreisen, deren Ebenen sämtlich zu dem Ort $\mathfrak{c}$ der Mitten der Kreise senkrecht sind. Sie heisst eine Röhrenfläche. (Siehe Fig. 63.) Die Kreise γ bilden die eine Schar der Krümmungscurven und ihre orthogonalen Trajectorien k die andere Schar.

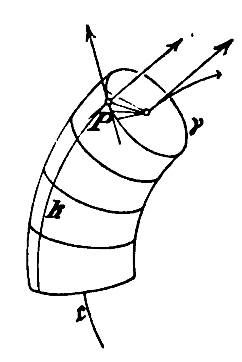


Fig. 63.

Im allgemeinen ist die Aufstellung der endlichen Gleichungen der Krümmungscurven unmöglich, weil sie die Integration der Differentialgleichung (2) verlangt. In besonderen Fällen ist die Integration jedoch durchführbar. Hierzu ein Beispiel.

Beispiel: Auf der gemeinen Schraubenfläche (siehe (20) auf S. 60):

$$x = u\cos v\,, \qquad y = u\sin v\,, \qquad z = qv$$

ist

$$E = 1\,, \qquad F = 0\,, \qquad G = u^2 + q^2$$

und nach S. 119:

$$L = 0\,, \qquad M = -\frac{q}{\sqrt{u^2+q^2}}\,, \qquad N = 0\,,$$

sodass hier die Differentialgleichung (2) der Krümmungscurven so lautet:

$$(u^2 + q^2)\,dv^2 - du^2 = 0\,.$$

[1] Diese Flächen wurden zuerst von Monge, vgl. die Anm. auf S. 110, untersucht, insbesondere auch die nachher genannten Röhrenflächen.

Sie ist in der Form:

$$dv = \pm \frac{du}{\sqrt{u^2 + q^2}}$$

sofort zu integrieren und giebt:

$$v = \log\left(u \pm \sqrt{u^2 + q^2}\right) + \text{Const.}$$

Die Curven sind die Diagonalcurven des auf S. 60 bestimmten Isothermennetzes und infolge dessen in ihrem allgemeinen Verlauf in der Fig. 17, S. 61, leicht zu verfolgen.

Die Parameterlinien (u) und (v) einer Fläche sind selbst die Krümmungscurven, wenn die Gleichung (2) die Form

$$du\,dv = 0$$

hat, wenn also

$$EM - FL = 0, \quad FN - GM = 0$$

ist. Ist $F \neq 0$, so ist dann

$$L = \frac{EM}{F}, \quad N = \frac{GM}{F},$$

d. h.

$$E : F : G = L : M : N,$$

was nach (3), S. 110, bedeutet, dass die Fläche lauter Nabelpunkte hat und also eine Kugel oder Ebene ist (nach Satz 8, S. 113). Ist $F = 0$, so kommt $EM = GM = 0$, mithin, da E und G nicht beide gleich Null sind, $M = 0$. Daher:

Satz 63: Die Parametercurven einer Fläche, die keine Kugel oder Ebene ist, sind nur dann die Krümmungscurven, wenn die zugehörigen Fundamentalgrössen F und M auf der ganzen Fläche gleich Null sind. —

Was nun die Haupttangentencurven anbetrifft, so folgt aus Satz 43, S. 156, dass je zwei Ebenen, die die Fläche in unendlich benachbarten Punkten einer solchen Curve berühren, einander in der Tangente der Curve schneiden. Die abwickelbare Fläche also, die von den ∞^1 Tangentenebenen der Fläche längs einer Haupttangentencurve umhüllt wird, hat die Curve selbst zur Gratlinie. Oder nach Satz 14, I S. 292:

Satz 64: Die Haupttangentencurven einer Fläche sind diejenigen Curven, deren Schmiegungsebenen zugleich Tangentenebenen der Fläche sind, oder also: deren Binormalen mit den Flächennormalen zusammenfallen, oder endlich: deren Hauptnormalen Tangenten der Fläche sind.

Die Definitionsgleichung (3) der Haupttangentencurven versagt

nur dann, wenn die Fundamentalgrössen L, M, N ihre Bedeutung verlieren, d. h. auf den Tangentenflächen der Minimalcurven (vgl. S. 107). Sie wird zur Identität, d. h. jede Curve auf der Fläche ist eine Haupttangentencurve, wenn $L = M = N = 0$ oder also die Fläche nach Satz 4, S. 107, eine Ebene ist. In der Ebene ist also jede Curve eine Haupttangentencurve.

Die beiden Scharen von Haupttangentencurven fallen zusammen, wenn die linke Seite der Gleichung (3) ein vollständiges Quadrat, d. h. $LN - M^2 = 0$ oder also die Fläche nach Satz 19, S. 132, abwickelbar ist. Alsdann bilden die Erzeugenden die einzige Schar von Haupttangentencurven.

Beispiel: Es liege eine nicht-abwickelbare geradlinige Fläche vor. Die eine Schar der Haupttangentencurven wird von den Erzeugenden gebildet, nach S. 130. Ist die Fläche keine Fläche zweiter Ordnung (vgl. Satz 31, S. 144), so ist die andere Schar nicht geradlinig. Wollen wir sie bestimmen, so können wir so verfahren: Es sind nach (2), I S. 271:

$$x = \varphi(u) + v f(u), \quad y = \chi(u) + v g(u), \quad z = \psi(u) + v h(u) \tag{5}$$

die Gleichungen einer allgemeinen geradlinigen Fläche. Berechnen wir hier L, M, N nach (9), S. 106, so ergiebt sich, dass DL eine ganze quadratische Function von v ist, deren Coefficienten noch u enthalten, dass ferner DM nur von u abhängt und $DN = 0$ ist, sodass sich von der Differentialgleichung (3) zunächst die Gleichung $du = 0$ absondert, die aussagt, dass die geradlinigen Erzeugenden (u) der Fläche Haupttangentencurven sind. Ausserdem bleibt dann für die zweite Schar der Haupttangentencurven eine Differentialgleichung von der Form:

$$\frac{dv}{du} = A(u) + B(u)v + C(u)v^2,$$

d. h. nach I S. 213, 214 eine Riccati'sche Differentialgleichung. Wir wissen nach I S. 215, dass vier beliebige Lösungen

$$v = \omega_1(u), \quad v = \omega_2(u), \quad v = \omega_3(u), \quad v = \omega_4(u) \tag{6}$$

dieser Gleichung ein constantes Doppelverhältnis haben. Wenn wir nun — was wir thun dürfen — voraussetzen, dass in den Gleichungen (5) der Fläche die Grössen f, g, h die Richtungscosinus der geradlinigen Erzeugenden sind (wie in (9), I S. 275), so bedeutet v den Abstand des Punktes (u, v) der Fläche von der Flächencurve:

$$x = \varphi(u), \quad y = \chi(u), \quad z = \psi(u),$$

und zwar gemessen auf der durch den Punkt (u, v) gehenden Erzeugenden. Mithin folgt, dass die vier Haupttangentencurven (6) solche vier Strecken v auf jeder Erzeugenden abschneiden, die ein auf der ganzen Fläche constantes Doppelverhältnis haben. Oder nach Satz 38, I S. 332:

Satz 65:[1] Die krummlinigen Haupttangentencurven einer ge-

[1] P. Serret, „Théorie nouvelle géométrique et mécanique des courbes à double courbure", Paris 1860.

radlinigen Fläche haben die Eigenschaft, dass je vier von ihnen alle Erzeugenden der Fläche in demselben Doppelverhältnis durchsetzen.

Insbesondere erhalten wir für Flächen zweiter Ordnung den

Satz 66: Die beiden Geradenscharen auf einer Fläche zweiter Ordnung haben die Eigenschaft, dass vier Geraden der einen Schar von allen Geraden der anderen Schar in demselben Doppelverhältnis geschnitten werden.

Die Parametercurven (u) und (v) sind selbst die Haupttangentencurven, wenn sich die Differentialgleichung (3) auf

$$du\,dv = 0$$

reduciert. Daher:

Satz 67: Die Parameterlinien einer Fläche sind die Haupttangentencurven, wenn die zugehörigen Fundamentalgrössen L und N auf der Fläche gleich Null sind.

Beispiel: Bei der oben in einem Beispiel erwähnten gemeinen Schraubenfläche tritt dieser Fall ein. Die Haupttangentencurven (v) sind hier die Geraden der Fläche, die Haupttangentencurven (u) gemeine Schraubenlinien. Da hier auch $F = 0$ ist, so bilden die Haupttangentencurven ein Orthogonalsystem.

Dieses Beispiel führt uns zu der Frage, wann überhaupt die Haupttangentencurven ein Orthogonalsystem bilden. Da die Haupttangenten eines Flächenpunktes den Asymptoten seiner Indicatrix parallel sind (vgl. S. 140), so tritt dies ein, wenn alle Indicatricen gleichseitige Hyperbeln sind, d. h. wenn nach (8), S. 135, die beiden Hauptkrümmungsradien einander überall entgegengesetzt gleich sind. Daher:

Satz 68: Die Haupttangentencurven einer Fläche bilden ein Orthogonalsystem, sobald überall auf der Fläche die Summe der beiden Hauptkrümmungsradien gleich Null ist.

Beispiel: Ausser der gemeinen Schraubenfläche können wir hier das Catenoid nach Satz 16, S. 126, als Beispiel erwähnen. Danach ist das Catenoid die einzige Rotationsfläche mit zu einander orthogonalen Haupttangentencurven. Die Gleichungen des Catenoids können wir, wenn wir die Leitlinie der Kettenlinie, d. h. die Rotationsaxe, als z-Axe wählen, so schreiben:

$$x = \frac{a}{2}\left(e^{u} + e^{-u}\right)\cos v, \qquad y = \frac{a}{2}\left(e^{u} + e^{-u}\right)\sin v, \qquad z = au.$$

Nach (9), S. 106, ist hier:

$$LD = -ND, \qquad MD = 0,$$

also die Differentialgleichung (3) der Haupttangentencurven:

$$du^2 - dv^2 = 0.$$

Sie zerfällt in:

$$du + dv = 0, \qquad du - dv = 0.$$

Also sind die Curven

$$u + v = \text{Const.}, \qquad u - v = \text{Const.}$$

hier die Haupttangentencurven.

§ 10. Systeme von conjugierten Curven.

Wenn man eine Fläche mit zwei Scharen von je ∞^1 Curven in der Art überzieht, dass in jedem Punkte der Fläche die hindurchgehenden Curven der beiden Scharen conjugierte Richtungen haben, so liegt ein System von conjugierten Curven vor. Nach Satz 44, S. 157, werden alsdann in jedem Punkte der Fläche die Tangenten der beiden hindurchgehenden Curven harmonisch durch die beiden Haupttangenten getrennt. Bewegt sich ein Punkt längs einer Curve der einen Schar, so dreht sich dabei seine Tangentenebene beständig um die jeweilige Tangente der durch ihn gehenden Curve der anderen Schar. Oder auch: Die Tangentenebenen längs einer Curve der einen Schar erzeugen eine abwickelbare Fläche, deren Geraden die Tangenten der Curven der anderen Schar in ihren Schnittpunkten mit jener einen Curve sind. (Siehe Fig. 64.) Nach den Erörterungen auf S. 154 hat der Begriff der conjugierten Curven nur auf den abwickelbaren Flächen keine bestimmte Bedeutung, weil hier die eine Curvenschar die der Erzeugenden sein muss, während die andere Schar ganz beliebig sein kann. Insbesondere können wir in der Ebene jedes System von Curven als conjugiert bezeichnen. Von den Tangentenflächen der Minimalcurven haben wir dagegen hier völlig abzusehen (nach S. 154). Auf einer beliebigen Fläche sind die Krümmungscurven nach Satz 41, S. 156, zu einander conjugiert; auch sind die Haupttangentencurven jeder einzelnen Schar zu sich selbst conjugiert, nach Satz 42, S. 156. Umgekehrt: wenn die beiden conjugierten Scharen zusammenfallen, so bilden sie notwendig eine der beiden Scharen von Haupttangentencurven.

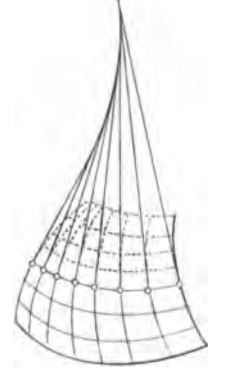


Fig. 64.

Fragen wir uns, wann eine Differentialgleichung (vgl. Satz 5, S. 13):

$$(1) \qquad A(u,v)\,du^2 + 2B(u,v)\,du\,dv + C(u,v)\,dv^2 = 0$$

ein System von conjugierten Curven definiert. Die Gleichung liefert für jeden Punkt (u, v) der Fläche die Werte k und $\varkappa$ für die Richtungen $(dv:du)$ der beiden durch ihn gehenden Curven, sodass

$$A + 2Bk + Ck^2 = 0, \qquad A + 2B\varkappa + C\varkappa^2 = 0$$

ist. Nach Satz 39, S. 155, ist zu fordern, dass diese Gleichungen die Gleichung

$$(2) \qquad L + M(k + \varkappa) + Nk\varkappa = 0$$

nach sich ziehen. Da

$$k + \varkappa = -\frac{2B}{C}, \qquad k\varkappa = \frac{A}{C}$$

ist, so ergiebt sich:

Satz 69: Die durch die Differentialgleichung

$$A(u,v)\,du^2 + 2B(u,v)\,du\,dv + C(u,v)\,dv^2 = 0$$

definierten beiden Curvenscharen auf einer Fläche sind zu einander conjugiert, wenn die Coefficienten A, B, C mit den Fundamentalgrössen zweiter Ordnung L, M, N durch die Bedingung:

$$LC - 2MB + NA = 0$$

verknüpft sind.

Allerdings haben wir oben stillschweigend $C \neq 0$ angenommen. Ist $C = 0$, aber $A \neq 0$, so kommen wir zu demselben Ergebnis, wenn wir statt $dv:du$ das Verhältnis $du:dv$ benutzen. Ist $A = C = 0$, so ist (1) die Differentialgleichung

$$du\,dv = 0$$

der Parameterlinien (u) und (v), für die $k = 0$, $\varkappa = \infty$ ist, sodass sich die Bedingung (2) hier — nach Division mit $\varkappa$ — auf $M = 0$ reduciert. So kommen wir zu folgendem Satz, der übrigens ein Specialfall des obigen ist:

Satz 70: Die Parameterlinien (u) und (v) einer Fläche sind dann und nur dann zu einander conjugiert, wenn die zweite Fundamentalgrösse zweiter Ordnung, also M, für alle Werte von u und v gleich Null ist.

Nach (9), S. 106, ist diese Bedingung $M = 0$ ausführlich geschrieben diese:

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} x_{uv} & x_u & x_v \\ y_{uv} & y_u & y_v \\ z_{uv} & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0.$$

Ist sie erfüllt, so giebt es drei nicht sämtlich verschwindende Functionen α, β, γ von u und v derart, dass gleichzeitig:

$$\alpha x_{uv} + \beta x_u + \gamma x_v = 0,$$
$$\alpha y_{uv} + \beta y_u + \gamma y_v = 0,$$
$$\alpha z_{uv} + \beta z_u + \gamma z_v = 0$$

ist, weil dies drei lineare homogene Gleichungen für α, β, γ sind, deren Determinante gleich Null ist. Wäre $\alpha = 0$, so wären x_u, y_u, z_u proportional x_v, y_v, z_v, d. h. die Functionaldeterminante von je zweien der Functionen x, y, z wäre gleich Null, was nach Satz 1, S. 5, auszuschliessen ist. Da also $\alpha \neq 0$ ist, so folgt, wenn $-\beta:\alpha$ mit a und $-\gamma:\alpha$ mit b bezeichnet wird: Sind die Parametercurven zu einander conjugiert, so giebt es zwei Functionen $a(u, v)$ und $b(u, v)$ derart, dass:

$$x_{uv} = a x_u + b x_v,$$
$$y_{uv} = a y_u + b y_v,$$
$$z_{uv} = a z_u + b z_v$$

ist. Umgekehrt, wenn drei solche Gleichungen gelten, so folgt aus ihnen wieder die Gleichung (3). Mithin können wir sagen:

Satz 71:[1] Liegt eine Fläche vor:

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v),$$

so sind ihre Parametercurven (u) und (v) dann und nur dann zu einander conjugiert, wenn die drei Functionen φ, χ, ψ von u und v sämtlich, für ϑ eingesetzt, ein und derselben Gleichung von der Form:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\, \partial v} = a(u, v) \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + b(u, v) \frac{\partial \vartheta}{\partial v}$$

genügen.

Eine Gleichung von der Form:

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\, \partial v} = a(u, v) \frac{\partial \vartheta}{\partial u} + b(u, v) \frac{\partial \vartheta}{\partial v}$$

---

[1] Dieser Satz, nach dem zu einem jeden System von conjugierten Curven eine sogenannte Laplace'sche partielle Differentialgleichung gehört, ist von Darboux. Siehe seine „Leçons sur la théorie générale des surfaces", 1. partie, Paris 1887.

mit gegebenen Functionen a und b und unbekannter oder zu suchender Function ϑ ist eine Bedingung für die ersten und zweiten partiellen Differentialquotienten von ϑ, also eine sogenannte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für ϑ.

Man kann diese Gleichung benutzen, um einige Flächenfamilien abzuleiten, deren Parameterlinien conjugiert sind, indem man nämlich für a und b besonders einfache Functionen wählt und dann die allgemeinste Function ϑ zu bestimmen sucht, die der Gleichung genügt.

Beispiel: Die einfachste Annahme ist: $a = b = 0$. Dann liegt die Gleichung vor:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u \, \partial v} = 0 .$$

Sie sagt aus, dass $\frac{\partial \vartheta}{\partial u}$ von v frei und $\frac{\partial \vartheta}{\partial v}$ von u frei ist, d. h. ϑ hat die Form:

$$\vartheta = U(u) + V(v) .$$

Satz 71 führt uns daher zu den Flächen von der Darstellungsform:

$$x = U_1(u) + V_1(v), \quad y = U_2(u) + V_2(v), \quad z = U_3(u) + V_3(v). \tag{5}$$

Hier sind also U_1, U_2, U_3 Functionen von u allein und V_1, V_2, V_3 Functionen von v allein. Die Curven (u) sind offenbar sämtlich durch Schiebung aus der einen Curve:

$$x = V_1(v), \quad y = V_2(v), \quad z = V_3(v)$$

ableitbar. Die Fläche (5) enthält also eine Schar von ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven. Eine solche Fläche heisst eine Schiebungsfläche oder Translationsfläche.[1]

Wenn eine Curve:

$$x = V_1(v), \quad y = V_2(v), \quad z = V_3(v),$$

geschrieben in dem Parameter v, durch Schiebungen in ∞^1 Lagen gebracht werden soll, so haben wir zu den Coordinaten x, y, z solche Grössen zu addieren, die sich stetig ändern, also Functionen U_1, U_2, U_3 eines zweiten Parameters u zu addieren. So gehen alsdann die Gleichungen (5) hervor. Jede Schiebungsfläche ist daher in der Form (5) darzustellen. Sie lehrt, dass auch die Parametercurven (v) sämtlich durch Schiebung aus der einen Curve

$$x = U_1(u), \quad y = U_2(u), \quad z = U_3(u)$$

herumgehen. Also, mit Rücksicht auf Satz 71:

---

[1] Die Schiebungsflächen wurden ausführlich untersucht von Lie, „Beiträge zur Theorie der Minimalflächen, I.“, Math. Annalen 14. Bd. (1879). Diese Abhandlung, auf die wir später noch zu verweisen haben, ist eine neue Bearbeitung einer älteren Abhandlung: „Synthetisch-analytische Untersuchungen über Minimal-Flächen, I.“, Archiv for Math. og Naturvidenskab 2. Bd. (1877).

Satz 72: Jede Schiebungsfläche enthält zwei Scharen von je ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven, und diese beiden Scharen sind zu einander conjugiert.

Dies letztere sieht man ebenfalls geometrisch sofort ein: Wenn eine starre Curve c stetig verschoben wird, sodass einer ihrer Punkte eine Curve γ beschreibt (siehe Fig. 65), so haben die Punkte der Curve c in jedem Augenblicke parallele Bewegungsrichtungen. Es sind dies die Tangenten der durch die Punkte gehenden mit γ congruenten Curven in homologen Punkten. Diese Tangenten bilden einen Cylinder, d. h. eine abwickelbare Fläche, sodass Satz 45, S. 157, angewandt werden kann.

Nächst den Cylindern, die ja augenscheinlich Schiebungsflächen sind, sind die Paraboloide

$$z = a x^2 + b y^2$$

als besonders einfache Schiebungsflächen zu nennen. Denn sie lassen sich so darstellen:

$$x = u, \qquad y = v, \qquad z = a u^2 + b v^2.$$

Hier ist also $U_1 = u$, $U_2 = 0$, $U_3 = a u^2$ und $V_1 = 0$, $V_2 = v$, $V_3 = b v^2$. Die Curven c und γ sind hier Parabeln.

Es kann wohl vorkommen, dass die beiden Scharen von Curven dieselbe analytische Darstellung haben; alsdann wird die Fläche von einer Schar von ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven doppelt überdeckt. Dieser Fall tritt ein, wenn die Functionen U_1, U_2, U_3 von u, abgesehen von additiven

Fig. 65.

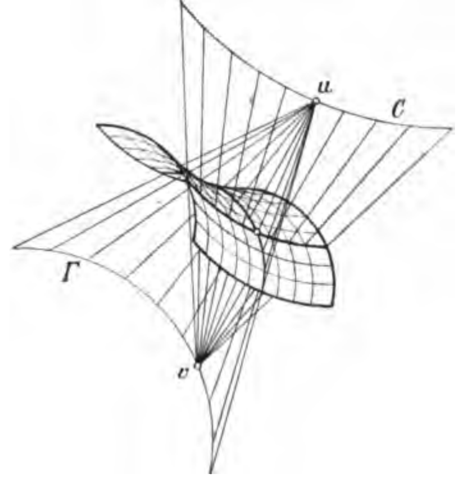


Fig. 66.

Constanten, dieselbe Form haben wie die Function V_1, V_2, V_3 von v. Hierauf kommen wir sogleich nochmals zurück.

Vorher bemerken wir noch, dass die Schiebungsfläche (5) noch auf eine andere Art erzeugt werden kann: Wir betrachten nämlich eine Curve C:

$$\mathfrak{x} = 2 U_1(u), \qquad \mathfrak{y} = 2 U_2(u), \qquad \mathfrak{z} = 2 U_3(u)$$

und eine Curve Γ:

$$\mathfrak{x} = 2 V_1(v), \qquad \mathfrak{y} = 2 V_2(v), \qquad \mathfrak{z} = 2 V_3(v),$$

ausgedrückt mittels eines Parameters u bez. v. Jeden Punkt (u) der einen

Curve verbinden wir geradlinig mit einem Punkt (v) der anderen. Die Mitten dieser Strecken sind dann durch die Gleichungen (5) gegeben. Siehe Fig. 66. Wir haben also den

Satz 73: Die Schiebungsflächen sind identisch mit denjenigen Flächen, die von den Mitten der Verbindungsgeraden zwischen den Punkten zweier Curven gebildet werden.

Wenn diese beiden Curven C und Γ insbesondere durch eine Curve C ersetzt werden, so ergeben sich die Flächen der Mitten der Secanten einer Curve. Und dies sind diejenigen Schiebungsflächen, bei denen die beiden Scharen von erzeugenden Curven in eine einzige zusammenfallen, die aber die Fläche doppelt überdeckt, sodass durch jeden Punkt der Fläche zwei Curven der Schar gehen. Eine derartige Fläche wird durch die Gleichungen (5) dargestellt, wenn man als Functionen V_1, V_2, V_3 die Functionen U_1, U_2, U_3 wählt, nachdem in ihnen das Argument u und v ersetzt worden ist. Es erhellt, dass alsdann die Curve C oder:

$$\mathfrak{x} = 2U_1(u), \qquad \mathfrak{y} = 2U_2(u), \qquad \mathfrak{z} = 2U_3(u),$$

die offenbar im jetzigen Falle auf der Fläche gelegen ist, von allen ∞^1 congruenten Curven berührt wird. Denn wählt man auf ihr einen Punkt P, zieht man von ihm aus alle Geraden, die die Curve C noch einmal treffen und halbiert man alle diese Sehnen, so bekommt man eine ähnliche Curve in halbem Maassstab, die C in P berührt. In diesem Falle also berühren alle Parameterlinien (u) und alle Parameterlinien (v) die Curve C. Da sie ein System von conjugierten Curven bilden, und da also in jedem Punkte P von C die beiden hindurchgehenden Curven (u) und (v) die Curve C berühren, so ist die Tangente von C in P zu sich selbst conjugiert und also eine Haupttangente, nach Satz 42, S. 156. Mithin ist also C eine Haupttangentencurve der Fläche. Rechnerisch kann man dies aus den Gleichungen (5) — immer für den Fall, dass die Functionen U_1, U_2, U_3 von u dieselben wie die Functionen V_1, V_2, V_3 von v sind, deshalb nicht ableiten, weil die Parameterdarstellung der Fläche gerade für die Curve C ausartet, da die Parameterlinien einander in den Punkten von C berühren. (Vgl. S. 6.) Es hat sich ergeben:

Satz 74: Der Ort der Mitten der Secanten einer Curve C ist eine Schiebungsfläche, auf der die Curve C selbst eine Haupttangentencurve ist. In jedem Punkte wird die Curve C von einer der erzeugenden Curven der Schiebungsfläche berührt, und diese erzeugenden Curven, die der Curve C im halben Maassstab ähnlich sind, überdecken die Fläche doppelt, dabei ein System von conjugierten Curven bildend.

Nehmen wir z. B. als Curve C die gemeine Schraubenlinie (vgl. (8) in I S. 157):

$$\mathfrak{x} = r\cos u, \qquad \mathfrak{y} = r\sin u, \qquad \mathfrak{z} = qu \tag{6}$$

auf dem Rotationscylinder um die z-Axe mit dem Radius r und mit der Steighöhe $2\pi q$, so haben wir dem Parameter u zwei Werte u und v zu geben und jedesmal die halben Summen aus den beiden zusammengehörigen Coordinaten zu bilden. So erhalten wir

$$x = \tfrac{1}{2}r(\cos u + \cos v), \qquad y = \tfrac{1}{2}r(\sin u + \sin v), \qquad z = \tfrac{1}{2}q(u+v) \tag{7}$$

als Gleichungen der Fläche der Mitten aller Secanten der Schraubenlinie (6). Die Fläche enthält als Schiebungsfläche ∞^1 gleichgestellte Schraubenlinien, die alle der gemeinen Schraubenlinie

$$x = \tfrac{1}{2} r \cos u, \quad y = \tfrac{1}{2} r \sin u, \quad z = \tfrac{1}{2} q u$$

congruent sind; übrigens liegt diese selbst nicht auf der Fläche. Die ∞^1 Schraubenlinien überdecken die Fläche doppelt und bilden ein conjugiertes System. Benutzt man die neuen Parameter

$$\bar{u} = r \cos \tfrac{1}{2}(u - v), \quad \bar{v} = \tfrac{1}{2}(u + v),$$

so stellt sich die Fläche (7) so dar:

$$x = \bar{u} \cos \bar{v}, \quad y = \bar{u} \sin \bar{v}, \quad z = q \bar{v}. \tag{8}$$

Nach (20), S. 60, ist sie also eine gemeine Schraubenfläche mit der Steighöhe $2\pi q$. Die Schraubenlinie (6), die hier die Curve C ist, liegt auf ihr und ist nach unserem Satze eine Haupttangentencurve. (Vgl. auch das Beispiel auf S. 184.) Da der Radius r des Cylinders von C in den Gleichungen (8) der Schraubenfläche nicht auftritt, so folgt, dass als Curve C irgend eine derjenigen Schraubenlinien gewählt werden kann, in denen die Fläche von den Rotationscylindern um ihre Axe geschnitten wird. Jede Curve (v) auf der Fläche, die zu dieser Curve C im halben Maassstab ähnlich und also von der Steighöhe πq ist, erfüllt nach (7) eine Gleichung:

$$(x - \tfrac{1}{2} r \cos v)^2 + (y - \tfrac{1}{2} r \sin v)^2 = \tfrac{1}{4} r^2,$$

die aussagt, dass sie auf einem Rotationscylinder vom Radius $\tfrac{1}{2} r$ liegt, der die z-Axe als Mantellinie enthält. Daher:

Satz 75: Eine gemeine Schraubenfläche kann auf unendlich viele Arten als Schiebungsfläche aufgefasst werden. Wird sie nämlich mit irgend einem Rotationscylinder, der die Schraubenaxe als Mantellinie enthält, zum Schnitt gebracht, so ergiebt sich eine gemeine Schraubenlinie, deren Steighöhe halb so gross wie die der Fläche ist, und die sich, starr gedacht, auf der Fläche verschieben lässt. Die ∞^1 Curven, in die sie dabei übergeht, berühren sämtlich eine derjenigen gemeinen Schraubenlinien der Fläche, die Haupttangentencurven sind. Wählt man umgekehrt irgend eine der krummen Haupttangentencurven der Fläche aus, so ist der Ort der Mitten ihrer Secanten die Fläche selbst.

Übrigens sind die gemeinen Schraubenflächen nicht die einzigen Flächen, die in unendlich vielen Weisen als Schiebungsflächen aufgefasst werden können. Ausser den Cylindern, die ja die Schiebung jeder Curve auf ihnen gestatten und daher triviale Beispiele sind, giebt es noch eine Reihe von anderen Flächen mit dieser ausgezeichneten Eigenschaft, auf die wir hier jedoch nicht eingehen wollen.[1]

---

[1] Die obigen Sätze über Schiebungsflächen rühren von Lie her. Es giebt Flächen mit vier Scharen von je ∞^1 congruenten und gleichgestellten Curven und solche mit unendlich vielen Scharen, wie z. B. die gemeine Schraubenfläche. Alle Flächen von dieser Art wurden ebenfalls von Lie bestimmt: „Bestimmung aller Flächen, die in mehrfacher Weise durch Trans-

Wählt man eine Schar von ∞^1 Curven ganz beliebig auf einer Fläche, etwa so, dass sie die Differentialgleichung

$$\frac{dv}{du} = \lambda(u, v)$$

erfüllt, so ist es leicht, die Differentialgleichung der zu ihr conjugierten Schar aufzustellen. Denn wenn

$$\frac{dv}{du} = \mu(u, v)$$

diese Gleichung wäre, so müssten $k = \lambda$ und $\varkappa = \mu$ für jedes Wertepaar u, v die Gleichung (2) erfüllen, d. h. es müsste

$$L + M(\lambda + \mu) + N\lambda\mu = 0$$

sein, und hieraus lässt sich μ leicht berechnen.

Man kann auch so vorgehen: Ist eine Schar von ∞^1 Curven auf der Fläche beliebig gegeben:

$$\Omega(u, v) = \text{Const.},$$

so führt man $\Omega(u, v) = \bar{u}$ als neuen Parameter $\bar{u}$ und irgend eine von Ω unabhängige Function von u und v als neuen Parameter $\bar{v}$ ein. Sind dann $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ die zu den neuen Parametern gehörigen Fundamentalgrössen zweiter Ordnung, so gilt jetzt die zu (2) analoge Bedingung:

$$\bar{L} + \bar{M}(\bar{k} + \bar{\varkappa}) + \bar{N}\bar{k}\bar{\varkappa} = 0.$$

In jedem Punkte der Schar ($\bar{u}$) ist jetzt $d\bar{v} : d\bar{u} = \bar{k} = \infty$. Also kommt für $\bar{\varkappa}$ die Bedingung:

$$\bar{M} + \bar{N}\bar{\varkappa} = 0$$

oder wenn $\bar{\varkappa} = d\bar{v} : d\bar{u}$ gesetzt wird:

$$\bar{M}d\bar{u} + \bar{N}d\bar{v} = 0. \tag{9}$$

Dies ist also jetzt die Differentialgleichung der zu den neuen Parametercurven ($\bar{u}$) conjugierten Schar von Curven.

---

lationsbewegung einer Curve erzeugt werden", Archiv for Math. og Naturv. 1882. Einzelheiten hiervon hat er schon seit 1872 in verschiedenen Arbeiten gegeben. Einen wichtigen Fortschritt enthält alsdann Lie's Note: „Sur une interprétation nouvelle du théorème d'Abel", Comptes Rendus t. CXIV (1892), ausführlicher dargestellt in der Arbeit: „Über die Theorie der Translationsflächen und das Abel'sche Theorem", Leipziger Berichte 1896.

Zu den Systemen von conjugierten Curven kommen wir auch, wenn wir uns die Frage vorlegen, bis zu welchem Grade die unendlich kleinen Vierecke eines Curvennetzes als eben zu bezeichnen sind. Es seien nämlich

$$(u, v), \quad (u + du, v), \quad (u, v + dv), \quad (u + du, v + dv)$$

vier unendlich benachbarte Punkte auf der Fläche, die ein unendlich kleines Parallelogramm bilden, da ihr Viereck, unendlich vergrössert, nur unendlich wenig von einem endlichen Parallelogramm abweicht. Diese Abweichung besteht darin, dass die Seitenrichtungen paarweis nicht genau parallel sind, sondern um unendlich kleine Winkel von einander abweichen. Man vergleiche die Betrachtung in der Ebene, I S. 115. Da wir aber jetzt Betrachtungen im Raume anstellen, so bringen es diese Abweichungen mit sich, dass das Viereck der vier Punkte auch windschief wird. Allerdings ist die Abweichung von einer Ebene nur unendlich klein von höherer als erster Ordnung, wenn man du und dv als unendlich klein von erster Ordnung auffasst. Dies folgt schon daraus, dass die Gleichung der Tangentenebene des Punktes (u, v) oder (x, y, z):

$$X(\mathfrak{x} - x) + Y(\mathfrak{y} - y) + Z(\mathfrak{z} - z) = 0 \tag{10}$$

von dem Punkte $(u + du, v + dv)$ befriedigt wird, sobald man in den rechtwinkligen Coordinaten dieses Punktes, die sich ja durch Reihenentwickelung ergeben:

$$\mathfrak{x} = x + x_u du + x_v dv + \dots,$$
$$\mathfrak{y} = y + y_u du + y_v dv + \dots,$$
$$\mathfrak{z} = z + z_u du + z_v dv + \dots$$

die höheren Potenzen von du und dv vernachlässigt. Berücksichtigt man auch die höheren Potenzen, indem man setzt:

$$\mathfrak{x} = x + x_u du + x_v dv + \frac{1}{1.2}(x_{uu} du^2 + 2x_{uv} du\,dv + x_{vv} dv^2) + \dots$$

und analog für $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$, so giebt die linke Seite der Gleichung (10), die ja in der Normalform vorliegt, da X, Y, Z die Richtungscosinus der Tangentenebene sind, und die also allgemein den Abstand des Punktes $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ von der Tangentenebene des Punktes (x, y, z) vorstellt, Folgendes: Der Punkt $(u + du, v + dv)$ hat von der Tangentenebene des Punktes (u, v) den unendlich kleinen Abstand:

$$dt = \mathbf{S} X \left[x_u du + x_v dv + \frac{1}{1.2}(x_{uu} du^2 + 2x_{uv} du\,dv + x_{vv} dv^2) + \dots \right].$$

Nach XI (I) und nach (8), S. 106, können wir hierfür schreiben:

$$dt = \frac{1}{2}(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2) + \ldots$$

Dabei bedeuten die Punkte die Glieder von höherer Ordnung in du und dv. Also:

Satz 76: Sind (u, v) und $(u + du, v + dv)$ zwei unendlich benachbarte Flächenpunkte und sind du und dv unendlich klein von erster Ordnung, so ist der Abstand des zweiten Punktes von der Tangentenebene des ersten Punktes von mindestens zweiter Ordnung unendlich klein, und zwar ist er in den unendlich kleinen Grössen zweiter Ordnung gleich:

$$\frac{1}{2}(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2).$$

Dieser Abstand ist also nur dann von mindestens dritter Ordnung unendlich klein, wenn

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0$$

ist, d. h. wenn die Richtung vom ersten Punkt zum zweiten eine Haupttangentenrichtung ist. (Vgl. Satz 18, S. 130.)

Nun kann man dieselbe Betrachtung für den Punkt $(u + du, v)$ und für den Punkt $(u, v + dv)$ anstellen. Also folgt, dass die drei Punkte

$$(u + du, v), \quad (u, v + dv), \quad (u + du, v + dv)$$

sämtlich unendlich kleine Abstände zweiter Ordnung von der Tangentenebene des Punktes (u, v) haben. Diese Abstände wären nur dann von mindestens dritter Ordnung, wenn die vom Punkte (u, v) ausgehenden Seiten und die von dort ausgehende Diagonale des Parallelogramms Haupttangentenrichtungen wären. Da aber ein Punkt (u, v) nur zwei Haupttangentenrichtungen hat, so folgt:

Satz 77: Mindestens eine Ecke des Vierecks der unendlich benachbarten Punkte:

$$(u, v), \quad (u + du, v), \quad (u, v + dv), \quad (u + du, v + dv)$$

auf einer Fläche weicht in zweiter und nicht höherer Ordnung von der Tangentenebene des ersten Punktes ab, vorausgesetzt, dass du und dv von erster Ordnung unendlich klein sind.

Hieraus ziehen wir den Schluss: Die Ebene der drei Punkte

$$(u, v), \quad (u + du, v), \quad (u, v + dv)$$

darf nicht ohne weiteres bei unserer gegenwärtigen Untersuchung im Unendlich-Kleinen mit der Tangentenebene des Punktes (u, v) verwechselt werden. Vielmehr haben wir jetzt zu fragen, wie sich der Abstand des Punktes $(u + du, v + dv)$ von der Ebene der drei genannten Punkte darstellt, und dabei haben wir überall die höheren als ersten Potenzen von du und dv zu beachten.

Wir verfahren so, dass wir zunächst den Inhalt dJ des von den vier Punkten bestimmten Tetraeders berechnen. Bezeichnen wir vorerst die rechtwinkligen Coordinaten der vier Punkte mit

$$x, y, z; \quad x_1, y_1, z_1; \quad x_2, y_2, z_2; \quad x_3, y_3, z_3,$$

so ist bekanntlich:

$$6\,dJ = \begin{vmatrix} x_1 - x & y_1 - y & z_1 - z \\ x_2 - x & y_2 - y & z_2 - z \\ x_3 - x & y_3 - y & z_3 - z \end{vmatrix}.$$

Dabei erscheint der Inhalt (wie übrigens oben auch der Abstand dt) mit einem Vorzeichen behaftet.

Nun sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Punktes $(u + du, v)$. Daher ist zu setzen:

$$x_1 = x + x_u\,du + \frac{1}{1.2}x_{uu}\,du^2 + \dots$$

u. s. w. Ferner analog:

$$x_2 = x + x_v\,dv + \frac{1}{1.2}x_{vv}\,dv^2 + \dots$$

u. s. w., dagegen:

$$x_3 = x + x_u\,du + x_v\,dv + \frac{1}{1.2}(x_{uu}\,du^2 + 2x_{uv}\,du\,dv + x_{vv}\,dv^2) + \dots$$

u. s. w., sodass sich ergiebt:

$$6\,dJ = \begin{vmatrix} x_u\,du + \frac{1}{1.2}x_{uu}\,du^2 + \dots & . & . \\ x_v\,dv + \frac{1}{1.2}x_{vv}\,dv^2 + \dots & . & . \\ x_u du + x_v dv + \frac{1}{1.2}(x_{uu}du^2 + 2x_{uv}du dv + x_{vv}dv^2) + \dots & . & . \end{vmatrix}$$

Subtrahiert man die beiden ersten Zeilen von der dritten, und sondert man von den beiden ersten die Factoren du und dv ab, so erhält man:

$$6\,dJ = \begin{vmatrix} x_u + \frac{1}{1.2}x_{uu}du & + \ldots & . & . \\ x_v + \frac{1}{1.2}x_{vv}dv & + \ldots & . & . \\ x_{uv}du\,dv & + \ldots & . & . \end{vmatrix} du\,dv.$$

Wenn wir nur die Glieder niedrigster, nämlich vierter Ordnung wirklich ausrechnen, so kommt:

$$dJ = \tfrac{1}{6}du^2dv^2 \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \end{vmatrix} + \ldots$$

oder nach (9), S. 106:

$$dJ = \tfrac{1}{6}DMdu^2dv^2 + \ldots$$

Nach S. 34, 35 ist ferner der Inhalt des Dreiecks der drei ersten Punkte gleich

$$\tfrac{1}{2}D\,du\,dv + \ldots$$

Ist nun dh der Abstand des vierten Punktes von der Ebene der drei ersten, so ist nach bekannter Formel der Stereometrie:

$$\tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{2}D\,du\,dv + \ldots)dh = dJ.$$

Also kommt:

$$dh = M\,du\,dv + \ldots$$

Daher:

Satz 78: Der Abstand der Ebene der drei unendlich benachbarten Flächenpunkte (u, v), $(u + du, v)$, $(u, v + dv)$ von dem Punkte $(u + du, v + dv)$ ist, abgesehen von unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung, gleich der Fundamentalgrösse M, multipliciert mit $du\,dv$.

Der Fall $M = 0$ liefert nun nach Satz 70, wenn wir noch bedenken, dass $\sqrt{E}du$ und $\sqrt{G}dv$ zwei Seiten des Vierecks der vier Punkte sind, dies Ergebnis:

Satz 79: Legt man auf eine Fläche ein unendlich dichtes Netz von zwei Scharen von je ∞^1 Curven und sind die Seiten der Netzvierecke unendlich klein von erster Ordnung, so weicht die vierte Ecke eines Netzvierecks von der Ebene der drei ersten im allgemeinen nur unendlich wenig von gerade zweiter Ordnung ab. Die Abweichung ist dann und nur dann unendlich klein von mindestens dritter Ordnung, wenn das Netz von einem System conjugierter Curven gebildet wird.

Dies Ergebnis hat eine praktische Bedeutung:

Stellen wir uns zunächst vor, die Fläche sei mit irgend einem Curvennetz belegt, und vergrössern wir alsdann ein Flächenstück so weit, bis die unendlich kleinen Grössen erster Ordnung, also die Seiten der Netzvierecke, endlich werden. Die Richtungsunterschiede von Gegenseiten der Vierecke bleiben dabei unendlich klein von erster Ordnung, weil die Winkel bei der ähnlichen Vergrösserung nicht geändert werden. Der Abstand der vierten Ecke eines Netzvierecks von der Ebene der drei ersten Ecken dagegen wird jetzt im allgemeinen, nämlich solange das Netz nicht aus conjugierten Curven besteht, unendlich klein von erster Ordnung.

Wollen wir nun ein Modell dieses vergrösserten Flächenstückes aus lauter Vierecken herstellen und dabei Unendlich-Kleines von erster Ordnung durch nur Sehr-Kleines ersetzen, so müssen wir folglich die Vierecke windschief, wenn auch sehr wenig von der Ebene abweichend, annehmen. Besteht das Netz dagegen aus conjugierten Curven, so ist die Abweichung von der Ebene nach der Vergrösserung unendlich klein von mindestens zweiter Ordnung und braucht daher im Modell nicht zum Ausdruck zu kommen. Dann also dürfen wir ebene Vierecke wählen, aber im allgemeinen wohlbemerkt keine Parallelogramme, sondern Vierecke, die allerdings nur sehr wenig von Parallelogrammen abweichen,[1] da eben die Richtungsunterschiede von Gegenseiten jetzt von erster Ordnung unendlich klein sind und daher im Modell durch nur sehr kleine Winkel zum Ausdruck gebracht werden müssen.

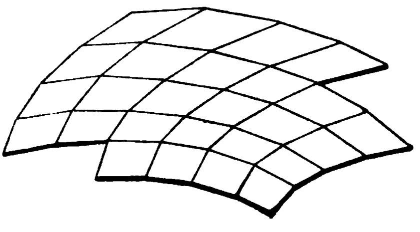


Fig. 67.

Ein Netz von ebenen, sehr wenig von Parallelogrammen abweichenden Vierecken ist also als Modell eines Flächenstückes sehr wohl zu benutzen, doch muss man dann notwendig die Seiten der Vierecke als Bogenelemente zweier Scharen von conjugierten Curven auffassen. (Siehe Fig. 67.)

Es ist sehr bemerkenswert, dass man auf einer beliebigen Fläche durch eine einfache Construction, die analytisch nur Differentiationen

[1] Nehmen wir Parallelogramme, so ergiebt sich ein Modell für die Schiebungsflächen (siehe S. 188).

und Eliminationen verlangt, stets ein System von conjugierten Curven, ja sogar unendlich viele solche Systeme finden kann:

Man wähle nämlich irgend eine Gerade $\mathfrak{g}$ fest im Raum und construiere erstens die Curven $\mathfrak{c}$, in denen die Fläche von allen Ebenen durch $\mathfrak{g}$ geschnitten wird, und lege zweitens von jedem Punkte der Geraden $\mathfrak{g}$ aus die Tangenten an die Fläche. Letzteres liefert ∞^1 Tangentialkegel; jeder berührt die Fläche längs einer Curve k (siehe Fig. 68). Die Curven $\mathfrak{c}$ und k sind nun zu einander conjugiert.

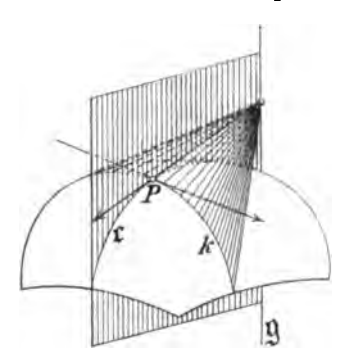


Fig. 68.

In der That: Die Tangentialkegel sind abwickelbare Flächen. Nach Satz 45, S. 157, ist also in jedem Punkte P der Fläche die Tangente der hindurchgehenden Curve k conjugiert zur hindurchgehenden Erzeugenden des Kegels. Diese Erzeugende aber schneidet die Gerade $\mathfrak{g}$ und liegt daher in der Ebene der hindurchgehenden Curve $\mathfrak{c}$, indem sie diese Curve in P berührt. Also haben die durch P gehenden Curven $\mathfrak{c}$ und k conjugierte Tangenten.

Um dies auch analytisch abzuleiten, wählen wir die Gerade $\mathfrak{g}$ als z-Axe. Benutzen wir alsdann $y:x$ als Parameter u, sodass

$$y = u x \tag{11}$$

ist, so sind die Curven (u) die Curven $\mathfrak{c}$. Nach (9) ist jetzt

$$M du + N dv = 0 \tag{12}$$

die Differentialgleichung der zu den Curven $\mathfrak{c}$ conjugierten Curven. Infolge von (11) aber ist

$$\begin{cases} y_u = x + u x_u, & y_v = u x_v, \\ y_{uv} = x_v + u x_{uv}, & y_{vv} = u x_{vv}, \end{cases} \tag{13}$$

sodass nach (9), S. 106, kommt:

$$M = \frac{1}{D}[x_v(x_v z_u - z_v x_u) + x(x_{uv} z_v - z_{uv} x_v)],$$

$$N = \frac{1}{D} x(x_{vv} z_v - z_{vv} x_v).$$

Die Differentialgleichung (12) lautet demnach:

$$[x_v(x_v z_u - z_v x_u) + x(x_{uv} z_v - z_{uv} x_v)]\, du + x(x_{vv} z_v - z_{vv} x_v)\, dv = 0. \tag{14}$$

Wir müssen zeigen, dass sie von den Curven k erfüllt wird. Zu diesem Zweck construieren wir uns eine Curve k, indem wir einen Punkt (0, 0, c) auf der z-Axe wählen und alle Tangentenebenen

$$X(\mathfrak{x} - x) + Y(\mathfrak{y} - y) + Z(\mathfrak{z} - z) = 0$$

von ihm aus an die Fläche legen. Diese Ebenen berühren die Fläche längs einer Curve k, die nach der Substitution von $\mathfrak{x} = 0$, $\mathfrak{y} = 0$, $\mathfrak{z} = c$ dargestellt wird durch:

$$\frac{Xx + Yy + Zz}{Z} = c. \tag{15}$$

Es ist dies ja eine Gleichung von der Form $\Omega(u, v) = c$, und sie stellt für jeden constanten Wert von c eine Curve k dar. Wegen (11) und (13) ist aber nach XI (F):

$$DX = x z_v - u(x_v z_u - z_v x_u),$$
$$DY = x_v z_u - z_v x_u,$$
$$DZ = - x x_v,$$

sodass (15) so lautet:

$$\frac{z x_v - x z_v}{x_v} = c. \tag{16}$$

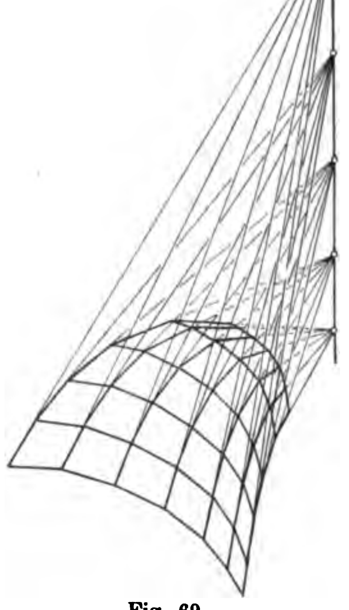


Fig. 69.

Das totale Differential der linken Seite hiervon ist aber gleich der linken Seite von (14), dividiert durch x_v^2. Mithin ist (16) thatsächlich das Integral von (14). Hiermit ist der analytische Nachweis beendet und zugleich gezeigt, wie man auf einer beliebigen Fläche, nachdem man $y : x$ als Parameter u eingeführt hat, mittels der Formel (16) die zu den Curven (u) conjugierten Curven durch Differentiation allein findet.

Wir haben hiernach den

Satz 80:[1] Schneidet man eine Fläche durch diejenigen Ebenen, die eine feste Gerade enthalten, in ∞^1 Curven $\mathfrak{c}$ und construiert man die ∞^1 Berührungscurven k derjenigen

[1] Satz von Königs, vgl. hierüber die in der Anm. auf S. 187 genannten „Leçons" von Darboux, 1. partie, S. 111.

Tangentialkegel der Fläche, deren Spitzen auf der festen Geraden liegen, so sind die Curven c und k zu einander conjugiert.

In Fig. 69, S. 199, ist die Form eines Modells angegeben, dass man nach den früheren Auseinandersetzungen für dieses System von conjugierten Curven herstellen kann.

§ 11. **Berührung zwischen Flächen.**

In § 1 des gegenwärtigen Abschnittes und weiterhin haben wir die Krümmung der Curven untersucht, die von einem Flächenpunkte P ausgehend auf der Fläche verlaufen. Für verschiedene Curven durch einen Punkt P ergaben sich an der Stelle P verschiedene Krümmungen; auch für diejenigen Curven, die in P noch die Tangente gemein haben, ist sie verschieden, wie Satz 1, S. 105, lehrt.

Hiernach ist es klar, dass uns bisher noch eine Methode fehlt, um einen Begriff zu bestimmen, der ein Maass für die Krümmung der Fläche selbst an der betreffenden Stelle P abgeben würde. Wollen wir einen solchen Begriff ableiten, so liegt es zunächst nahe, zu versuchen, den Begriff des Krümmungskreises einer Curve für den Fall der Fläche zu verallgemeinern, denn der reciproke Wert des Radius dieses Krümmungskreises ist ja das, was wir die Krümmung der Curve an der Berührungsstelle genannt haben, vgl. I S. 38 und I S. 189. Der Krümmungskreis war als derjenige Kreis definiert worden, der die Curve an der betrachteten Stelle in zweiter Ordnung berührt, vgl. I S. 29 und I S. 188. Wollen wir nun den Begriff der Krümmung für die Flächen verallgemeinern, so werden wir an die Stelle der Curve die Fläche und an die Stelle des Kreises die Kugel setzen. Demnach werden wir zunächst versuchen, ob wir eine Kugel so wählen können, dass sie die Fläche in einem gegebenen Punkte möglichst innig berührt.

Zur Vorbereitung müssen wir davon sprechen, was überhaupt unter einer Berührung n^{ter} Ordnung zwischen zwei Flächen zu verstehen ist. In Analogie mit der Definition für die Berührung zwischen Curve und Fläche, I S. 226, setzen wir fest:

Zwei Flächen berühren einander in einem gemeinsamen Punkte P in n^{ter} Ordnung, wenn es zu jeder solchen Curve auf der einen Fläche, die durch P geht, eine Curve auf der anderen Fläche giebt, die jene Curve in P in n^{ter} Ordnung berührt.

Wir kommen hierdurch auf den Begriff der Berührung zwischen zwei Curven zurück. Unabhängig davon können wir die Definition nach I S. 19 und I S. 166 auch so aussprechen:

Zwei Flächen berühren einander in einem gemeinsamen Punkte P in n^{ter} Ordnung, wenn es zu jedem auf der einen Fläche unendlich nah bei P gelegenen Punkte A einen Punkt $\mathfrak{A}$ auf der andern Fläche derart giebt, dass die Strecke $A\mathfrak{A}$ unendlich klein von $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, sobald die Strecken PA und $P\mathfrak{A}$ unendlich klein von erster Ordnung sind.

Aus dieser Form der Definition ist es leicht, analog dem Satze 5, I S. 167, ein analytisches Merkmal für die Berührung zwischen zwei Flächen:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

und

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{f}(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}), \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{g}(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}), \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{h}(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$$

abzuleiten. Der Unterschied gegenüber jenem Satze besteht hier nur darin, dass an die Stelle der Entwickelungen nach dt und $d\mathfrak{t}$ hier Entwickelungen nach je zwei Differentialen du, dv bez. $d\mathfrak{u}$, $d\mathfrak{v}$ treten, sodass also auch die damals gegebene Substitutionsgleichung durch zwei Gleichungen zu ersetzen ist, von denen die eine $d\mathfrak{u}$ und die andere $d\mathfrak{v}$ als Reihenentwickelung nach du und dv darstellt.

Wir verzichten jedoch auf die Formulierung dieses Satzes, weil wir die Berührung zwischen zwei Flächen nur in einigen solchen Fällen besprechen, die einfacher zu erledigen sind.

Betrachten wir zunächst den Fall der Berührung zwischen einer Fläche und einer Ebene, die durch den Punkt P der Fläche gehe. Soll die Berührung von erster Ordnung sein, so muss es zu jeder Geraden in der Ebene, die von P ausgeht, eine Flächencurve durch P geben, die jene Gerade in P berührt, d. h. die Ebene muss — was ja vorherzusehen war — die Tangentenebene von P sein.

Fragen wir uns, wann die Fläche von der Tangentenebene ihres Punktes P in zweiter Ordnung berührt wird. In diesem Fall muss es insbesondere zu jeder solchen Geraden in der Ebene, die von P ausgeht, d. h. also zu jeder Tangente von P eine Flächencurve geben, die diese Tangente in zweiter Ordnung berührt. Sind:

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

die Gleichungen der Fläche und ist der Punkt (u, v) der betrachtete Punkt P, so wird eine Flächencurve durch diesen Punkt nach S. 11 dadurch definiert, dass man u und v als zwei solche Functionen

eines Parameters t auffasst, die etwa für $t = 0$ die Werte der Parameter liefern, die dem Punkte P zukommen. Dann ist auf der Curve, wenn die Striche die Differentiation nach t andeuten:

$$x' = x_u u' + x_v v',$$

und, wenn wir nochmals nach t differenzieren:

$$x'' = x_{uu} u'^2 + 2 x_{uv} u' v' + x_{vv} v'^2 + x_u u'' + x_v v''.$$

Die Formeln bleiben richtig, wenn x durch y oder z ersetzt wird. Nach Satz 6, I S. 169, haben wir nun zu fordern, dass:

$$\frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{z'}$$

sei oder:

$$x'' = \varrho x', \quad y'' = \varrho y', \quad z'' = \varrho z',$$

wenn wir einen Proportionalitätsfactor ϱ einführen. Dies giebt:

$$x_{uu} u'^2 + 2 x_{uv} u' v' + x_{vv} v'^2 = x_u (\varrho u' - u'') + x_v (\varrho v' - v'')$$

und die beiden Gleichungen, die hieraus hervorgehen, wenn man x durch y oder z ersetzt.

Diese Forderungen müssen nun erfüllt sein, wie auch die Tangente gewählt sei, d. h. welchen Wert auch das Verhältnis $dv : du$ oder $v' : u'$ hat. Um u'', v'' zu entfernen, multiplicieren wir die Gleichungen mit den Richtungscosinus X, Y, Z der Normalen und addieren sie dann. So kommt nach (8), S. 106, und nach XI (I):

$$L u'^2 + 2 M u' v' + N v'^2 = 0,$$

und da diese Bedingung für jeden Wert von $v' : u'$ bestehen soll, so muss einzeln:

$$L = M = N = 0 \tag{2}$$

für den betrachteten Punkt P sein.

Diese Bedingungen sind nun auch hinreichend dafür, dass die Fläche im Punkte P von ihrer Tangentenebene in zweiter Ordnung berührt wird. Denn nach Satz 76, S. 194, ist unter den Bedingungen (2) der Abstand, den ein dem Punkte P oder (u, v) unendlich benachbarter Punkt A oder $(u + du, v + dv)$ von der Tangentenebene des Punktes P hat, von mindestens dritter Ordnung unendlich klein, sobald PA unendlich klein von erster Ordnung ist. Wenn wir also den Fusspunkt dieses Abstandes mit $\mathfrak{A}$ bezeichnen, so haben wir jedem Flächenpunkt A in der Umgebung von P einen Punkt $\mathfrak{A}$ in der Tangentenebene zugeordnet, derart, dass die auf S. 201 gegebene Definition für die Berührung im Falle $n = 2$ zutrifft.

Demnach:

Satz 81: Eine Fläche wird von einer Tangentenebene nur dann in zweiter Ordnung berührt, wenn die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung für den Berührungspunkt alle drei gleich Null sind.

Betrachten wir jetzt den Fall der Berührung zwischen Fläche und Kugel. Die Berührung ist zunächst, was ohne weiteres klar ist, von erster Ordnung, wenn die Kugel die Tangentenebene des gemeinsamen Punktes P berührt. Soll die Berührung von zweiter Ordnung sein, so muss es zu jeder Flächencurve c durch P eine Curve $\mathfrak{c}$ auf der Kugel geben, die c in zweiter Ordnung berührt. Es sei nun k der Krümmungskreis von c in P. Er berührt c in zweiter Ordnung. Nach Satz 15, I S. 28, der nach Satz 8, I S. 170, auch für Raumcurven gilt, muss also auch die sphärische Curve $\mathfrak{c}$ den Kreis k in zweiter Ordnung berühren, anders ausgesprochen: k muss auch der Krümmungskreis von $\mathfrak{c}$ in P sein. Aber der Krümmungskreis einer sphärischen Curve liegt auf der Kugel, da die Kugel ihre Schmiegungskugel ist (vgl. I S. 237). Also folgt: Damit die Kugel die Fläche in zweiter Ordnung berühre, ist notwendig und augenscheinlich auch hinreichend, dass die Kugel von allen durch P gehenden Flächencurven die Krümmungskreise des Punktes P enthält. Insbesondere müsste die Kugel die Krümmungskreise aller Normalschnitte von P enthalten, d. h. der Punkt P müsste nach S. 110 ein Nabelpunkt sein. Dann aber tritt thatsächlich nach Satz 1, S. 105, Berührung zweiter Ordnung ein. Mithin:

Satz 82: Eine Fläche wird von einer Kugel nur dann in zweiter Ordnung berührt, wenn der Berührungspunkt ein Nabelpunkt der Fläche ist, und zwar ist dann der Kugelmittelpunkt der gemeinsame Mittelpunkt der Krümmungskreise aller Normalschnitte des Nabelpunktes.

Kehren wir jetzt zu den Betrachtungen am Anfang dieses Paragraphen zurück, so sehen wir, dass die Übertragung des Begriffes: Krümmungskreis einer Curve in den Begriff: Krümmungskugel einer Fläche unmöglich ist; sie ist nur für die vereinzelten Nabelpunkte der Fläche möglich.

Dies negative Ergebnis nötigt uns, einen anderen Weg zur Aufstellung des Begriffes der Krümmung einer Fläche einzuschlagen. Daran gehen wir im nächsten Paragraphen. Hier erwähnen wir nur noch, dass man leicht erkennt, dass das in Satz 32, S. 145, auftretende osculierende Paraboloid die Fläche in seinem Scheitel in der zweiten Ordnung berührt.

§ 12. Die sphärische Abbildung und die Krümmung der Flächen.

In der Ebene haben wir den Begriff der Krümmung einer Curve zunächst als Verhältnis aus dem Contingenzwinkel und Bogenelement definiert, siehe I S. 36. Dieser Definition gaben wir in Satz 28, I S. 41, eine andere Form, indem wir einen Kreis vom Radius Eins annahmen, alsdann zu jeder Normalen der Curve den parallelen Radius zogen und dadurch jedem Punkte der Curve einen Punkt auf dem Kreise zuordneten. Die Krümmung war dann gleich dem Verhältnis aus einem Bogenelement des Kreises zum zugehörigen Bogenelement der Curve. Dies Verfahren können wir auf die Flächen übertragen. Wir gelangen dadurch zu einer besonders wichtigen Art, eine Fläche auf die Kugel abzubilden, die schlechtweg die sphärische Abbildung der Fläche heissen soll.[1]

Gegeben sei die Fläche:

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v).$$

Die Normalen der Fläche seien im reellen Fall mit positivem Sinn versehen, wie es auf S. 27 für ihre Richtungscosinus X, Y, Z festgesetzt worden ist. Wir nehmen nunmehr eine Kugel vom Radius Eins an, etwa die um den Anfangspunkt O als Mitte. Zur (im reellen Fall positiven) Normalen des Flächenpunktes P oder (u, v) ziehen wir von der Kugelmitte aus den parallelen Radius. Sein Endpunkt $\mathfrak{P}$ heisse das sphärische Bild des Punktes P. (Siehe Fig. 70.) Seine rechtwinkligen Coordinaten sind offenbar gleich den Richtungscosinus X, Y, Z.

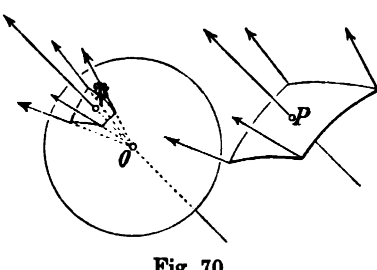


Fig. 70.

Diese Art der Abbildung mittels paralleler Normalen mag noch so erläutert werden: Wird die vorgelegte Fläche aus irgend einer Richtung durch parallele Strahlen beleuchtet, und benutzt man den Satz, dass die Helligkeit einer Stelle proportional dem Cosinus des Einfallswinkels, d. h. des Winkels von Lichtstrahl und Normale, ist,

[1] Die sphärische Abbildung der Flächen auf die Kugel wurde als ein wichtiges Hülfsmittel von Gauss in seinen „Disquisitiones" (vgl. S. 5) in die Flächentheorie eingeführt und systematisch verwertet. Man nennt sie deshalb auch die Gauss'sche Abbildung.

so sieht man: Von welcher Richtung aus man die Fläche und die Kugel durch paralleles Licht beleuchten mag, stets haben entsprechende Stellen von Fläche und Kugel dieselbe Helligkeit. Aus diesem Grunde bedient man sich der sphärischen Abbildung in der darstellenden Geometrie zur Bestimmung der Linien gleicher Helligkeit, der sogenannten Isophoten oder Lichtgleichen, auf gegebenen Flächen.

Hier ist auch Gelegenheit von Parallelflächen zu sprechen: Trägt man auf allen Normalen der gegebenen Fläche (1) von ihren Fusspunkten aus die constante Strecke a ab, so ist der Ort der Endpunkte eine Fläche mit den Gleichungen für die laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$:

$$\mathfrak{x} = x + Xa, \quad \mathfrak{y} = y + Ya, \quad \mathfrak{z} = z + Za,$$

ebenfalls ausgedrückt mittels der Parameter u und v. Hier ist:

$$\mathfrak{x}_u = x_u + X_u a, \quad \mathfrak{x}_v = x_v + X_v a$$

u. s. w., sodass nach XI (H) und XI (I) folgt:

$$\mathbf{S}\, X\mathfrak{x}_u = 0, \quad \mathbf{S}\, X\mathfrak{x}_v = 0,$$

was aussagt, dass der Punkt ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$) der neuen Fläche dieselbe Normale wie der Punkt (x, y, z) der Fläche (1) hat, oder auch:

Satz 83: Trägt man auf den Normalen einer Fläche von ihren Fusspunkten aus eine constante Strecke auf, so ist der Ort der Endpunkte eine Fläche, deren Tangentenebenen den Tangentenebenen der ursprünglichen Fläche in entsprechenden Punkten parallel sind, sodass beide Flächen die Normalen gemein haben.

Man nennt daher die neue Fläche eine Parallelfläche der Fläche (1). Es leuchtet ein, dass entsprechende Punkte der Fläche (1) und einer Parallelfläche dasselbe sphärische Bild haben. Die sphärische Abbildung bringt also, kann man sagen, nur diejenigen Eigenschaften der ursprünglichen Fläche zum Ausdruck, die auch allen ihren Parallelflächen zukommen. —

Bei der sphärischen Abbildung der Fläche (1) sind, wie gesagt, X, Y, Z die Coordinaten des Bildpunktes. Es sind dies Functionen der Parameter u, v, und daher sind u, v jetzt auch Parameter auf der Bildkugel.

Betrachten wir die beiden Punkte (u, v) und ($u + du$, $v + dv$) der Fläche (1). Es sei ds ihr Bogenelement. Dann ist:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2.$$

Den beiden Punkten entsprechen bei der sphärischen Abbildung unendlich benachbarte Punkte auf der Kugel. Der eine hat die Coordinaten X, Y, Z, der andere die Coordinaten $X+dX$, $Y+dY$, $Z+dZ$, wenn dX, dY, dZ die Incremente bedeuten, die den Functionen X, Y, Z von u, v zukommen, sobald u um du und v um dv wächst. Daher entspricht dem obigen Bogenelement ds der Fläche ein Bogenelement $d\mathfrak{s}$ auf der Kugel, für das:

$$d\mathfrak{s}^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$$

ist. Diese Summe wurde übrigens unter (13) auf S. 161 mit $d\nu^2$ — als Quadrat des Winkels unendlich benachbarter Normalen — bezeichnet. Nach der damals aufgestellten Formel (11) ist:

$$(2)\quad d\mathfrak{s}^2 = H(L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2) - K(E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2),$$

wobei H und K die in Satz 11, S. 119, angegebenen Functionen der Fundamentalgrössen E, F, G und L, M, N sind.

Da auch auf der Bildkugel u und v Parameter sind, so hat die Kugel hinsichtlich dieser Parameter Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung. Wir wollen sie mit $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ bezeichnen. Weil sich das Quadrat des Bogenelementes der Kugel durch die Fundamentalgrössen erster Ordnung so ausdrückt:

$$(3)\qquad d\mathfrak{s}^2 = \mathfrak{E}\,du^2 + 2\mathfrak{F}\,du\,dv + \mathfrak{G}\,dv^2,$$

so zeigt (2) unmittelbar, dass

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathfrak{E} = \mathbf{S}X_u^2 &= HL - KE, \\ \mathfrak{F} = \mathbf{S}X_uX_v &= HM - KF, \\ \mathfrak{G} = \mathbf{S}X_v^2 &= HN - KG \end{cases}$$

ist.

In § 11 des ersten Abschnittes haben wir von beliebigen punktweisen Abbildungen einer Fläche auf eine andere Fläche gesprochen. Aus dem Satze 49, S. 96, können wir daher schliessen, dass es bei der sphärischen Abbildung im allgemeinen ein Orthogonalsystem auf der Fläche giebt, dessen Bild wieder ein Orthogonalsystem ist.

Dies können wir hier direct einsehen:

Sind nämlich die Parameterlinien (u) und (v) auf der Fläche (1) die Krümmungscurven, so ist nach Satz 63, S. 182, $F = M = 0$. Nach (4) ist dann $\mathfrak{F} = 0$, also sind dann die Bildcurven nach Satz 13, S. 34, zu einander orthogonal.

Umgekehrt: Sind die Parameterlinien (u) und (v) auf der Kugel, d. h. also die Bildcurven der Parameterlinien der Fläche (1), zu

einander orthogonal, so ist nach dem genannten Satze $\mathfrak{F} = 0$. Sind ausserdem die Parameterlinien (u) und (v) auf der Fläche selbst zu einander orthogonal, so ist auch $F = 0$, sodass aus der zweiten Gleichung (4) folgt:

$$HM = 0.$$

Ist $H \neq 0$, so ist dann $M = 0$. Nach Satz 63, S. 182, sind die Curven (u) und (v) daher auf der Fläche die Krümmungslinien.

Wenn also auf der Fläche nicht etwa H überall gleich Null ist, so sind die Krümmungscurven der Fläche das einzige Orthogonalsystem, dessen sphärisches Bild wieder ein Orthogonalsystem ist, denn die sphärische Abbildung ist selbst ja ganz unabhängig davon, ob wir gerade die Krümmungscurven, wie wir dies soeben gethan haben, als Parametercurven wählen oder nicht.

Nach (23), S. 118, ist:

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

gleich der Summe der reciproken Werte der Hauptkrümmungsradien. Ist $H = 0$, so ist also $R_1 + R_2 = 0$. Mithin:

Satz 84: Bei der sphärischen Abbildung einer Fläche, auf der nicht überall die Hauptkrümmungsradien einander entgegengesetzt gleich sind, bildet sich nur das Orthogonalsystem der Krümmungscurven wieder als Orthogonalsystem ab.[1]

Dies leuchtet auch geometrisch ein. Denn wenn P irgend ein Flächenpunkt ist und P_1 und P_2 ihm unendlich benachbarte Flächenpunkte auf den Hauptkrümmungsrichtungen von P sind, so wird die Normale n des Punktes P nach Satz 53, S. 171, von den Normalen n_1 und n_2 der Punkte P_1 und P_2 geschnitten. Die zu n, n_1 und n_2 parallel gezogenen Radien $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{n}_1$ und $\mathfrak{n}_2$ der Bildkugel (siehe Fig. 71) liegen alsdann so, dass die Ebene $(\mathfrak{n}\mathfrak{n}_1)$ der Ebene $(n n_1)$ und die

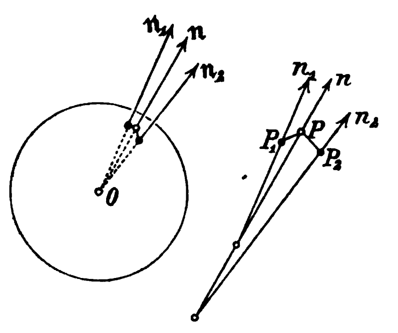


Fig. 71.

[1] Da auf der Kugel jedes Orthogonalsystem als System der Krümmungscurven angesehen werden darf, nach S. 177, so steht dies mit dem späteren Satze 85 in Einklang.

Ebene $(\mathfrak{n}\,\mathfrak{n}_2)$ der Ebene $(n\,n_2)$ parallel ist. Da die Ebenen $(n\,n_1)$ und $(n\,n_2)$ auf einander senkrecht stehen, so gilt dasselbe von den Ebenen $(\mathfrak{n}\,\mathfrak{n}_1)$ und $(\mathfrak{n}\,\mathfrak{n}_2)$.

Ist $H = 0$ auf der Fläche, so sind $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$ nach (4) proportional E, F, G. Wenn aber die Fundamentalgrössen erster Ordnung auf zwei Flächen, die punktweis auf einander abgebildet sind, einander proportional sind, so ist die Abbildung nach Satz 36, S. 72, conform.

Umgekehrt: Ist die sphärische Abbildung conform, so bestehen Beziehungen von der Gestalt:

$$\mathfrak{E} = \varrho E, \quad \mathfrak{F} = \varrho F, \quad \mathfrak{G} = \varrho G.$$

Alsdann folgt aus (4):

$$\begin{aligned} HL &= (\varrho + K)E, \\ HM &= (\varrho + K)F, \\ HN &= (\varrho + K)G. \end{aligned}$$

Entweder also ist $H = 0$ und $\varrho = -K$ oder aber es sind L, M, N proportional E, F, G, woraus folgt, dass die Fläche (1) lauter Nabelpunkte hat, nach S. 110, und also nach Satz 6, S. 112, eine Kugel ist. Daher:

Satz 85: Die sphärische Abbildung ist nur für diejenigen Flächen, auf denen in jedem Punkte die beiden Hauptkrümmungsradien einander entgegengesetzt gleich sind, und für die Kugeln conform.

Nach Satz 12, S. 120, können wir dies Ergebnis auch so formulieren:

Satz 86: Die sphärische Abbildung ist nur für diejenigen Flächen conform, auf denen in jedem Punkte zwischen den beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 eine der beiden Beziehungen

$$R_1 \pm R_2 = 0$$

besteht.

In dieser Form lässt sich der Satz auch durch eine geometrische Infinitesimalbetrachtung in Anknüpfung an Fig. 71 leicht bestätigen. Dies sei dem Leser überlassen.

Hier sollen nun zunächst noch einige Formeln abgeleitet werden, die bei der sphärischen Abbildung von Flächen gebraucht werden:

Wenn wir in (4) die Werte von H und K nach Satz 11, S. 119, einsetzen, so kommt:

$$(5)\quad \begin{cases} \mathfrak{E} = \frac{1}{D^2}[EM^2 - 2FLM + GL^2], \\ \mathfrak{F} = \frac{1}{D^2}[EMN - F(LN + M^2) + GLM], \\ \mathfrak{G} = \frac{1}{D^2}[EN^2 - 2FMN + GM^2]. \end{cases}$$

Aus (4) folgt ferner, dass die Grösse

$$(6)\qquad \mathfrak{D}^2 = \mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2,$$

die wir analog der Grösse

$$D^2 = EG - F^2$$

für die Kugel bilden, den Wert hat:

$$\mathfrak{D}^2 = H^2(LN - M^2) - HK(EN - 2FM + GL) + K^2(EG - F^2).$$

Wenn wir die erste und zweite Klammer nach Satz 11, S. 119, durch H, K und D ausdrücken, so heben die beiden ersten Glieder rechts einander auf, sodass bleibt:

$$(7)\qquad \mathfrak{D}^2 = K^2 D^2.$$

Nach S. 18 ist D im reellen Fall positiv, ebenso, da dann auch das Bild auf der Kugel reell ist, die für die Kugel gebildete Grösse $\mathfrak{D}$. Wir ziehen daher aus (7) den Schluss:

$$(8)\qquad \mathfrak{D} = \varepsilon K D,$$

wo $\varepsilon = \pm 1$ ist, je nachdem $K \gtrless 0$ ist.

Da der Radius der Kugel, der zum Bildpunkt $\mathfrak{P}$ oder (X, Y, Z) geht, zugleich Normale der Kugel ist, so sind die Richtungscosinus $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ der Kugelnormale, abgesehen vom Vorzeichen, gleich X, Y, Z selbst. Zur Bestimmung des Vorzeichens ist zu beachten, dass wir auf S. 27 Festsetzungen über das Vorzeichen getroffen haben. Nach den damaligen Formeln (4) ist, weil jetzt X, Y, Z an die Stelle von x, y, z und $\mathfrak{D}$ an die Stelle von D tritt:

$$(9)\quad \mathfrak{X} = \frac{Y_u Z_v - Z_u Y_v}{\mathfrak{D}}, \quad \mathfrak{Y} = \frac{Z_u X_v - X_u Z_v}{\mathfrak{D}}, \quad \mathfrak{Z} = \frac{X_u Y_v - Y_u X_v}{\mathfrak{D}}.$$

Nach dem Vorhergehenden ist klar, dass die rechten Seiten hierin gleich $\pm X$, $\pm Y$, $\pm Z$ sein müssen. Man kann dies mit Hülfe der Formeln (4), S. 131, bestätigen, wodurch sich zugleich das Vorzeichen bestimmt. Denn danach ist:

$$Y_u Z_v - Z_u Y_v = \frac{LN - M^2}{D} \cdot X,$$

also nach (9):

$$\mathfrak{X} = \frac{LN - M^2}{D\mathfrak{D}} X$$

oder nach Satz 11, S. 119:

$$\mathfrak{X} = \frac{DK}{\mathfrak{D}} X$$

oder endlich nach (8):

$$(10) \qquad \mathfrak{X} = \varepsilon X, \quad \mathfrak{Y} = \varepsilon Y, \quad \mathfrak{Z} = \varepsilon Z.$$

Da X, Y, Z die Coordinaten des Bildpunktes $\mathfrak{P}$ von P sind, so ist die Normale der Kugel nach aussen — von der Kugelmitte aus — positiv, wenn $\varepsilon = +1$ ist, nach innen, wenn $\varepsilon = -1$ ist. Da aber im reellen Fall ε nach dem Früheren $= \pm 1$ ist, je nachdem $K \gtrless 0$ ist, so folgt, weil K gleich dem Product der reciproken Werte der Hauptkrümmungsradien ist und nach S. 140:

Satz 87: Bei der sphärischen Abbildung einer reellen Fläche sind die Kugelnormalen nach aussen oder nach innen positiv zu nennen, je nachdem die zugehörige Stelle der Fläche elliptisch oder hyperbolisch gekrümmt ist.

Zur Vermeidung von Irrtümern heben wir jedoch nochmals ausdrücklich hervor, dass die Abbildung stets dadurch geschieht, dass man von der Kugelmitte aus die Radien parallel den positiven Flächennormalen zieht. Die Sache ist die, dass diese Radien für die ebenfalls mittels der Parameter u und v dargestellte Kugel nicht auch stets die positiven Richtungen der Kugelnormalen angeben, wenn anders die früher gemachten Festsetzungen über die positiven Sinne der Parameterlinien (vgl. S. 30) auch auf der Kugel gelten sollen. Es ist dies vielmehr nur für die Stellen der Fall, die den elliptischen Punkten der Fläche entsprechen.

Erinnern wir uns daran, dass die positive Tangente der Parametercurve (v), die positive Tangente der Parametercurve (u) und die positive Normale im reellen Fall so gegeneinander liegen wie die drei Coordinatenaxen — abgesehen vom rechten Winkel der x- und y-Axe (vgl. S. 31) —, so sehen wir, dass die sphärische Abbildung für elliptische Stellen der Fläche gleichsinnig, für hyperbolische entgegengesetztsinnig ist, wenn man die Fläche von den positiven Normalen her betrachtet, die Kugel dagegen von aussen.

Wir können jetzt die auch dem Vorzeichen nach exacten Werte für die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ auf der Kugel sofort berechnen. Nach (10), S. 106, worin wir jetzt erstens $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$

oder also εX, εY, εZ statt X, Y, Z und zweitens X, Y, Z statt x, y, z zu setzen haben, ergiebt sich:

$$(11)\qquad \mathfrak{L} = -\varepsilon \mathbf{S} X_u^2, \quad \mathfrak{M} = -\varepsilon \mathbf{S} X_u X_v, \quad \mathfrak{N} = -\varepsilon \mathbf{S} X_v^2,$$

d. h. nach (4):

$$(12)\qquad \mathfrak{L} = -\varepsilon \mathfrak{E}, \quad \mathfrak{M} = -\varepsilon \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{N} = -\varepsilon \mathfrak{G}.$$

Dass auf der Kugel die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung denen der ersten Ordnung proportional sein müssen, war nach Satz 6, S. 112, zu erwarten. Wir sehen, dass für solche Stellen der Kugel, die hyperbolischen Flächenpunkten entsprechen, die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung völlig mit denen erster Ordnung übereinstimmen, dagegen für solche Stellen, die elliptischen Flächenpunkten entsprechen, nur abgesehen vom Vorzeichen.

Erinnern wir uns jetzt daran, dass wir die sphärische Abbildung benutzen wollten, um ein **Krümmungsmaass** für die **Flächenpunkte** abzuleiten. Zu diesem Zweck betrachten wir ein Element der Fläche (1), also ein unendlich kleines Stück der Fläche an einer Stelle P oder (u, v), etwa das in P anliegende unendlich kleine Parallelogramm der vier Punkte

$$(u, v), \quad (u + du, v), \quad (u, v + dv), \quad (u + du, v + dv).$$

Nach Satz 14, S. 35, ist sein Inhalt gleich

$$D\, du\, dv.$$

Wie man sieht, ist er im reellen Fall hier stets positiv ausgedrückt, wenn die Incremente du und dv positiv gewählt werden. Das Bild dieses unendlich kleinen, von den Parameterlinien (u), $(u + du)$, (v), $(v + dv)$ eingeschlossenen Parallelogramms ist ein unendlich kleines Parallelogramm, das von den entsprechenden Parameterlinien auf der Kugel eingeschlossen wird. (Man möge die Fig. 70, S. 204, vergleichen.) Der Inhalt des Bildparallelogramms ist:

$$\mathfrak{D}\, du\, dv.$$

Das Verhältnis aus dem Flächeninhalte dieses Bildes und dem des Originals würden wir nun nach den Bemerkungen am Anfang dieses Paragraphen als die Krümmung der Fläche an der Stelle P oder (u, v) definieren, wenn nicht noch ein Vorbehalt über das Vorzeichen zu machen wäre. Man wird wünschen, die Definition so zu fassen, dass sie für elliptische und für hyperbolische Punkte die Krümmung mit verschiedenen Vorzeichen ergiebt, und zwar ist es naturgemäss,

für die ersteren Stellen das positive, für die letzteren Stellen das negative Zeichen anzuwenden. Dies können wir so erreichen: Wir setzen fest, dass wir die Inhalte der unendlich kleinen Parallelogramme auf der Kugel als positiv oder negativ bezeichnen wollen, je nachdem die Normale der Kugel an der betreffenden Stelle nach aussen oder nach innen positiv ist. Alsdann ist nicht $\mathfrak{D}\,du\,dv$, sondern

$$\varepsilon\,\mathfrak{D}\,du\,dv$$

der Inhalt des Parallelogramms auf der Kugel. Nunmehr definieren wir also so:

Unter der Krümmung in einem Flächenpunkte verstehen wir das Verhältnis aus dem Inhalte des sphärischen Bildes eines unendlich kleinen Stückes der Fläche an der betreffenden Stelle und dem Inhalte dieses Stückes selbst.

Die Krümmung an der Stelle (u, v) hat hiernach den Wert:

$$\frac{\varepsilon\,\mathfrak{D}\,du\,dv}{D\,du\,dv}$$

oder nach (8) den Wert K. Daher nach (23), S. 118:

Satz 88: Die Krümmung in einem Flächenpunkte ist gleich K, d. h. gleich dem reciproken Wert von dem Product der mit Vorzeichen versehenen Hauptkrümmungsradien des Punktes.[1]

Allerdings könnte man einen Einwand machen: In der Definition des Krümmungsmaasses ist von einem beliebigen unendlich kleinen Flächenstück an der Stelle (u, v) die Rede, während wir in den Formeln ein von Parameterlinien umgrenztes unendlich kleines Parallelogramm benutzt haben. Aber jeder Bereich lässt sich aus solchen Parallelogrammen zusammensetzen, auch zeigt das Ergebnis, da $K = 1 : R_1 R_2$ eine geometrische Bedeutung hat, dass es von der zufälligen Wahl des Parametersystems durchaus unabhängig ist.

Der Leser möge sich hier noch an den Satz 51, S. 170, erinnern. Dort betrachteten wir zwei conjugierte Bogenelemente ds_1 und ds_2 der Fläche und die Winkel dv_1 und dv_2, die die in ihren Endpunkten errichteten Normalen mit den Normalen ihres Ausgangspunktes bilden. Bei der sphärischen Abbildung sind dv_1

---

[1] In der hier angegebenen Weise hat GAUSS das Krümmungsmaass in seinen „Disquisitiones“ (vgl. die Anm. auf S. 5) eingeführt.

und dv_2 die Bilder der Bogenelemente ds_1 und ds_2. Sind ds_1 und ds_2 nicht nur conjugiert, sondern auch zu einander senkrecht, so können wir also nach Satz 84, da dann auch dv_1 und dv_2 zu einander senkrecht sind, aus Satz 51 wieder unseren Satz 88 — allerdings abgesehen von der Vorzeichenbestimmung — ableiten.

In § 2 des gegenwärtigen Abschnittes sahen wir, dass es zwei Arten von Flächen giebt, die in Bezug auf die Krümmungen der Normalschnitte ein wesentlich anderes Verhalten zeigen, als allgemeine Flächen, nämlich erstens die Flächen, die lauter Nabelpunkte haben, d. h. die Kugeln (siehe Satz 6, S. 112), und zweitens die Flächen, die e i n e Schar von Minimalgeraden enthalten (siehe Satz 10, S. 115).

Wie wir aber schon auf S. 119, 120 bemerkt haben, können wir die Kugeln den allgemeinen Flächen unterordnen, indem wir irgend zwei zu einander senkrechte Normalschnitte als die Hauptkrümmungsschnitte bezeichnen. Es ist dann $R_1 = R_2$, gleich dem Radius der Kugel. N a c h u n s e r e r D e f i n i t i o n h a t a l s o e i n e K u g e l v o m R a d i u s R d a s c o n s t a n t e K r ü m m u n g s m a a s s $1 : R^2$.

Liegt eine Fläche vor, die nur e i n e Schar von Minimalgeraden enthält, so sind zwei Fälle denkbar: Entweder umhüllen diese Geraden eine Curve, eine Minimalcurve, oder nicht. Im ersten Fall, also im Fall der T a n g e n t e n f l ä c h e e i n e r M i n i m a l c u r v e, sind unsere Formeln nicht anwendbar, weil die Grössen X, Y, Z ihre Bedeutung verlieren (vgl. S. 28). Aber die sphärische Abbildung artet überhaupt für abwickelbare Flächen aus, denn abwickelbare Flächen haben ja nur ∞^1 Tangentenebenen. Die sphärische Abbildung kann nun natürlich auch, statt mittels Paralleler zu den Normalen, dadurch bewirkt werden, dass Tangentenebenen an die Kugel parallel zu den Tangentenebenen der Fläche gelegt werden. Man sieht, dass sich dann für die ∞^2 Punkte einer abwickelbaren Fläche nur ∞^1 Bildpunkte ergeben. Die sphärische Abbildung ist also für abwickelbare Flächen ausgeartet.

Wenn endlich eine Fläche e i n e Schar von Minimalgeraden enthält, die keine Curve umhüllen, so giebt es keine Hauptkrümmungsradien. Wir können also dann den Satz 88 nicht aussprechen. Wohl aber hat auch auf einer solchen Fläche die Grösse K, die ja nach S. 118 durch die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung ausdrückbar ist, eine analytische Bedeutung. Um also auch diesen Fall zu umfassen, werden wir gut thun, den Satz 88 nach (22), S. 118, durch diesen zu ersetzen:

Satz 89: Die Krümmung in einem Flächenpunkte ist:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

wenn E, F, G und L, M, N die Fundamentalgrössen sind.

Dies bietet auch den Vorteil, dass wir den Begriff der Krümmung auch auf die abwickelbaren Flächen übertragen können, obwohl für solche Flächen das sphärische Bild ausartet. Wir sehen dann aus Satz 19, S. 132:

Satz 90: Die Flächen von der Krümmung Null sind die abwickelbaren Flächen.

Wenn man will, kann man allerdings auch hier die geometrische Definition durch das Verhältnis aus dem Element der Kugel zum Element der gegebenen Fläche aufrecht erhalten, denn da das sphärische Bild in eine Curve ausartet, so hat das Element der Kugel den Flächeninhalt Null.

Bei den Tangentenflächen der Minimalcurven dagegen versagen alle Definitionen. Hier sprechen wir also überhaupt nicht von der Krümmung. —

Beispiel: Auf einer Rotationsfläche ist die Krümmung nach Satz 18, S. 122, gleich dem reciproken Wert des Productes aus dem Krümmungsradius des Meridians in die Normale, wenn diese bis zur Axe gemessen wird, wobei noch das Vorzeichen zu beachten ist. Wir haben daher in Satz 14, S. 123, die Rotationsflächen constanter Krümmung[1] bestimmt, abgesehen von denen von der Krümmung Null und von solchen Flächen, die wir damals überhaupt beiseite liessen, nämlich von Flächen, die eine und nur eine Schar von Minimalgeraden enthalten. Aber die Rotationsflächen von der Krümmung Null sind ja nach Satz 90 abwickelbar, also Rotationskegel und Rotationscylinder, insbesondere die Ebene. Wenn ferner eine Rotationsfläche eine Schar von Minimalgeraden enthält, so können wir sie so erzeugen: Die Gerade

$$\mathfrak{x} = a + Au, \quad \mathfrak{y} = b + Bu, \quad \mathfrak{z} = c + Cu$$

ist eine Minimalgerade, wenn

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0$$

[1] Die Rotationsflächen constanter negativer Krümmung hat zuerst Minding bestimmt: „Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen mit unveränderlichem Krümmungsmaasse“, Journ. f. d. r. u. ang. Math. 19. Bd. (1839). Alle Rotationsflächen constanter Krümmung hat alsdann Liouville bestimmt und zwar in der 4. Note zur 5. Auflage von Monge's „Application“ (1850). Vgl. die Anm. auf S. 110.

ist, nach I S. 142. Lassen wir sie sich um die z-Axe drehen, so geht nach (1), I S. 8, die Fläche hervor:

$$x = (a + Au)\cos v - (b + Bu)\sin v, \quad y = (a + Au)\sin v + (b + Bu)\cos v, \quad z = c + Cu.$$

Hier ist

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(aA + bB + cC)\frac{1}{C}(z - c).$$

Die Fläche ist also eine Kugel und enthält daher gegen die Voraussetzung zwei Scharen von Minimalgeraden, nach Satz 26, S. 64. Nur wenn $C = 0$ ist, ist der Schluss etwas anders: Dann ist die Minimalgerade parallel der xy-Ebene, sodass eine Ebene hervorgeht. Es giebt also ausser den oben erwähnten Flächen keine sonstigen Rotationsflächen constanter Krümmung.

Was die sphärische Abbildung einer Fläche anbetrifft, so wollen wir hier anhangsweise noch Eines erörtern:

Die Bildkugel enthält nach Satz 26, S. 64, zwei Scharen von Geraden, nämlich Minimalgeraden. Fragen wir uns, welche Curven auf der Fläche diese Geraden zu Bildcurven haben. Da bei der Abbildung einander entsprechende Punkte der Fläche und der Kugel parallele Tangentenebenen haben und da die Tangentenebenen der Kugel längs einer ihrer Minimalgeraden beständig diese Gerade enthalten, so werden längs derjenigen Curve der Fläche, deren sphärisches Bild diese Minimalgerade ist, die Tangentenebenen der Minimalgerade parallel sein, d. h. einen Cylinder von Minimalgeraden umhüllen. Die gesuchten Curven sind also diejenigen, längs deren die Fläche von Cylindern von Minimalgeraden umhüllt werden. Nach Satz 45, S. 157, sind diese Curven überall zu den Richtungen der hindurchgehenden tangierenden Minimalgeraden conjugiert. Die gesuchten Curven sind daher diejenigen, die mit einer Schar von Minimalcurven der Fläche ein System von conjugierten Curven bilden. Da die Fläche, sobald sie nicht Tangentenfläche einer Minimalcurve ist, zwei getrennte Scharen von Minimalcurven enthält — nach Satz 16, S. 36, — so folgt, dass es zwei Scharen von ∞^1 Curven der gesuchten Art giebt, derart, dass durch jeden Punkt der Fläche je eine Curve jeder Schar geht. Nach Satz 25, S. 138, sind die Tangenten der Minimalcurven durch einen Flächenpunkt symmetrisch zu den Hauptkrümmungstangenten des Punktes gelegen. Da man die conjugierten Richtungen nach Satz 38, S. 155, aus der Indicatrix ableitet, deren Axen den Hauptkrümmungstangenten parallel sind, so folgt, dass auch diese conjugierten Richtungen zu den Hauptkrümmungstangenten symmetrisch liegen. Anders ausgesprochen:

Satz 91: Diejenigen Curven einer Fläche, die sich bei der sphärischen Abbildung als die Minimalgeraden der

Kugel darstellen,[1] sind zu den Minimalcurven conjugiert, und in jedem Flächenpunkte werden die Winkel ihrer Tangenten durch die Hauptkrümmungsrichtungen des Punktes halbiert.

§ 13. Geradlinige Flächen.

Indem wir daran gehen, die Krümmung der geradlinigen Flächen[2] als Beispiel zu der vorangehenden Theorie zu betrachten, benutzen wir die Gelegenheit, die nicht-abwickelbaren geradlinigen Flächen etwas eingehender zu besprechen.

Vor allem ist da zu bemerken, dass es zwei wesentlich verschiedene Arten von geradlinigen Flächen giebt. Denn wir wissen ja, dass Flächen, die eine Schar von Minimalgeraden enthalten, in Bezug auf die Krümmungstheorie eine besondere Rolle spielen, siehe S. 115. Daher gilt die allgemeine Krümmungstheorie der Flächen nicht ohne weiteres auch für diejenigen geradlinigen Flächen, deren Erzeugende Minimalgeraden sind. Von diesen Flächen sehen wir vorerst vollständig ab; sie sollen nachher kurz betrachtet werden.

Die Erzeugenden einer geradlinigen Fläche haben ∞^1 orthogonale Trajectorien. Es seien:

$$\mathfrak{x} = \varphi(u), \quad \mathfrak{y} = \chi(u), \quad \mathfrak{z} = \psi(u) \tag{1}$$

die Gleichungen einer dieser Trajectorien, in den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ mittels ihrer Bogenlänge u ausgedrückt. Durch den Punkt (u) dieser Leitcurve — wie sie heissen möge — geht eine Erzeugende der Fläche. Sie kann als die Erzeugende (u) bezeichnet werden. Sind f, g, h ihre Richtungscosinus, so sind f, g, h Functionen von u. Die Annahme der Richtungscosinus f, g, h hat zur Folge, dass der Erzeugenden im reellen Fall ein positiver Sinn beizulegen ist. Es sei nun v die Strecke, um die ein Punkt auf der Erzeugenden von dem Punkte (u) der Leitcurve entfernt ist, im reellen Fall mit dem entsprechenden Vorzeichen versehen. Alsdann sind

$$x = \varphi(u) + vf(u), \quad y = \chi(u) + vg(u), \quad z = \psi(u) + vh(u) \tag{2}$$

[1] Diese Curven wurden zuerst von Bonnet betrachtet: „Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes", Journal de Mathém. pures et appl., 2. série t. 5. (1860).

[2] Die systematische Untersuchung der geradlinigen Fläche nimmt wohl ihren Anfang bei Monge, siehe die Anm. auf S. 110.

die Coordinaten dieses Punktes. In (2) liegt also eine Parameterdarstellung für die Punkte (u, v) der geradlinigen Fläche vor (vgl. (2) in I S. 271).

Da die Leitcurve eine orthogonale Trajectorie der Erzeugenden sein soll, so ist, wenn α, β, γ die Richtungscosinus der Tangente der Leitcurve bedeuten:

$$\mathbf{S}\,\alpha f = 0. \tag{3}$$

Auf der geradlinigen Fläche (2) sind die Parameterlinien (u) die Geraden. Jede Parameterlinie (v) schneidet auf allen Geraden (u) dieselbe Strecke v ab, gemessen von der Leitcurve an. Sie hat aber noch eine einfache Eigenschaft: Die Richtungscosinus ihrer Tangente sind proportional x_u, y_u, z_u. Nach (2) und III (B) ist aber:

$$x_u = \alpha + v f', \quad y_u = \beta + v g', \quad z_u = \gamma + v h'$$

und daher:

$$\mathbf{S}\, x_u f = \mathbf{S}\,\alpha f + v\,\mathbf{S}\, f f'.$$

Wegen (3), $\mathbf{S}\, f^2 = 1$, $\mathbf{S}\, f f' = 0$ ist dies gleich Null, d. h. die Curven (v) sind die orthogonalen Trajectorien der Geraden (u). Daher:

Satz 92: Zwei orthogonale Trajectorien einer Schar von ∞^1 Geraden, die keine Minimalgeraden sind, schneiden auf allen Geraden dieselbe Strecke ab.

Kennt man auf einer geradlinigen Fläche eine orthogonale Trajectorie der Geraden, so findet man hiernach eine unendlich benachbarte orthogonale Trajectorie, wenn man jeden Punkt der ersteren Curve um dasselbe unendlich kleine Stück längs der hindurchgehenden Geraden verschiebt. Nehmen wir an, es sei von vornherein keine orthogonale Trajectorie bekannt. Alsdann werden wir die geradlinige Fläche auch in der Form (2) darstellen können, wobei aber nun die Erzeugenden der Fläche nicht gerade auf der Leitcurve (1) senkrecht stehen, sodass die Richtungscosinus f, g, h die Relation (3) nicht erfüllen. Alsdann kann man leicht nach S. 34 die Differentialgleichung erster Ordnung in u und v für die orthogonalen Trajectorien der Geraden der Fläche aufstellen. Nach Satz 62, I S. 93, verlangt daher die Bestimmung der orthogonalen Trajectorien nur eine Quadratur. Wir wollen dies direct bestätigen: Nach (2) ist auf der Fläche allgemein:

$$dx = (\alpha + v f')\,du + f\,dv$$

u. s. w. Da f, g, h die Richtungscosinus der Geraden (u) sind, so ist also die Bedingung:

$$\mathbf{S}\,[(\alpha + v f')\,du + f\,dv] f = 0$$

die Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien. Wegen $\mathbf{S}f^2 = 1$, $\mathbf{S}ff' = 0$ kann sie so geschrieben werden:

$$\mathbf{S}\alpha f \cdot du + dv = 0.$$

Hier ist $\mathbf{S}\alpha f$ eine Function von u allein. Mithin ist

$$\int \mathbf{S}\alpha f \cdot du + v = \text{Const.}$$

die endliche Gleichung aller orthogonalen Trajectorien.

Nehmen wir jetzt wieder wie oben an, die Leitcurve (1) sei selbst eine orthogonale Trajectorie der Erzeugenden, sodass die Relation (3) besteht. Die Erzeugende (u) liegt dann in der Normalenebene des Punktes (u) der Leitcurve; es möge ω der Winkel sein, den sie mit der (positiven) Hauptnormale der Leitcurve bildet. Der Winkel sei im Sinne der Drehung von der (positiven) Hauptnormale zur (positiven) Binormale der Leitcurve gemessen. Sind l, m, n und λ, μ, ν die Richtungscosinus der Haupt- und Binormale der Leitcurve, so ist dann:

$$(4)\quad f = l\cos\omega + \lambda\sin\omega,\quad g = m\cos\omega + \mu\sin\omega,\quad h = n\cos\omega + \nu\sin\omega,$$

wie man sofort sieht, wenn man die auf der Erzeugenden vom Punkte (u) der Leitcurve aus aufgetragene Längeneinheit auf die Coordinatenaxen projicirt, indem man die Längeneinheit dabei durch einen gebrochenen Linienzug ersetzt (vgl. die analoge Überlegung in I S. 300). Wie f, g, h ist auch ω eine Function von u.

Die geradlinige Fläche ist vollständig gegeben, sobald die Leitcurve (1) und der Winkel ω als Function des in (1) auftretenden Parameters u gegeben ist. Dabei erhält man stets eine geradlinige Fläche, wie man auch die Curve (1) und die Function ω von u wählen mag.

Die Festlegung der Richtungen ($f:g:h$) mittels des Winkels ω versagt oder ist wenigstens nicht eindeutig bestimmt, wenn die Leitcurve (1) eine Gerade ist, wenn also alle Geraden der Fläche eine Gerade senkrecht schneiden, wie dies bei der gemeinen Schraubenfläche (vgl. S. 60) der Fall ist. Alsdann aber werden doch nicht alle orthogonalen Trajectorien der Geraden wiederum Geraden sein, weil sonst die Fläche eine Ebene wäre. Wir umfassen also doch durch unsere Darstellungsweise alle geradlinigen Flächen, deren Erzeugende keine Minimalgeraden sind.

Ist $1:r$ die Krümmung und $1:\varrho$ die Torsion der Leitcurve (1), so ist nach (4) und III (C), weil u die Bogenlänge der Leitcurve bedeuten soll:

$$f' = -\frac{1}{r}\cos\omega \cdot \alpha - \left(\omega' - \frac{1}{\varrho}\right)(\sin\omega \cdot l - \cos\omega \cdot \lambda).$$

Es empfiehlt sich, zur Abkürzung zwei nachher beständig auftretende Functionen von u mit p und q zu bezeichnen:

$$p = \frac{1}{r}\cos\omega, \qquad q = \omega' - \frac{1}{\varrho}, \tag{5}$$

sodass

$$f' = -p\,\alpha - q(\sin\omega \cdot l - \cos\omega \cdot \lambda) \tag{6}$$

ist. Entsprechende Werte gehen für g' und h' hervor. Nun ist nach (2), (6) und (4):

$$\left\{\begin{aligned} x_u &= \alpha + v f' = (1 - p v)\alpha - q \sin\omega \cdot v\, l + q\cos\omega \cdot v\,\lambda, \\ x_v &= l\cos\omega + \lambda\sin\omega \end{aligned}\right. \tag{7}$$

u. s. w. Nach XI (A) und II (A) ergeben sich also die Fundamentalgrössen erster Ordnung:

$$E = (1 - p v)^2 + q^2 v^2, \qquad F = 0, \qquad G = 1. \tag{8}$$

Ferner sind x_{vv}, y_{vv}, z_{vv} nach (7) gleich Null, so dass die Fundamentalgrösse N nach (9), S. 106, auch gleich Null ist. Dagegen ist $x_{uv} = f'$ u. s. w., sodass aus (4), (6) und II (D) für die Fundamentalgrösse M folgt:

$$M = \frac{q}{D},$$

wobei nach (8) die Grösse $D^2 = EG - F^2 = E$ ist.

Nun giebt der Satz 89, S. 214, für das Krümmungsmaass K der Fläche den Wert:

$$K = -\frac{M^2}{E} = -\frac{q^2}{E^2} = \frac{-q^2}{[(1 - p v)^2 + q^2 v^2]^2}. \tag{9}$$

Auf einer geradlinigen Fläche mit reellen Erzeugenden ist also die Krümmung stets negativ oder höchstens gleich Null, was vorherzusehen war, da die Fläche nach S. 130 überall hyperbolisch oder insbesondere parabolisch ist. Ist die Krümmung überall auf der Fläche gleich Null, so ist die Fläche nach Satz 90, S. 214, abwickelbar. Dies tritt ein, wenn $q = 0$ oder also nach (5):

$$\omega = \int \frac{du}{\varrho} + \text{Const.}$$

ist. Diese Formel hat dieselbe Bedeutung wie die letzte Formel in I S. 311. Die Geraden der Fläche sind eben in diesem Falle

solche Normalen der Leitcurve, die eine Curve auf der Polarfläche der Leitcurve umhüllen.

Sehen wir von den abwickelbaren Flächen ab, ist also q nicht identisch gleich Null, so erkennen wir aus (9), dass die Krümmung K längs einer jeden Erzeugenden (u) veränderlich ist, da sie im Nenner den längs der Erzeugenden (u) veränderlichen Abstand v von der Leitcurve enthält. Diese Grösse v käme ja nur dann in K nicht vor, wenn $p = q = 0$ wäre. Man erkennt hieraus, dass es unter den geradlinigen nicht-abwickelbaren Flächen, deren Erzeugende keine Minimalgeraden sind, keine Flächen constanter Krümmung giebt.

Durchläuft der Punkt (u, v) eine Erzeugende (u) und strebt er ins Unendlichferne, d. h. wird v unendlich gross, so convergiert die Krümmung nach (9) gegen Null, was wir auch so aussprechen können: Im Unendlichfernen hat die geradlinige Fläche den Charakter einer abwickelbaren Fläche. Dies kann man sich auch geometrisch leicht erklären.

Auf der Erzeugenden (u) erreicht nun die Krümmung, absolut genommen, da ein Maximum, wo der Differentialquotient des Nenners von K nach v gleich Null ist. Dies tritt ein für den Wert von v:

$$(10) \qquad \mathfrak{v} = \frac{p}{p^2 + q^2}.$$

Diese Stelle $(u, \mathfrak{v})$ heisst der Mittelpunkt der Erzeugenden (u);[1] dort hat die Krümmung den Wert:

$$(11) \qquad \mathfrak{K} = -\left(\frac{p^2 + q^2}{q}\right)^2.$$

Man kommt leicht auf die Vermutung, dass der Mittelpunkt diejenige Stelle der Erzeugenden (u) ist, an der sie der unendlich benachbarten Erzeugenden $(u + du)$ am nächsten kommt. In der That:

Ist $(u, \mathfrak{v})$ diejenige Stelle der Geraden (u), in der der kürzeste Abstand dieser Erzeugenden von der Erzeugenden $(u + du)$ beginnt, so muss diejenige Tangente der durch den Punkt $(u, \mathfrak{v})$ gehenden orthogonalen Trajectorie $(\mathfrak{v})$ der Erzeugenden, deren Berührungspunkt der Punkt $(u, \mathfrak{v})$ ist, die Erzeugende $(u + du)$ senkrecht kreuzen. Sie hat aber Richtungscosinus proportional x_u, y_u, z_u für $v = \mathfrak{v}$,

[1] Nach Chasles, „Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite", Correspondance math. et phys. de Quetelet, t. XI (1839).

und die Erzeugende $(u + du)$ hat die Richtungscosinus $f + f'du$, $g + g'du$, $h + h'du$. Also fordern wir für $v = \mathfrak{v}$:

$$\mathbf{S}(f + f'du)x_u = 0$$

oder, da $\mathbf{S}fx_u = 0$ nach S. 217 ist:

$$\mathbf{S}f'x_u = 0$$

oder nach (6) und (7) wegen II (*A*):

$$-p(1 - p\mathfrak{v}) + q^2\mathfrak{v} = 0,$$

aber diese Gleichung giebt wieder den Wert (10) von $\mathfrak{v}$.

Satz 93: Längs einer solchen Erzeugenden einer geradlinigen Fläche, die keine Minimalgerade ist, erreicht die Krümmung der Fläche, absolut genommen, ihr Maximum an derjenigen Stelle, an der die Erzeugende einer unendlich benachbarten Erzeugenden am nächsten kommt.

Nach (10) und (11) ist

$$p = \frac{\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}^2 - \frac{1}{\mathfrak{K}}}, \quad q = \frac{1}{\sqrt{-\mathfrak{K}}} \cdot \frac{1}{\mathfrak{v}^2 - \frac{1}{\mathfrak{K}}}, \tag{12}$$

sodass sich das Krümmungsmaass K nach (9) so ausdrückt:

$$K = \frac{\mathfrak{K}}{[1 - \mathfrak{K}(v - \mathfrak{v})^2]^2}. \tag{13}$$

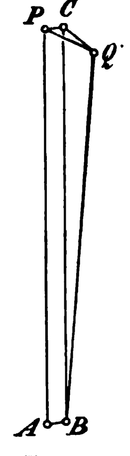


Fig. 72.

Hiermit ist die Krümmung K im Punkte (u, v) ausgedrückt durch die Krümmung $\mathfrak{K}$ im Mittelpunkte $(u, \mathfrak{v})$ der Geraden (u) und durch den Abstand $v - \mathfrak{v}$ beider Punkte von einander. Man sieht, dass symmetrisch zum Mittelpunkt gelegene Punkte der Erzeugenden dasselbe Krümmungsmaass haben.

Die Tangentenebene des Punktes P oder (u, v) enthält die durch ihn gehende Erzeugende (u) und die Tangente der durch ihn gehenden Parameterlinie (v). Die letztere Tangente ist, weil die Curve (v) eine orthogonale Trajectorie der Erzeugenden ist, diejenige Gerade, die im Punkte P auf der Graden (u) senkrecht steht und überdies die unendlich benachbarte Erzeugende $(u + du)$ schneidet, etwa in Q. Ferner sei A der Mittelpunkt $(u, \mathfrak{v})$ der Erzeugenden (u), also derjenige Punkt A, in dem der kürzeste Abstand AB zwischen den beiden Erzeugenden beginnt, siehe Fig. 72. Ziehen wir durch P die Parallele

zu AB und durch B die Parallele zu AP, so schneiden sich beide Parallelen in einem Punkte C. Die Geraden PC und PQ stehen alsdann auf PA senkrecht. Die Tangentenebene von P ist die Ebene PQA. Rückt P nach A, so wird diese Ebene zur Ebene $ABCP$. Dies also ist die Tangentenebene des Mittelpunktes A. Beide Tangentenebenen schneiden einander längs PA, und es ist $\sphericalangle CPQ$ ihr Neigungswinkel gegen einander. Da PA auf PC und PQ senkrecht steht, so ist $\sphericalangle BCQ$ ein Rechter. Da AB auf AP und BQ senkrecht steht, so ist $\sphericalangle PCQ$ auch ein Rechter. Ist der unendlich kleine kürzeste Abstand $AB = d\sigma$ und der unendlich kleine Winkel der beiden Erzeugenden, d. h. $\sphericalangle CBQ = d\tau$, so folgt aus $\triangle BCQ$ und $\triangle PCQ$:

$$CQ = AP\,d\tau,$$

$$\text{(14)} \qquad \operatorname{tg} CPQ = \frac{CQ}{PC} = AP\frac{d\tau}{d\sigma}.$$

Variiert der Punkt P auf der Erzeugenden (u), so ändert sich in dieser Formel rechts nur der Factor AP. Daher erkennen wir zunächst geometrisch:

Satz 94:[1] Bewegt sich ein Punkt P auf einer solchen Erzeugenden einer geradlinigen Fläche, die keine Minimalgerade ist, so dreht sich seine Tangentenebene um die Erzeugende in der Art, dass die Tangente des Winkels, den sie mit der Tangentenebene des Mittelpunktes der Erzeugenden bildet, proportional dem Abstande des beweglichen Punktes von dem Mittelpunkte ist.

Um dies auch analytisch exact einzusehen, bestimmen wir die Richtungscosinus X, Y, Z der Flächennormale. Nach XI (F), (7), II (C) und (8) ist:

$$\text{(15)} \qquad X = -\frac{q v \alpha + (1 - p v)(\sin\omega \cdot l - \cos\omega \cdot \lambda)}{\sqrt{(1 - p v)^2 + q^2 v^2}}.$$

Dabei ist die Quadratwurzel im Nenner im reellen Fall positiv zu wählen, weil sie D vorstellt. Insbesondere seien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Richtungscosinus der Normale des Mittelpunktes $(u, \mathfrak{v})$. Nach (10) ist:

$$\text{(16)} \qquad \mathfrak{X} = -\frac{p\alpha + q(\sin\omega \cdot l - \cos\omega \cdot \lambda)}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

Jetzt finden wir für den Winkel ϑ der Normalen des Punktes (u, v)

[1] Dieser Satz und Satz 95 bei Chasles, siehe die Anm. zu S. 220.

und der Normalen des Mittelpunktes $(u, \mathfrak{v})$ oder also für den Winkel der Tangentenebenen beider Punkte nach II (*A*):

$$\cos\vartheta = \mathbf{S}\,X\mathfrak{X} = \frac{q}{\sqrt{p^2+q^2}\sqrt{(1-p\,v)^2+q^2v^2}}$$

oder nach (12):

$$\cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{1-\mathfrak{K}(v-\mathfrak{v})^2}}.$$

Hieraus aber folgt:

$$\operatorname{tg}^2\vartheta = -\,\mathfrak{K}(v-\mathfrak{v})^2.$$

Da $\mathfrak{K}$ im reellen Fall stets negativ ist, so wird dadurch, dass wir

$$\operatorname{tg}\vartheta = (v-\mathfrak{v})\sqrt{-\mathfrak{K}} \tag{17}$$

ansetzen, dem Winkel ϑ ein bestimmter Sinn beigelegt, sobald wir die Quadratwurzel aus $-\mathfrak{K}$ positiv wählen. Es ist nämlich alsdann $\operatorname{tg}\vartheta$ positiv für diejenigen Stellen der Erzeugenden (u), die ein Punkt durchläuft, wenn er vom Mittelpunkt A in positiver Richtung auf der Erzeugenden entlang geht $(v > \mathfrak{v})$. Dabei wächst ϑ von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$. Durchläuft der Punkt das rückwärtige Stück der Geraden bis ins Unendliche, so nimmt ϑ von 0 bis $-\frac{1}{2}\pi$ ab. Durchläuft der Punkt die ganze Gerade, so beschreibt demnach seine Tangentenebene einen gestreckten Winkel, indem die Tangentenebene im Unendlichfernen auf der im Mittelpunkte A senkrecht steht. Nebenbei bemerkt dürfen wir — entgegen unseren sonstigen Festsetzungen — hier auch das Unendlichferne in Betracht ziehen, da die erzeugenden Geraden der Fläche bis ins Unendlichferne wohl definiert sind. Besonders hervorgehoben sei noch, dass die Normale der Fläche im Unendlichfernen nach der einen oder anderen Seite positiv ist, je nachdem man bis $v = +\infty$ oder $v = -\infty$ geht.

Die Formel (17) sagt wie vorhin die Formel (14), in der ja $\sphericalangle CPQ = \vartheta$ ist, gerade das aus, was wir schon in Satz 94 ausgesprochen haben.

Dem Satze können wir noch eine andere Fassung geben: Auf der Tangentenebene des Mittelpunktes A errichten wir ein Lot, dessen kürzester Abstand von der Erzeugenden (u) gleich der Längeneinheit ist. Auf diesem Lot schneidet dann die Tangentenebene des Punktes (u, v) gerade die Strecke $\operatorname{tg}\vartheta$ ab. Also ist das Doppelverhältnis der Tangentenebenen von vier Punkten der Erzeugenden (u) gleich dem der vier zugehörigen Werte von $\operatorname{tg}\vartheta$, nach Satz 43, I S. 334, und nach Satz 38, I S. 332. Nach (17) aber ist dies letztere Doppelverhältnis gleich dem der vier zugehörigen Werte

von $\mathfrak{v}$, wegen Satz 35, I S. 328, oder also gleich dem der vier zugehörigen Berührungspunkte. Daher:

Satz 95: Auf einer geradlinigen Fläche, deren Erzeugende keine Minimalgeraden sind, ist das Doppelverhältnis von vier Punkten einer Erzeugenden gleich dem Doppelverhältnis ihrer Tangentenebenen. Insbesondere steht die Tangentenebene des Mittelpunktes auf der Tangentenebene im Unendlichfernen senkrecht.

Sind g und h zwei unendlich benachbarte Erzeugende der Fläche und ist A der Mittelpunkt von g, so enthält die Tangentenebene von A die Gerade g und den kürzesten Abstand AB von g und h; die Tangentenebene des unendlich fernen Punktes von g steht auf dieser Ebene senkrecht. Daraus folgt: Ziehen wir durch einen Punkt, etwa durch den Anfangspunkt O, die Parallelen g' und h' zu g und h, und errichten wir in O auf der Ebene von g' und h' das Lot $\mathfrak{g}'$, so ist die Tangentenebene von A der Ebene von g' und $\mathfrak{g}'$ parallel; und da die zu dieser letzteren Ebene senkrechte Ebene durch g' auch h' enthält, so ist die Tangentenebene des unendlich fernen Punktes von g der Ebene von g' und h' parallel.

Wenn wir durch O zu allen Erzeugenden die Parallelen ziehen, so entsteht ein Kegel, und die Ebene von g' und h' ist eine Tangentenebene des Kegels. Also:

Satz 96: Zieht man durch einen Punkt die Parallelen g' zu den Erzeugenden g einer geradlinigen Fläche, so ist die Tangentenebene des unendlich fernen Punktes von g derjenigen Ebene parallel, die den Kegel jener Geraden g' längs der zugehörigen Mantellinie g' berührt.

Den Kegel der Parallelen g' zu der Erzeugenden g nennt man den Richtungskegel der geradlinigen Fläche. Ist er gegeben, so kann man leicht die Stellungen derjenigen Tangentenebenen bestimmen, die die Fläche in den Mittelpunkten A der Erzeugenden g berühren, indem man nämlich zu jeder Tangentenebene des Richtungskegels diejenige Ebene construiert, die auf dieser Ebene längs der Mantellinie g' senkrecht steht. Sie ist der Tangentenebene des Mittelpunktes A der zugehörigen Erzeugenden g parallel.

Der Ort der Mittelpunkte A aller Erzeugenden g heisst die Strictionscurve der geradlinigen Fläche.[1] Die Strictions-

[1] Nach CHASLES, siehe die Anm. zu S. 220.

curve ist also einerseits der Ort derjenigen Punkte der Erzeugenden, in denen die Krümmung der Fläche, absolut genommen, ihr Maximum erreicht, andererseits der Ort derjenigen Punkte der Erzeugenden, in denen diese Erzeugenden den kleinsten Abstand von den unendlich benachbarten Erzeugenden haben. Die erste Definition versagt bei den abwickelbaren Flächen, bei denen ja die Krümmung überall gleich Null ist (vgl. Satz 90, S. 214); doch kann man dann infolge der zweiten Definition die Gratlinie als Strictionscurve auffassen. Wenn aber keine Gratlinie vorhanden ist, d. h. wenn die Fläche ein Kegel ist, so ist die Strictionscurve zur Spitze des Kegels degeneriert. Ist aber die Fläche ein Cylinder, so kann offenbar jede der Curven, in denen die zu den Mantellinien senkrechten Ebenen den Cylinder schneiden, als Strictionscurve bezeichnet werden.

Im allgemeinen ist die Strictionscurve einer geradlinigen Fläche keine orthogonale Trajectorie der Erzeugenden, denn die Strecken $\mathfrak{v}$, die sie auf den Erzeugenden (u) abschneidet — gemessen von der Leitcurve an —, sind nach (10) im allgemeinen von u abhängig. Die kürzesten Abstände zwischen je zwei unendlich benachbarten Erzeugenden sind also im allgemeinen nicht die Bogenelemente der Strictionscurve. Nur der Ort ihrer Anfangspunkte oder, was ja im Endlichen auf dasselbe hinauskommt, der Ort ihrer Endpunkte ist die Strictionslinie. Dies soll durch Fig. 73 erläutert werden. Hier sind auf einem Rotationshyperboloid die Geraden der einen Schar angedeutet. Dabei sind die kürzesten Abstände zwischen je zwei nahe auf einander folgenden Erzeugenden construiert worden. Die Strictionscurve ist hier der kleinste Kreis auf dem Hyperboloid, die kürzesten Abstände zwischen je zwei unendlich benachbarten Erzeugenden kreuzen den Kreis unter einem gewissen Winkel.

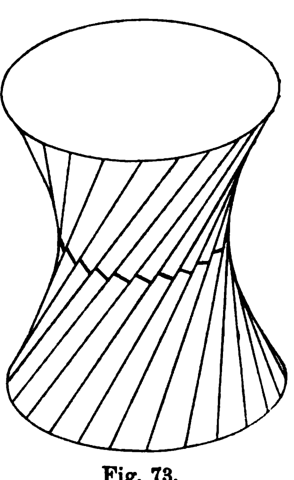


Fig. 73.

Es kann aber vorkommen, dass die Strictionscurve eine orthogonale Trajectorie der Erzeugenden ist. Dies tritt z. B. dann ein, wenn alle Erzeugenden eine Gerade senkrecht schneiden, wie bei der gemeinen Schraubenfläche. Die Gerade ist dann die Strictionscurve. Ist die Strictionscurve eine orthogonale Trajectorie, aber keine Gerade, so kann sie als Leitcurve gewählt werden, sodass

dann die Mittelpunkte der Erzeugenden auf der Leitcurve liegen, also $\mathfrak{v} = 0$ oder nach (10) und (5) entweder $1:r = 0$ oder $\cos\omega = 0$ ist. Wäre $1:r = 0$, so wäre die Strictionscurve gegen die Voraussetzung nach Satz 27, I S. 221, eine Gerade. Ist $\cos\omega = 0$, so sind die Erzeugenden nach (4) die Binormalen der Leitcurve. Daher:

Satz 97: Auf einer geradlinigen, aber nicht von Minimalgeraden gebildeten Fläche ist die Strictionscurve nur dann eine orthogonale Trajectorie der Erzeugenden, wenn die Fläche entweder aus den Binormalen einer Curve oder aus denjenigen Geraden besteht, die eine Gerade senkrecht schneiden. Alsdann ist die Curve bez. Gerade die Strictionscurve.

Die Fläche der Binormalen einer Curve ist nach I S. 275 im allgemeinen nicht abwickelbar, vielmehr nur dann, wenn die Curve eben ist. Alsdann ist die Fläche ein Cylinder, der, wie bemerkt, unendlich viele Strictionscurven hat.

Hat eine geradlinige Fläche zwei Scharen von je ∞^1 Geraden, so ist sie nach Satz 31, S. 114, eine Fläche zweiter Ordnung. Sind die Geraden keine Minimalgeraden, so gehört zunächst zu jeder Schar eine Strictionscurve. Legt man nun durch den Punkt O die Ebenen parallel zu den Tangentenebenen der unendlich fernen Punkte der Fläche, so umhüllen sie den oben erwähnten Richtungskegel. Da die Erzeugenden der Fläche den Mantellinien des Kegels parallel sind, so folgt, dass beide Scharen von Erzeugenden den Mantellinien eines und desselben Kegels parallel sind. Wenn man nun diejenigen Ebenen construiert, die auf den Tangentenebenen des Kegels senkrecht stehen und sie längs der Mantellinien schneiden, so hat man solche ∞^1 Ebenen, denen die Tangentenebenen der Fläche in den Punkten einer Strictionscurve nach dem Obigen parallel sind. Man findet also die Strictionscurve ganz unabhängig von der gewählten Schar der Erzeugenden, indem man diejenigen ∞^1 Punkte der Fläche sucht, deren Tangentenebenen den soeben construierten ∞^1 Ebenen parallel sind. Mithin fallen beide Strictionscurven zusammen.

Aus dem Richtungskegel und den Erzeugenden einer geradlinigen Fläche kann man rückwärts die Tangentenebenen der unendlich fernen Punkte der Fläche construieren, indem man durch jede Erzeugende g diejenige Ebene legt, die der Tangentenebene der zugehörigen Mantellinie g' des Kegels parallel ist. Die ∞^1 Tangentenebenen der unendlich fernen Punkte umhüllen nach Satz 15,

I S. 293, eine abwickelbare Fläche, die man als die asymptotische abwickelbare Fläche der geradlinigen Fläche bezeichnen kann. (Vgl. I S. 18.) Diese abwickelbare Fläche kann ausarten; so sind z. B. die Tangentenebenen der unendlich fernen Punkte einer gemeinen Schraubenfläche (vgl. S. 60) die Ebenen senkrecht zur Schraubungsaxe; beim einschaligen Hyperboloid ist diese abwickelbare Fläche ein reeller Kegel u. s. w. Wir wollen hierauf nicht näher eingehen.

Wie wir oben sahen, giebt es unter denjenigen geradlinigen Flächen, deren Geraden keine Minimalgeraden sind, ausser den abwickelbaren Flächen keine Flächen constanter Krümmung. Ganz anders verhält es sich bei den Flächen von Minimalgeraden, wie schon das Beispiel der Kugel (vgl. Satz 26, S. 64) lehrt, denn die Kugel ist ja eine Fläche constanter Krümmung.

Wollen wir eine Fläche von Minimalgeraden analytisch darstellen, so wählen wir irgend eine Curve auf ihr als Leitcurve, etwa eine der krummen Minimalcurven der Fläche. Denn alsdann schliessen wir ja nur die Kugeln, auf denen auch die Minimalcurven der zweiten Art Geraden sind, und die Tangentenflächen von Minimalcurven aus. Die Kugeln haben constante Krümmung, und auf den Tangentenflächen von Minimalcurven versagt die Definition der Krümmung nach S. 214.

Nach Satz 50, I S. 342, sei also die Minimalcurve:

$$(18)\qquad \mathfrak{x} = \frac{1}{2}\int(1-u^2)\varphi(u)du,\quad \mathfrak{y} = \frac{i}{2}\int(1+u^2)\varphi(u)du,\quad \mathfrak{z} = \int u\varphi(u)du$$

die Leitcurve. Dabei bedeutet φ eine beliebige von Null verschiedene Function des Parameters u.

Durch den Punkt (u) der Leitcurve geht eine Minimalgerade der Fläche. Längs dieser Geraden wachsen die rechtwinkligen Coordinaten um solche Grössen A, B, C, bei denen die Summe der Quadrate gleich Null ist:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0.$$

Sie werden dabei Functionen von u sein. Wie in I S. 340 schreiben wir:

$$(A + iB)(A - iB) = -C^2$$

und setzen:

$$-\frac{A+iB}{C} = \omega(u),\qquad \frac{A-iB}{C} = \frac{1}{\omega(u)},$$

sodass wir haben:

$$A:B:C = \frac{1}{2}(1-\omega^2):\frac{i}{2}(1+\omega^2):\omega.$$

Nun sind die Gleichungen der Fläche mit der Leitcurve (18):

$$(19)\quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\int(1-u^2)\varphi\,du + \frac{1}{2}(1-\omega^2)v, \\ y = \frac{i}{2}\int(1+u^2)\varphi\,du + \frac{i}{2}(1+\omega^2)v, \\ z = \int u\varphi\,du + \omega\,v, \end{cases}$$

ausgedrückt mittels der Parameter u und v.

Hier ist:

$$x_u = \frac{1}{2}(1-u^2)\varphi - \omega\omega' v, \quad x_v = \frac{1}{2}(1-\omega^2),$$

$$y_u = \frac{i}{2}(1+u^2)\varphi + i\omega\omega' v, \quad y_v = \frac{i}{2}(1+\omega^2),$$

$$z_u = u\varphi + \omega' v, \quad z_v = \omega,$$

daher nach XI (A):

$$(20)\quad F = -\frac{1}{2}(u-\omega)^2\varphi, \quad G = 0.$$

Da ferner x_{vv}, y_{vv}, z_{vv} gleich Null sind, so ist auch die Fundamentalgrösse $N = 0$ nach (9), S. 106, während sich wegen:

$$x_{uv} = -\omega\omega', \quad y_{uv} = i\omega\omega', \quad z_{uv} = \omega'$$

ergiebt:

$$M = -\frac{i(u-\omega)^2\varphi\omega'}{2D}.$$

Da D^2 nach (20) gleich $-F^2$ ist, so ergiebt sich nach Satz 89, S. 214, für das Krümmungsmaass K der Fläche der Wert:

$$K = \frac{4\omega'^2}{(u-\omega)^4\varphi^2},$$

der nur von u abhängt, nicht von v, woraus folgt, dass bei einer Fläche von Minimalgeraden die Krümmung längs jeder Erzeugenden constant ist.

Soll die Krümmung auf der ganzen Fläche einen constanten Wert K haben, so haben wir nach der letzten Formel

$$\varphi = \frac{2\omega'}{\sqrt{K}(u-\omega)^2}$$

zu setzen. Mithin folgt aus (19):

Satz 98: Ausser den Kugeln und abwickelbaren Flächen giebt es noch andere geradlinige Flächen constanter

Krümmung K. Ihre Geraden sind Minimalgeraden. Jede solche Fläche lässt sich so darstellen:

$$x = \frac{1}{\sqrt{K}}\int\frac{(1-u^2)\,\omega'}{(u-\omega)^2}\,du + \frac{1}{2}(1-\omega^2)\,v,$$

$$y = \frac{i}{\sqrt{K}}\int\frac{(1+u^2)\,\omega'}{(u-\omega)^2}\,du + \frac{i}{2}(1+\omega^2)\,v,$$

$$z = \frac{2}{\sqrt{K}}\int\frac{u\,\omega'}{(u-\omega)^2}\,du + \omega\,v.$$

Hierin bedeutet ω eine beliebige nicht constante Function des Parameters u.[1]

§ 14. Die mittlere Krümmung der Flächen.

Das in § 12 aufgestellte Krümmungsmaass entspricht in mancher Beziehung nicht den Anforderungen, die man von vornherein, ehe man an eine strenge Definition geht, an ein Krümmungsmaass zu stellen geneigt ist. So z. B. muss man sich erst darein finden, dass nicht nur die Ebenen, sondern auch die abwickelbaren Flächen nach Satz 90, S. 214, das Krümmungsmaass Null haben, obwohl doch diese Flächen augenscheinlich krumm sind. Wir werden ferner später sehen, dass sich das Krümmungsmaass nicht ändert, wenn man eine Fläche ohne Dehnung verbiegt. So interessant dieser Umstand an sich ist, so wenig entspricht er doch der Erwartung, die man von vornherein hegt, denn bei einer Verbiegung der Fläche ist man geneigt, zu sagen, dass sich ihre Krümmung ändert. Diese und andere Gründe sind die Ursache dafür, dass verschiedene andere Functionen als Maass der Krümmung vorgeschlagen worden sind. So auch die Grösse, die wir jetzt besprechen wollen und die man als die mittlere Krümmung zu bezeichnen pflegt, um sie von dem Krümmungsmaass K zu unterscheiden. Zu dieser Grösse hat eine physikalische Frage geführt. Man zeigt nämlich in der Physik, dass ein Teilchen, das an einer Stelle P der Oberfläche einer Flüssigkeit liegt, von denjenigen Teilchen, die in einer Schnitt-

[1] Diese imaginären geradlinigen Flächen von constanter Krümmung wurden früher, wie es scheint, stets übersehen und erst 1896 von Stäckel bestimmt in der in der Anm. auf S. 113 genannten Abhandlung. Allerdings erfordert die Aufstellung ihrer endlichen Gleichungen bei Stäckel noch die Integration einer linearen homogenen Differentialgleichung dritter Ordnung, während die obigen Formeln nur noch drei von einander unabhängige Quadraturen enthalten.

ebene der Fläche durch die Normale von P liegen, eine Anziehung erfährt, die — abgesehen von einer uns nicht interessierenden physikalischen Constanten — gleich der Krümmung $1:r$ der durch die Ebene bestimmten Schnittcurve der Fläche an der Stelle P ist. Will man also die gesamte Anziehung ermitteln, die P erfährt, die sogenannte Oberflächenspannung in P, so hat man das Mittel aus den Krümmungen $1:r$ aller Normalschnitte von P zu bilden.

Es liegt also jetzt die rein mathematische Frage vor: Durch die Normale eines Punktes P einer Fläche werden Ebenen gelegt, von denen je zwei auf einander folgende denselben Winkel mit einander bilden. Alsdann ist das arithmetische Mittel aus den Krümmungen $1:r$ aller dieser Normalschnitte zu bilden für den Fall, dass der erwähnte Winkel unendlich klein ist. Es ist also die Summe aller Krümmungen $1:r$ durch ihre Anzahl zu dividieren. Dies ist nach Satz 22, S. 135, ohne weiteres zu erledigen: Wir bilden die Summe, indem wir paarweis die beiden Krümmungen zusammenfassen, die in zwei zu einander senkrechten Normalschnitten auftreten. Dieses Paar liefert nach dem erwähnten Satze den Mittelwert:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right),$$

wenn R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien von P sind, also einen Wert, der für jedes dieser Paare derselbe ist. Mithin ist auch das gesamte arithmetische Mittel gleich diesem Werte, der also das Maass der Oberflächenspannung darstellt.

Aus dem angezogenen Satz folgt also der

Satz 99: Legt man durch die Normale eines Flächenpunktes P, dessen Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 sind, lauter Schnittebenen, von denen je zwei benachbarte denselben unendlich kleinen Winkel mit einander bilden, so ist das arithmetische Mittel aus den Krümmungen aller Schnittcurven in P gleich:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right).$$

Die hier auftretende Summe der beiden Hauptkrümmungen, die wir in (23), S. 118, mit H bezeichnet haben, nennt man die mittlere Krümmung der Stelle P der Fläche.[1] Nach (22), S. 118, drückt sie sich durch die Fundamentalgrössen so aus:

[1] Übrigens herrscht in dieser Beziehung keine Übereinstimmung unter den verschiedenen Autoren. Ursprünglich hat man wohl $\frac{1}{2}H$ als mittlere

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}, \tag{1}$$

und diese Formel soll als Definition der mittleren Krümmung auch für den Fall gelten, dass P gar keine Hauptkrümmungsradien hat, also auf den Flächen, die eine Schar von Minimalgeraden enthalten (vgl. S. 115).

Zu dieser mittleren Krümmung H führt uns auch die Beantwortung der Frage, wie sich der Inhalt eines unendlich kleinen Flächenstückes ändert, wenn man die Fläche selbst einer unendlich kleinen Änderung unterwirft.

Es sei nämlich die Fläche vorgelegt:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v), \tag{2}$$

von der wir voraussetzen, dass sie nicht die Tangentenfläche einer Minimalcurve sei, sodass auf ihr die Grösse D nach Satz 9, S. 29, nicht gleich Null ist. Wenn man nun die Fläche unendlich wenig ändert, sodass sie in eine unendlich benachbarte Fläche übergeht, so wird auf der Normalen eines jeden Flächenpunktes (u, v) ein Punkt der unendlich benachbarten Fläche liegen. Wir können daher die Änderung dadurch erzielen, dass wir jeden Punkt (u, v) der Fläche (2) längs seiner Normalen um ein unendlich kleines Stück verschieben. Die Grösse der Verschiebung wird von Punkt zu Punkt eine andere und daher eine Function von u und v sein. Sie habe den Wert

$$\nu(u, v)\,\varepsilon,$$

wenn ε eine unendlich kleine Grösse bedeutet, die für alle Punkte (u, v) dieselbe sein soll. Sind X, Y, Z die Richtungscosinus der Flächennormale, so sind dann:

$$\bar{x} = x + X\nu\varepsilon, \quad \bar{y} = y + Y\nu\varepsilon, \quad \bar{z} = z + Z\nu\varepsilon \tag{3}$$

die Gleichungen der neuen Fläche. Hierin sind x, y, z die Functionen (2) und X, Y, Z die nach XI (F) zu berechnenden Functionen von u und v. Jedem Wertepaar u, v gehört ein Punkt der Fläche (2) und ein Punkt der neuen Fläche (3) zu; letzterer liegt auf der Normalen des ersteren. Die Fundamentalgrössen erster Ordnung seien auf der neuen Fläche mit $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$ bezeichnet. Sie werden sich nur unendlich wenig von den entsprechenden Fundamentalgrössen E, F, G der alten Fläche unterscheiden. Wir wollen sie berechnen, indem

Krümmung bezeichnet, wie es auch Darboux thut. Wir schliessen uns an Bianchi und Stahl-Kommerell an.

wir dabei diejenigen Glieder vernachlässigen, die hinsichtlich ε von höherer als erster Ordnung unendlich klein sind. Zunächst giebt (3):

(4) $$\bar{x}_u = x_u + X_u \nu \varepsilon + X \nu_u \varepsilon, \quad \bar{x}_v = x_v + X_v \nu \varepsilon + X \nu_v \varepsilon$$

u. s. w. Also ist nach XI (A):

$$\bar{E} = \mathbf{S}\, x_u^2 + 2(\nu\, \mathbf{S}\, x_u X_u + \nu_u\, \mathbf{S}\, x_u X)\varepsilon.$$

Die erste Summe rechts ist gleich E, die zweite nach (10), S. 106, gleich $-L$ und die dritte nach XI (I) gleich Null, sodass wir haben:

$$\bar{E} = E - 2\nu L \varepsilon.$$

So kommt überhaupt:

(5) $$\bar{E} = E - 2\nu L\varepsilon, \quad \bar{F} = F - 2\nu M\varepsilon, \quad \bar{G} = G - 2\nu N\varepsilon.$$

Dann ist nach XI (C):

$$\bar{D}^2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = EG - F^2 - 2\nu(EN - 2FM + GL)\varepsilon,$$

immer unter Vernachlässigung der höheren Potenzen von ε. Hieraus folgt, wenn die Quadratwurzel ausgezogen wird:

(6) $$\bar{D} = D - \frac{\nu}{D}(EN - 2FM + GL)\varepsilon.$$

Diese Formel hat im reellen Fall das richtige Zeichen, da sich ja $\bar{D}$ für $\varepsilon = 0$ auf D reducieren muss.

Nach (1) können wir hierfür schreiben:

(7) $$\bar{D} = D - \nu D H \varepsilon.$$

Hieraus folgt nach Satz 14, S. 35:

Satz 100: Ändert man eine Fläche dadurch unendlich wenig, dass man jeden Punkt (u, v) der Fläche um eine Strecke $\nu(u, v)\varepsilon$ auf seiner Normalen verschiebt — wobei ε eine unendlich kleine Grösse bedeutet —, so ändert sich der Inhalt des von den vier Punkten (u, v), $(u + du, v)$, $(u, v + dv)$, $(u + du, v + dv)$ gebildeten unendlich kleinen Parallelogramms um die Grösse

$$-\nu D H du\, dv \cdot \varepsilon,$$

wo $D = \sqrt{EG - F^2}$ und H die mittlere Krümmung im Punkte (u, v) ist. Hierbei sind die hinsichtlich ε von höherer Ordnung unendlich kleinen Grössen vernachlässigt worden.

Ein Flächenstück kann man sich immer aus Parallelogrammen von der erwähnten Art zusammengesetzt denken. Ist nun dJ der

Inhalt eines unendlich kleinen Stückes der Fläche (2) an der Stelle (u, v) und $d\bar{J}$ die entsprechende Grösse bei der Fläche (3), so haben wir also:

$$d\bar{J} - dJ = -\nu H \varepsilon \cdot dJ, \tag{8}$$

da $D\,du\,dv$ der Inhalt jenes unendlich kleinen Parallelogramms in obigem Satze ist. Also:

Satz 101: Ändert man eine Fläche dadurch unendlich wenig, dass man jeden Punkt auf seiner Normalen um eine unendlich kleine und von Punkt zu Punkt beliebige Strecke verschiebt, so ist die Änderung des Inhaltes eines unendlich kleinen Flächenstückes proportional dem Inhalte selbst, der Verschiebungsstrecke und der mittleren Krümmung an der betreffenden Stelle.

Wenn wir insbesondere die Verschiebungsstrecke constant, gleich ε, wählen, so ist $\nu = 1$ und es folgt:

$$d\bar{J} - dJ = -H\varepsilon \cdot dJ.$$

Dabei geht eine Parallelfläche der Fläche (1) hervor, nach S. 205. Demnach ist die Änderung des Inhaltes bei Parallelflächen proportional dem Flächeninhalte selbst und mittleren Krümmung.

Ist P eine reelle Stelle der Fläche und ist die Stelle elliptisch (vgl. S. 140), sodass R_1 und R_2 dort dasselbe Zeichen haben, so ist

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

positiv oder negativ, je nachdem die Hauptkrümmungsmittelpunkte auf der positiven oder negativen Normalen liegen (vgl. S. 139). Man sieht also, dass die Parallelfläche grösseren Inhalt hat, sobald H entgegengesetztes Vorzeichen wie ε hat, d. h. sobald sie auf der convexen Seite der ursprünglichen Fläche liegt. Ist dagegen P ein hyperbolischer Punkt und z. B. $R_1 > 0$, $R_2 < 0$, so ist $H > 0$, wenn R_2, absolut genommen, grösser als R_1 ist. Daher hat dann die Parallelfläche grösseren Inhalt, wenn sie auf derjenigen Seite der alten Fläche liegt, auf der auch der von P weiter entfernte Hauptkrümmungsmittelpunkt gelegen ist.

Wir wollen unsere Ergebnisse für ein wichtiges Problem in Anwendung bringen:

Angenommen, es sei eine reelle geschlossene Curve c gegeben. Dann können wir uns beliebig viele reelle Flächen vorstellen, die

durch diese Curve hindurchgehen. Wir werden dann sagen, dass das innerhalb der Curve c gelegene Stück einer solchen Fläche einen kleinsten Inhalt hat, wenn sein Inhalt kleiner ist als der des entsprechenden Stückes aller unendlich benachbarten reellen Flächen durch die Curve c.

Ist etwa gerade die Fläche (2) eine solche Fläche kleinsten Inhaltes, so muss die Curve c auf der Fläche liegen, und diejenigen Flächen, deren Inhalt wir mit dem der Fläche (2) vergleichen, müssen zur Fläche (2) unendlich benachbart sein und ebenfalls c enthalten. Eine dieser benachbarten Flächen können wir also allgemein dadurch finden, dass wir auf den Normalen der Fläche (2) solche unendlich kleine reelle Strecken $\mathfrak{v}(u, v)\,\varepsilon$ auftragen, die insbesondere für die Punkte der Curve c gleich Null sind. Nun ist der Inhalt der Fläche (2), soweit er im Innern der Curve c liegt, als Doppelsumme der Inhalte der unendlich kleinen Parallelogramme der Parameterlinien darstellbar, also nach Satz 14, S. 35, als das Doppelintegral:

$$J = \int\!\!\int D\,du\,dv,$$

erstreckt über alle diejenigen Werte von u und v, die den Punkten in Innern der Curve c zukommen. Bei der unendlich benachbarten Fläche (3) haben wir nach (7) analog den Flächeninhalt:

$$\int\!\!\int (D - \mathfrak{v}\,D\,H\,\varepsilon)\,du\,dv$$

oder:

$$\bar{J} = \int\!\!\int D\,du\,dv - \varepsilon \int\!\!\int \mathfrak{v}\,D\,H\,du\,dv.$$

Nun ist zu beachten, dass wir in der Formel (7) die höheren Potenzen von ε vernachlässigt haben, daher ist auch in der Formel:

$$\bar{J} - J = -\,\varepsilon \int\!\!\int \mathfrak{v}\,D\,H\,du\,dv$$

von den höheren Potenzen von ε abgesehen. Man weiss aber, dass eine Reihenentwickelung nach Potenzen von ε dasselbe Vorzeichen wie das Glied niedrigster Potenz hat, mithin ist $\bar{J} - J$, sobald der Coefficient der ersten Potenz, also:

$$\int\!\!\int \mathfrak{v}\,D\,H\,du\,dv,$$

von Null verschieden ist, positiv oder negativ, je nachdem man ε positiv oder negativ wählt. Also ist in diesem Falle die Fläche (2) sicher keine Fläche kleinsten Inhaltes.

Die Fläche (2) kann vielmehr nur dann eine Fläche kleinsten Inhaltes sein, wenn

$$\int\int v\, D\, H\, du\, dv = 0$$

ist, und zwar wie auch die reelle Function $v(u, v)$ gewählt sein mag.

Da es sich um reelle Flächen handelt, so ist D eine von Null verschiedene positive Grösse. Ist nun H nicht überall auf der Fläche (2) im Innern der Curve c gleich Null, so wird auch, da ja dann mit v auch $v D H$ als beliebige reelle Function von u und v aufgefasst werden kann, die obige Bedingung nicht erfüllt sein.

Die Fläche (2) kann also nur dann eine Fläche kleinsten Inhaltes sein, wenn die Grösse H überall innerhalb des durch die Curve c begrenzten Bereiches gleich Null ist.

Wohlbemerkt ist dies aber nur eine notwendige und keine hinreichende Bedingung für die Fläche kleinsten Inhaltes. Wir heben ausserdem hervor, dass H bei der jetzigen Betrachtung gleich der Summe der Hauptkrümmungen ist, da es sich ja um reelle Flächen handelt, die stets Hauptkrümmungsradien haben (nach S. 116). Daher haben wir gefunden:

Satz 102:[1] Soll eine reelle Fläche, die sich durch eine geschlossene reelle Curve legen lässt, kleineren Flächeninhalt als alle unendlich benachbarten reellen Flächen durch dieselbe Curve haben, so ist dazu notwendig, aber nicht ohne weiteres auch hinreichend, dass in jedem Punkte der Fläche im Innern der Curve die beiden Hauptkrümmungsradien einander entgegengesetzt gleich seien:

$$R_1 + R_2 = 0\,.$$

Dieser Satz führt uns zur Betrachtung derjenigen Flächen, auf denen in jedem Punkte die beiden Hauptkrümmungsradien einander

---

[1] Das Problem, die Flächen kleinsten Inhaltes bei gegebener Begrenzung zu bestimmen, behandelte Lagrange als Beispiel in seinem „Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies", Miscellanea Taurinensia t. II (1760 bis 1761), worin er die Variationsrechnung begründet hat. (Siehe auch Oeuvres t. I.) Er fand, dass die gesuchten Flächen $z = f(x, y)$ der Gleichung

$$(1 + q^2)\, r - 2\, p\, q\, s + (1 + p^2)\, t = 0$$

genügen müssen. Dies ist, wie die Formeln (11) und (12) auf S. 108 und (22) auf S. 118 zeigen, nichts anderes als die Gleichung $R_1 + R_2 = 0$. Aber diese charakteristische Eigenschaft fand erst Meusnier 1776 (siehe die in der Anm. auf S. 105 genannte Abhandlung) durch allerdings nicht ganz strenge geometrische Betrachtungen.

entgegengesetzt gleich sind, oder also der Flächen von der mittleren Krümmung Null. Man nennt sie Minimalflächen, weil zu ihnen die soeben besprochenen Flächen kleinsten Inhaltes gehören.

Wir wollen aber jenes Minimum-Problem nicht weiter erörtern, denn erstens überschreitet es die uns hier gesteckten Grenzen, die schwierige Frage nach den hinreichenden Bedingungen für das Minimum zu beantworten, und zweitens wollen wir uns nicht nur auf reelle Flächen beschränken, während doch jenes Minimum-Problem nur für reelle Flächen einen Sinn hat.

Ehe wir zur genaueren Betrachtung der Minimalflächen übergehen, erwähnen wir hier noch eine Beziehung zwischen den Flächen constanter Krümmung K und den Flächen constanter mittlerer Krümmung H.

Liegt eine Fläche constanter Krümmung K vor, die keine Schar von Minimalgeraden enthält, vielmehr in jedem Punkt zwei Hauptkrümmungsradien hat, und bei der also nach Satz 88, S. 212, das Product der beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 constant gleich $1:K$ ist, und construieren wir eine Parallelfläche nach S. 205, indem wir auf jeder Normalen dieselbe Strecke a auftragen, so hat die Parallelfläche nach Satz 83 ebenda mit der ursprünglichen Fläche die Normalen gemein und daher auch nach Satz 53, S. 171, die Hauptkrümmungsmittelpunkte. Daher sind $R_1 - a$ und $R_2 - a$ ihre Hauptkrümmungsradien, sodass

$$\bar{H} = \frac{1}{R_1 - a} + \frac{1}{R_2 - a}$$

die mittlere Krümmung der Parallelfläche ist. Wegen

$$R_1 R_2 = \frac{1}{K}$$

ist:

$$\bar{H} = \frac{R_1 + R_2 - 2a}{-a(R_1 + R_2) + a^2 + \frac{1}{K}}. \tag{9}$$

Nun kann man a so wählen, dass dieser Ausdruck frei von der Summe $R_1 + R_2$ ist, indem man nämlich die Bedingung aufstellt:

$$1 : 2a = a : \left(a^2 + \frac{1}{K}\right),$$

die für a constante Werte ergiebt:

$$a = \pm\sqrt{\frac{1}{K}}.$$

Alsdann wird:

$$\bar{H} = \mp \sqrt{K}.$$

Daher:[1]

Satz 103: Trägt man auf den Normalen einer Fläche von constanter Krümmung K die beiden constanten Strecken

$$a = \pm \sqrt{\frac{1}{K}}$$

auf, so sind die Örter der Endpunkte zwei Parallelflächen von den constanten mittleren Krümmungen $\mp \sqrt{K}$.

Umgekehrt: Es liege eine Fläche von constanter mittlerer Krümmung H vor, und es seien R_1 und R_2 ihre Hauptkrümmungsradien. Wenn man dann die Parallelfläche im Abstand a construiert, so sind $R_1 - a$ und $R_2 - a$ ihre Hauptkrümmungsradien, sodass die Krümmung der Parallelfläche den Wert

$$\bar{K} = \frac{1}{(R_1 - a)(R_2 - a)}$$

hat. Da

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = H$$

ist, so folgt:

$$\bar{K} = \frac{1}{(1 - aH) R_1 R_2 + a^2}. \tag{10}$$

Wenn man also für a den constanten Wert:

$$a = \frac{1}{H}$$

wählt, so wird

$$\bar{K} = H^2.$$

Demnach:

Satz 104: Trägt man auf den Normalen einer Fläche von constanter mittlerer Krümmung H die constante Strecke

$$a = \frac{1}{H}$$

auf, so ist der Ort der Endpunkte eine Parallelfläche von der constanten Krümmung H^2.

Wir wollen die Sätze auch rein rechnerisch beweisen, wozu wir der Kenntnis der Fundamentalgrössen für Parallelflächen bedürfen. Zugleich füllen wir dadurch eine Lücke aus, denn die obigen Be-

---

[1] Satz 103 und 104 bei Bonnet, „Sur une propriété de maximum relative à la sphère", Nouv. Annales de Mathém. t. 12 (1853).

trachtungen gelten nicht mehr, wenn es auf den Flächen keine Hauptkrümmungsradien giebt, d. h. wenn die Flächen Scharen von Minimalgeraden enthalten.

Bezeichnen wir wie gewöhnlich mit x, y, z, X, Y, Z, E, F, G, L, M, N die auf eine Fläche bezüglichen Grössen, sodass nach Satz 11, S. 118:

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}, \qquad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \tag{11}$$

ist, und benutzen wir bei der Parallelfläche im Abstand a überstrichene Buchstaben, so ist:

$$\bar{x} = x + aX, \quad \bar{y} = y + aY, \quad \bar{z} = z + aZ,$$

daher:

$$\bar{x}_u = x_u + aX_u, \quad \bar{x}_v = x_v + aX_v$$

u. s. w. Also giebt XI (A):

$$\bar{E} = \mathbf{S}\, x_u^2 + 2a\,\mathbf{S}\, x_u X_u + a^2\,\mathbf{S}\, X_u^2.$$

Hierin ist die erste Summe rechts gleich E, die zweite nach (10), S. 106, gleich $-L$, und die dritte wurde in (6), S. 159, berechnet. Demnach kommt, indem wir zugleich die Formeln für $\bar{F}$ und $\bar{G}$ hinschreiben:

$$\left\{\begin{aligned} \bar{E} &= (1 - a^2K)E - a(2 - aH)L, \\ \bar{F} &= (1 - a^2K)F - a(2 - aH)M, \\ \bar{G} &= (1 - a^2K)G - a(2 - aH)N. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Hieraus folgt noch mit Rücksicht auf (11):

$$\bar{D}^2 = \bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2 = D^2(1 - aH + a^2K)^2,$$

also:

$$\bar{D} = D(1 - aH + a^2K). \tag{13}$$

Hierbei haben wir das Vorzeichen so gewählt, dass es im reellen Fall unserer allgemeinen Festsetzung auf S. 18 für solche Werte von a entspricht, die nicht über ein gewisses Maass hinausgehen, sodass für $a = 0$ auch $\bar{D} = D$ ist.

Ferner haben wir:

$$\bar{x}_{uu} = x_{uu} + aX_{uu},$$

sodass nach (9), S. 106:

$$\bar{L} = \frac{1}{\bar{D}} \begin{vmatrix} x_{uu} + aX_{uu} & x_u + aX_u & x_v + aX_v \\ y_{uu} + aY_{uu} & y_u + aY_u & y_v + aY_v \\ z_{uu} + aZ_{uu} & z_u + aZ_u & z_v + aZ_v \end{vmatrix}$$

ist. Es ist bequemer, statt $\bar{L}$ zunächst $\bar{L}D$ zu berechnen, indem wir die Gleichung nach XI ($\bar{L}$) mit

$$D = \begin{vmatrix} x_u & x_v & X \\ y_u & y_v & Y \\ z_u & z_v & Z \end{vmatrix}$$

multiplicieren. Dann kommt, wenn wir noch $\bar{D}$ auf die linke Seite bringen, zunächst der umständliche Ausdruck:

$$\bar{L}D\bar{D} = \begin{vmatrix} \mathbf{S}\, x_{uu}x_u + a\,\mathbf{S}\, X_{uu}x_u & \mathbf{S}\, x_u^2 + a\,\mathbf{S}\, X_u x_u & \mathbf{S}\, x_v x_u + a\,\mathbf{S}\, X_v x_u \\ \mathbf{S}\, x_{uu}x_v + a\,\mathbf{S}\, X_{uu}x_v & \mathbf{S}\, x_u x_v + a\,\mathbf{S}\, X_u x_v & \mathbf{S}\, x_v^2 + a\,\mathbf{S}\, X_v x_v \\ \mathbf{S}\, x_{uu}X + a\,\mathbf{S}\, X_{uu}X & \mathbf{S}\, x_u X + a\,\mathbf{S}\, X_u X & \mathbf{S}\, x_v X + a\,\mathbf{S}\, X_v X \end{vmatrix}$$

Nach XI ($\bar{A}$), XI ($\bar{\Gamma}$), nach (7) und (10) auf S. 106 und wegen $\mathbf{S}\, X^2 = 1$, also $\mathbf{S}\, X_u X = 0$, $\mathbf{S}\, X_v X = 0$ vereinfacht sich die Determinante bedeutend. Insbesondere findet man, dass die beiden letzten Elemente der letzten Zeile gleich Null sind, sodass kommt:

$$\bar{L}D\bar{D} = (L + a\,\mathbf{S}\, X_{uu}X) \begin{vmatrix} E - aL & F - aM \\ F - aM & G - aN \end{vmatrix}$$

Wegen $\mathbf{S}\, X_u X = 0$ ist noch:

$$\mathbf{S}\, X_{uu}X = -\,\mathbf{S}\, X_u^2,$$

daher nach (6), S. 159:

$$\mathbf{S}\, X_{uu}X = -HL + KE,$$

sodass mit Rücksicht auf (11) und (13) schliesslich $\bar{L}$, ausgedrückt durch E, F, G, L, M, N, H, K und a, hervorgeht. Analog berechnet sich $\bar{M}$ und $\bar{N}$. Wir finden:

$$(14) \quad \begin{cases} \bar{L} = aKE + (1 - aH)L, \\ \bar{M} = aKF + (1 - aH)M, \\ \bar{N} = aKG + (1 - aH)N. \end{cases}$$

Wenn wir die aus (12) und (14) analog (11) gebildeten Werte mit $\bar{K}$ und $\bar{H}$ bezeichnen, so kommt folglich:

Satz 105: Sind E, F, G, L, M, N die Fundamentalgrössen einer Fläche, deren Krümmung K und deren mittlere Krümmung H ist, so sind die Fundamentalgrössen der Parallelfläche im Abstande a:

$$\bar{E} = (1 - a^2 K) E - a(2 - aH) L,$$
$$\bar{F} = (1 - a^2 K) F - a(2 - aH) M,$$
$$\bar{G} = (1 - a^2 K) G - a(2 - aH) N;$$
$$\bar{L} = aKE + (1 - aH) L,$$
$$\bar{M} = aKF + (1 - aH) M,$$
$$\bar{N} = aKG + (1 - aH) N.$$

Die Krümmung $\bar{K}$ und die mittlere Krümmung $\bar{H}$ der Parallelfläche drücken sich so aus:

$$\bar{K} = \frac{K}{1 - aH + a^2 K},$$
$$\bar{H} = \frac{H - 2aK}{1 - aH + a^2 K}.$$

Ferner ist

$$\bar{D} = \sqrt{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} = (1 - aH + a^2 K) D.$$

In dieser letzten Formel ist das Vorzeichen so gewählt, dass $\bar{D}$ im reellen Fall positiv ist für die dem Werte $a = 0$ benachbarten Werte von a.

Die beiden Formeln (9) und (10), aus denen wir die Sätze 103 und 104 ableiteten, sind, sobald darin

$$R_1 R_2 = \frac{1}{K}, \quad R_1 + R_2 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) R_1 R_2 = \frac{H}{K}$$

gesetzt wird, gerade die beiden im letzten Satze angegebenen Formeln für $\bar{H}$ und $\bar{K}$. Demnach haben wir jetzt die Sätze 103 und 104 auch für den Fall nachgewiesen, dass die Flächen Scharen von Minimalgeraden enthalten.

Die Eigenschaft einer Fläche, eine Schar von ∞^1 Minimalgeraden zu haben, wurde auf S. 114 durch die Bedingung (10) ausgedrückt die sich mittels der Krümmung K und der mittleren Krümmung H nach (11) so darstellen lässt:

$$(EG - F^2)^2 (4K - H^2) = 0.$$

Da wir $D \neq 0$ voraussetzen, so bleibt:

$$K = \tfrac{1}{4} H^2.$$

Also:

Satz 106: Die Flächen, die eine Schar von Minimalgeraden enthalten, ohne aber Tangentenflächen von Mini-

malcurven zu sein, sind identisch mit denjenigen Flächen, deren Krümmung gleich einem Viertel des Quadrates der mittleren Krümmung ist.

Enthält die Fläche zwei Scharen von Minimalgeraden, so ist sie nach Satz 9, S. 113, eine Kugel oder Ebene, und man überzeugt sich leicht davon, dass hier der Satz erfüllt ist.

Aus dem Satze 105 folgt: Wenn $\bar{K} = \frac{1}{4}\bar{H}^2$ sein soll, so muss auch $K = \frac{1}{4}H^2$ sein, d. h.:

Satz 107: Wenn eine von zwei Parallelflächen eine Schar von ∞^1 Minimalgeraden enthält, so gilt dasselbe von der andern.

§ 15. Minimalflächen.

Im vorigen Paragraphen, auf S. 236, wurden die Minimalflächen als diejenigen Flächen definiert, deren mittlere Krümmung H überall gleich Null ist. Wir wollen diese Flächen jetzt etwas eingehender behandeln. Vorweg sei bemerkt, dass wir dabei von den Tangentenflächen der Minimalcurven grundsätzlich absehen, weil auf ihnen die Definition der mittleren Krümmung versagt, und ferner, dass eine Fläche, die eine Schar von Minimalgeraden enthält, nur dann eine Minimalfläche sein kann, wenn sie eine Ebene ist. Denn auf einer solchen Fläche muss nach Satz 106 wegen $H = 0$ auch die Krümmung K gleich Null sein, sodass die Fläche nach Satz 90, S. 214, abwickelbar wäre, während doch eine abwickelbare Fläche, die keine Ebene ist, nur eine Schar von Geraden enthält, die keine Minimalgeraden sind, wenn eben, wie gesagt, von den Tangentenflächen der Minimalcurven, insbesondere von den Cylindern von Minimalgeraden, abgesehen wird. Krumme Minimalflächen also enthalten keine Scharen von Minimalgeraden. Nach Satz 11, S. 118, haben sie folglich überall Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2. Wegen

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}$$

und wegen $H = 0$ kann man sie daher als diejenigen Flächen, die in jedem Punkte entgegengesetzt gleiche Hauptkrümmungsradien haben, definieren. Sie sind also an allen reellen Stellen nach S. 140 hyperbolisch gekrümmt und haben dort nach Satz 26, S. 139, als Indicatricen gleichseitige Hyperbeln. Daraus folgt, dass man die krummen Minimalflächen auch als diejenigen Flächen, deren Haupttangentencurven ein Orthogonal-

system bilden, definieren kann. Den Satz 85, S. 208, können wir jetzt so aussprechen:

Satz 108: Die sphärische Abbildung ist nur für die Minimalflächen und für die Kugeln conform.

Wir wollen zunächst einige Beispiele von Minimalflächen bringen:

1. Beispiel: Fragen wir nach den Rotationsflächen, die Minimalflächen sind, so ist zunächst die Ebene zu nennen. Im übrigen ist dies Problem durch den Satz 16, S. 126, erledigt. Wir finden also:

Satz 109: Die einzigen Rotationsflächen, die Minimalflächen sind, sind die Ebenen und die Catenoide.

2. Beispiel: Wir fragen nach den geradlinigen Flächen, die Minimalflächen sind. Nach unseren obigen Bemerkungen können wir dabei von denjenigen Flächen absehen, deren Erzeugende Minimalgeraden sind, da sie nur die Ebenen liefern. Nun sind die Erzeugenden einer geradlinigen Fläche nach S. 183 Haupttangentencurven. Eine geradlinige Fläche ist daher dann und nur dann eine Minimalfläche, wenn die orthogonalen Trajectorien der Erzeugenden auch Haupttangentencurven sind. Nach Satz 64, S. 182, müssen dann die Hauptnormalen der orthogonalen Trajectorien Tangenten der Fläche und deshalb die Erzeugenden selbst sein.

Die gesuchten Flächen sind also diejenigen Flächen von ∞^1 Geraden, auf denen die orthogonalen Trajectorien sämtlich die Geraden selbst zu Hauptnormalen haben. In § 10 des 3. Abschnittes, I. Band, haben wir Curven mit gemeinsamen Hauptnormalen betrachtet. Wir sahen damals, dass zu gewissen Curven je eine Curve zugeordnet ist, die mit ihr die Hauptnormalen gemein haben, und zwar je nur eine, sobald nicht Krümmung und Torsion der Curven constant ist, siehe I S. 325. Demnach sind die jetzt gesuchten Curven solche von constanter Krümmung und constanter Torsion. Nach Satz 29, I S. 226, sind die orthogonalen Trajectorien der Erzeugenden daher entweder gemeine Schraubenlinien oder gewisse imaginäre Curven dritter Ordnung. Die Hauptnormalen einer gemeinen Schraubenlinie treffen aber sämtlich die Axe ihres Cylinders senkrecht, nach I S. 191, und bilden daher eine gemeine Schraubenfläche, von der wir schon wissen, dass sie eine Minimalfläche ist, weil wir in dem Beispiel auf S. 119 sahen, dass für sie die mittlere Krümmung $H = 0$ ist.[1]

Ausserdem ist nun noch die Annahme zu machen, dass eine orthogonale Trajectorie der Erzeugenden eine solche imaginäre Curve dritter Ordnung von constanter Krümmung und Torsion sei, deren Gleichungen wir nach (12), I S. 226, so ansetzen können:

$$\mathfrak{x} = \frac{u^3}{6r^2} - u, \quad \mathfrak{y} = -\frac{iu^3}{6r^2}, \quad \mathfrak{z} = -\frac{u^2}{2r} \qquad (r = \text{Const.}).$$

Allerdings haben wir in Satz 13, I S. 289 (vgl. auch I S. 224), erkannt, dass auch diese Curve eine Schraubenlinie ist, aber sie liegt auf einem Cylinder

[1] Die ersten krummen Minimalflächen, die überhaupt gefunden wurden, sind die gemeinen Schraubenflächen und die Catenoide, und zwar kommen beide in der Arbeit von MEUSNIER vom Jahre 1776 zuerst vor. Vgl. die Anm. zu S. 105.

von Minimalgeraden, weshalb sie eine besondere Behandlung verlangt. Es ist u ihre Bogenlänge und r ihr Krümmungsradius, sodass die Richtungscosinus ihrer Hauptnormale nach III (B) die Werte haben:

$$l = \frac{u}{r}, \quad m = -\frac{iu}{r}, \quad n = -1.$$

Also sind:

$$x = \frac{u^3}{6r^2} - u + \frac{u}{r}v,$$

$$y = -\frac{iu^3}{6r^2} - \frac{iu}{r}v,$$

$$z = -\frac{u^2}{2r} - v,$$

die Gleichungen der Fläche ihrer Hauptnormalen. Berechnen wir nach XI (A) die Fundamentalgrösse F, so kommt $F = 0$, d. h. die Parametercurven (v) sind die orthogonalen Trajectorien der Erzeugenden (u) der Fläche. Wenn wir ferner nach (9), S. 106, die Fundamentalgrössen L und N berechnen, so finden wir, dass diese beiden auch gleich Null sind. Daher ist die mittlere Krümmung H nach (1), S. 231, wirklich gleich Null. Die Fläche ist deshalb eine allerdings imaginäre Minimalfläche. Dass sie nicht zu den gemeinen Schraubenflächen gehört, ist leicht zu sehen. Denn bei einer gemeinen Schraubenfläche ist eine der orthogonalen Trajectorien der Erzeugenden eine Gerade, nämlich die Schraubenaxe. Hier aber ist keine Curve (v) eine Gerade; es giebt ja keinen constanten endlichen Wert von v, für den die Verhältnisse von

$$x_u = \frac{u^2}{2r^2} - 1 + \frac{v}{r}, \quad y_u = -\frac{iu^2}{2r^2} - \frac{iv}{r}, \quad z_u = -\frac{u}{r}$$

constant, frei von u, wären.

Mithin:[1]

Satz 110: Ausser den Ebenen und den gemeinen Schraubenflächen giebt es noch eine Art von geradlinigen Flächen, die Minimalflächen sind. Es sind dies die Flächen der Hauptnormalen von gewissen imaginären Curven dritter Ordnung, die mit der Curve:

$$\mathfrak{x} = \frac{u^3}{6r^2} - u, \quad \mathfrak{y} = -\frac{iu^3}{6r^2}, \quad \mathfrak{z} = -\frac{u^2}{2r} \qquad (r = \text{Const.})$$

congruent sind. Die Geraden auf diesen imaginären Flächen sind keine Minimalgeraden.

[1] Dass eine reelle krumme geradlinige Fläche nur dann eine Minimalfläche ist, wenn sie eine gemeine Schraubenfläche ist, hat zuerst Catalan bewiesen: „Sur les surfaces réglées dont l'aire est un minimum", Journ. de Math. p. et appl., 1. série, t. VII (1842). Die in Satz 110 angegebene, allerdings imaginäre geradlinige Minimalfläche scheint bisher nirgends beachtet worden zu sein.

Eliminiert man aus den Gleichungen der Fläche die Parameter u und v, was keine Schwierigkeiten macht, so kommt:

$$(x - i y)^3 + 3 r (x - i y) z - 3 i r^2 y = 0 .$$

Hier liegen also imaginäre algebraische Minimalflächen dritter Ordnung vor.

Wir nehmen jetzt das Problem in Angriff, alle Minimalflächen zu bestimmen.[1]

Wir können dabei voraussetzen, dass die Parameterlinien die beiden Scharen der Minimalcurven der Fläche seien. Dann ist nach Satz 17, S. 36, $E = G = 0$. Damit die mittlere Krümmung H gleich Null sei, ist nun nach (1), S. 231, notwendig und hinreichend, dass $M = 0$ sei. Nach Satz 70, S. 186, heisst dies:

Satz 111: Eine Fläche ist dann und nur dann eine Minimalfläche, wenn ihre Minimalcurven zu einander conjugiert sind.

Werden die Parameter mit $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ bezeichnet, so besteht also nach Satz 71, S. 187, eine Gleichung von der Form:

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \mathfrak{u} \, \partial \mathfrak{v}} = a(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) \frac{\partial \vartheta}{\partial \mathfrak{u}} + b(\mathfrak{u}, \mathfrak{v}) \frac{\partial \vartheta}{\partial \mathfrak{v}},$$

sobald man für ϑ irgend eine der drei rechtwinkligen Coordinaten x, y, z der Flächenpunkte einsetzt. Es giebt also zwei Functionen a und b von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ derart, dass:

$$x_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}} = a x_{\mathfrak{u}} + b x_{\mathfrak{v}} ,$$
$$y_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}} = a y_{\mathfrak{u}} + b y_{\mathfrak{v}} ,$$
$$z_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}} = a z_{\mathfrak{u}} + b z_{\mathfrak{v}}$$

[1] Wie wir in der Anm. auf S. 235 schon sagten, stellte Lagrange die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung auf, der die Minimalflächen $z = f(x, y)$ genügen müssen; aber er integrierte sie nicht. Monge versuchte die Integration in seinem „Mémoire sur le calcul intégral des équations aux différences partielles“, Mém. de l'Acad. des Sciences 1784, beging aber dabei Irrtümer. Auf diese Fehler machte Legendre in seinem „Mémoire sur l'intégration de quelques équations aux dérivées partielles“, Mém. de l'Acad. des Sciences 1787, aufmerksam. Er bemerkte darin zugleich, dass Monge mittlerweile das wahre Integral gefunden und ihm mitgeteilt habe, und zeigte, wie er es alsdann ebenfalls gefunden habe. Die richtige Methode von Monge findet sich in seiner „Application“. Eine andere Methode, die auch von Monge herrührt, findet sich in dem „Traité du calcul différentiel et du calcul intégral“ von Lacroix, 2. Aufl., t. II, Paris 1814. Monge kommt dort zu dem wichtigen Satze 113 des Textes.

ist. Aber wenn wir diese drei Gleichungen mit x_u, y_u, z_u multiplicieren und dann addieren, so ergiebt sich, weil $E = 0$ und also nach XI (A)

$$\mathsf{S}\, x_u^2 = 0,$$

daher auch

$$\mathsf{S}\, x_u\, x_{uv} = 0$$

ist, und wegen $\mathsf{S}\, x_u\, x_v = F$:

$$0 = b\, F.$$

Aber F ist nicht gleich Null, weil $E = G = 0$ ist. Mithin ist $b = 0$. Ebenso ergiebt sich, wenn die drei Gleichungen mit x_v, y_v, z_v multipliciert und dann addiert werden, dass auch $a = 0$ ist. Die Gleichung (1) nimmt daher die einfache Form an:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

Nach dem Beispiel auf S. 188 aber bedeutet dies, dass die Parameterlinien (u) congruent und gleichgestellt sind und ebenso die Parameterlinien (v). Da sie die Minimalcurven der Fläche sind, so folgt:

Satz 112: Jede Minimalfläche ist eine Schiebungsfläche, indem sie dadurch hervorgeht, dass man eine Minimalcurve, ohne ihre Gestalt und Stellung zu ändern, an einer anderen Minimalcurve entlang bewegt.[1]

Oder in Formeln nach I S. 164:

Satz 113: Jede Minimalfläche lässt sich so darstellen:

$$x = U_1(u) + V_1(v),$$
$$y = U_2(u) + V_2(v),$$
$$z = U_3(u) + V_3(v).$$

Dabei sind die Functionen U_1, U_2, U_3 von u allein und die Functionen V_1, V_2, V_3 von v allein nur an die beiden Bedingungen gebunden:

$$U_1'^2 + U_2'^2 + U_3'^2 = 0, \qquad V_1'^2 + V_2'^2 + V_3'^2 = 0.$$

[1] Nachdem Monge (vgl. die Anm. zu S. 244) gefunden hatte, dass die Minimalflächen die in dem Satze 113 angegebene analytische Darstellung haben, machte erst Lie (vgl. die Anm. zu S. 188) auf die in Satz 112 ausgesprochene geometrische Deutung aufmerksam, die die Grundlage der Lie'schen Untersuchungen über die Minimalflächen bildet. Der geschichtliche Gang der Entwickelung ist also umgekehrt wie oben im Texte.

Denn es liegt auf der Hand, dass sich unsere Schlussfolgerung auch umkehren lässt.

Hiermit haben wir ein Mittel gewonnen, die Gleichungen einer beliebigen Minimalfläche aufzustellen, denn die Minimalcurven

$$\mathfrak{x} = U_1(\mathfrak{u}), \quad \mathfrak{y} = U_2(\mathfrak{u}), \quad \mathfrak{z} = U_3(\mathfrak{u})$$

und

$$\mathfrak{x} = V_1(\mathfrak{v}), \quad \mathfrak{y} = V_2(\mathfrak{v}), \quad \mathfrak{z} = V_3(\mathfrak{v}),$$

die wir dabei gebrauchen, können nach Satz 50, I S. 342, explicite dargestellt werden. Dort ist allerdings nur von den nicht-geraden Minimalcurven die Rede, aber wir wissen ja, dass es unter den Flächen, die eine Schar von Minimalgeraden enthalten, keine Minimalfläche ausser der Ebene giebt, was übrigens auch aus dem Satze 112 abgeleitet werden kann. Wir können daher, wenn wir von den Ebenen absehen, die eine Minimalcurve so wählen:

$$(2) \quad \mathfrak{x} = \frac{1}{2}\int(1-\mathfrak{u}^2)U(\mathfrak{u})d\mathfrak{u}, \quad \mathfrak{y} = \frac{i}{2}\int(1+\mathfrak{u}^2)U(\mathfrak{u})d\mathfrak{u}, \quad \mathfrak{z} = \int\mathfrak{u}\,U(\mathfrak{u})d\mathfrak{u}.$$

Dabei bedeutet U eine von Null verschiedene Function von $\mathfrak{u}$. Entsprechend schreiben wir die Gleichungen der zweiten Minimalcurve, indem wir $\mathfrak{u}$ durch $\mathfrak{v}$ und die Function U durch eine von Null verschiedene Function V von $\mathfrak{v}$ ersetzen. Aber hierbei ist ein Umstand zu beachten: Handelt es sich nur um die Betrachtung einer Minimalcurve (2), so ist es gleichgültig, ob wir in der zweiten Gleichung $+i$ oder $-i$ schreiben. Sollen aber, wie bei der Minimalfläche, zwei Minimalcurven in Verbindung mit einander gebracht werden, so können wir entweder bei beiden i oder bei der einen i und bei der anderen $-i$ schreiben. Dadurch ergeben sich zunächst zwei verschiedene Arten von Minimalflächen, je nachdem man nämlich in den Gleichungen:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}\int(1-\mathfrak{u}^2)\,U(\mathfrak{u})\,d\mathfrak{u} + \frac{1}{2}\int(1-\mathfrak{v}^2)\,V(\mathfrak{v})\,d\mathfrak{v},\\
y &= \frac{i}{2}\int(1+\mathfrak{u}^2)\,U(\mathfrak{u})\,d\mathfrak{u} \pm \frac{i}{2}\int(1+\mathfrak{v}^2)\,V(\mathfrak{v})\,d\mathfrak{v},\\
z &= \int\mathfrak{u}\,U(\mathfrak{u})\,d\mathfrak{u} + \int\mathfrak{v}\,V(\mathfrak{v})\,d\mathfrak{v}
\end{aligned}$$

bei dem zweiten Factor i das obere oder untere Vorzeichen wählt. Aber thatsächlich liefert die erste Annahme keine anderen Flächen als die zweite. Wenn man nämlich im ersten Fall neue Parameter u und v einführt, indem man:

$$\mathfrak{u} = -\frac{1}{v}, \quad \mathfrak{v} = u$$

schreibt und dann die Functionen

$$-\mathfrak{u}^4 U(\mathfrak{u}) = -\frac{1}{v^4} U\left(-\frac{1}{v}\right) = V_1(v),$$
$$V(\mathfrak{v}) = V(u) = U_1(u)$$

setzt, so gehen die Gleichungen über in diejenigen, die der zweite Fall liefert, mit den äusserlichen Unterschieden, dass u und v statt $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ und U_1 und V_1 statt U und V darin steht.

Mithin brauchen wir nur eines der beiden Vorzeichen zu berücksichtigen. Wir wählen das untere, sodass wir haben

Satz 114: Jede Minimalfläche mit Ausnahme der Ebene ist, und zwar in jeder Lage zu den Coordinatenaxen, in der Form darstellbar:

$$x = \frac{1}{2}\int(1-\mathfrak{u}^2)U d\mathfrak{u} + \frac{1}{2}\int(1-\mathfrak{v}^2)V d\mathfrak{v},$$
$$y = \frac{i}{2}\int(1+\mathfrak{u}^2)U d\mathfrak{u} - \frac{i}{2}\int(1+\mathfrak{v}^2)V d\mathfrak{v},$$
$$z = \int \mathfrak{u} U d\mathfrak{u} + \int \mathfrak{v} V d\mathfrak{v}.$$

Hierin bedeutet U irgend eine von Null verschiedene Function von $\mathfrak{u}$ allein und V irgend eine von Null verschiedene Function von $\mathfrak{v}$ allein.[1]

Nach XI (A) und XI (C) ist hier:

$$E = 0, \quad F = \frac{1}{2}(\mathfrak{u}\mathfrak{v}+1)^2 UV, \quad G = 0, \quad D = iF, \tag{3}$$

sodass XI (F) für die Richtungscosinus der Flächennormale die Werte giebt:

$$X = \frac{\mathfrak{u}+\mathfrak{v}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v}+1}, \quad Y = -i\frac{\mathfrak{u}-\mathfrak{v}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v}+1}, \quad Z = \frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v}-1}{\mathfrak{u}\mathfrak{v}+1}. \tag{4}$$

Nach (10), S. 106, finden wir ausserdem:

$$L = -U, \quad M = 0, \quad N = -V. \tag{5}$$

[1] Diese Darstellung der Minimalflächen verdankt man Enneper, „Analytisch-geometrische Untersuchungen", Zeitschrift f. Math. u. Physik, 9. Jahrg. (1864), und Weierstrass, „Über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist", Monatsberichte d. Berliner Akad. 1866. Man muss dabei beachten, dass der Begriff der Minimalfläche älter als der Begriff der Minimalcurve ist, der eben in allen Arbeiten über Minimalflächen bis zu denen von Lie nur implicite auftritt. Vgl. die Anmerkung zu I S. 340.

Beispiel: Oben fanden wir, dass es ausser den gemeinen Schraubenflächen noch imaginäre Minimalflächen mit geradlinigen Erzeugenden giebt. Bei geeigneter Wahl des Coordinatenkreuzes lassen sich diese Minimalflächen, wie wir sahen, so darstellen:

$$x = \frac{u^3}{6r^2} - u + \frac{u}{r}v,$$

$$y = -\frac{iu^3}{6r^2} - \frac{iu}{r}v,$$

$$z = -\frac{u^2}{2r} - v.$$

Wollen wir sie in der im Satze angegebenen Form darstellen, so werden wir — um die Parameter u, v durch die dazu nötigen neuen Parameter $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ auszudrücken — bei unserer Fläche X, Y, Z nach XI (F) berechnen, wodurch sich ergiebt:

$$X = \frac{-i(u^2 - 2rv)}{2r\sqrt{r^2 - 2rv}}, \quad Y = \frac{-u^2 + 2rv - 2r^2}{2r\sqrt{r^2 - 2rv}}, \quad Z = \frac{iu}{\sqrt{r^2 - 2rv}},$$

und diese Werte den Werten (4) gleichsetzen. Dadurch geht hervor:

$$u = \frac{r}{2}\left(\mathfrak{u} - \frac{1}{\mathfrak{v}}\right), \quad v = \frac{r}{8}\left(\mathfrak{u} + \frac{1}{\mathfrak{v}}\right)^2 + \frac{r}{2}.$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichungen der Fläche ein, so kommt:

$$x = \frac{r}{12}\mathfrak{u}^3 - \frac{r}{4}\mathfrak{u} - \frac{r}{12}\frac{1}{\mathfrak{v}^3} + \frac{r}{4}\frac{1}{\mathfrak{v}},$$

$$y = -\frac{ir}{12}\mathfrak{u}^3 - \frac{ir}{4}\mathfrak{u} + \frac{ir}{12}\frac{1}{\mathfrak{v}^3} + \frac{ir}{4}\frac{1}{\mathfrak{v}},$$

$$z = -\frac{r}{4}\mathfrak{u}^2 - \frac{r}{4}\frac{1}{\mathfrak{v}^2} - \frac{r}{2}.$$

Diese Formeln gehen aber aus denen des Satzes hervor, wenn:

$$U = -\frac{r}{2}, \quad V = \frac{r}{2\mathfrak{v}^4}$$

gesetzt wird.

Die Werte (4) von X, Y, Z sind genau dieselben Ausdrücke, die wir in (11) auf S. 64 für die Coordinaten x, y, z der Punkte einer Kugel vom Radius Eins um den Anfangspunkt erhielten. Dabei waren damals die Linien ($\mathfrak{u}$) und ($\mathfrak{v}$) die Minimalgeraden der Kugel. Dieser Zusammenhang ist nicht überraschend, denn wir wissen ja, dass die sphärische Abbildung der Minimalflächen conform ist, siehe Satz 108, und andererseits, dass bei einer conformen Abbildung die Minimalcurven wieder in Minimalcurven übergehen, nach Satz 37, S. 73. Nun aber sind X, Y, Z ja gerade die Coordinaten des Bildpunktes des Punktes ($\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$) unserer Minimalfläche bei Aus-

führung der sphärischen Abbildung (vgl. S. 204). Die Curven (u) und (v) auf der Kugel mit den rechtwinkligen Coordinaten X, Y, Z müssen also die Minimalgeraden der Kugel sein; und dies zeigt die Übereinstimmung unserer Formeln mit denen für die Kugel auf S. 64.

Wenn wir in den Gleichungen der in Satz 114 angegebenen Minimalfläche die Functionen U und V ganz beliebig wählen, so werden wir nicht gerade eine reelle Fläche erhalten. Wir fragen uns daher, unter welchen Umständen die Minimalfläche reell ist.

Zunächst müssen die Richtungscosinus der Normalen eines reellen Punktes (u, v) der Fläche auch reell sein. Daher müssen u und v so gewählt werden, dass die drei Ausdrücke (4) reell werden. Wann dies eintritt, ist leicht durch Rechnung zu entscheiden, indem man für u und v complexe Werte einsetzt. Wir können aber noch bequemer den soeben besprochenen Zusammenhang mit der Kugel heranziehen: Jeder reelle Punkt (x, y, z) der Fläche muss ein reelles Bild (X, Y, Z) auf der Kugel haben. Aber auf der Kugel sind u und v nach (9), S. 64, Functionen der Breite u und Länge v. Sind diese reell, so sind u und v nach jenen Formeln conjugiert complex.

Zunächst also müssen wir, um reelle Flächenpunkte zu erhalten, u und v conjugiert complex wählen. Aber dies ist nur eine notwendige, keine hinreichende Bedingung.

Wir setzen also an:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{x} - i\mathfrak{y},$$

indem wir unter $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ reelle Grössen verstehen. Nun seien die Functionen $U(\mathfrak{u})$ und $V(\mathfrak{v})$ oder $U(\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})$ und $V(\mathfrak{x} - i\mathfrak{y})$ in ihren reellen und rein imaginären Teil zerlegt:

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} U &= A(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + iB(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}), \\ V &= C(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + iD(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}). \end{aligned} \right.$$

Alsdann hat z. B. die dritte Coordinate z den Wert:

$$z = \int [(\mathfrak{x} + i\mathfrak{y})(A + iB)(d\mathfrak{x} + i\,d\mathfrak{y}) + (\mathfrak{x} - i\mathfrak{y})(C + iD)(d\mathfrak{x} - i\,d\mathfrak{y})].$$

Der rein imaginäre Teil des Integranden ist, abgesehen vom Factor i:

$$(A\mathfrak{y} + B\mathfrak{x} - C\mathfrak{y} + D\mathfrak{x})\,d\mathfrak{x} + (A\mathfrak{x} - B\mathfrak{y} - C\mathfrak{x} - D\mathfrak{y})\,d\mathfrak{y}.$$

Er muss gleich Null sein. Daher müssen die Functionen A, B, C, D so beschaffen sein, dass:

$$(A - C)\mathfrak{y} + (B + D)\mathfrak{x} = 0, \quad (A - C)\mathfrak{x} - (B + D)\mathfrak{y} = 0$$

wird. Also muss

$$C = A, \quad D = -B$$

oder nach (6):

$$U = A + iB, \quad V = A - iB$$

sein. Dies aber bedeutet, dass U und V conjugiert complexe Functionen sein müssen.

Ist dies der Fall, so sind auch die in Satz 114 unter den beiden anderen Integralzeichen auftretenden Ausdrücke reell, da sie Summen sind, von denen die zweiten Summanden aus den ersten durch Vertauschen von i mit $-i$ hervorgehen. Also

Satz 115: Die in Satz 114 angegebene Minimalfläche ist dann und nur dann reell, wenn $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ conjugiert complexe Veränderliche und U und V conjugiert complexe Functionen sind.[1]

1. Beispiel: Wir wissen nach S. 242, dass die gemeine Schraubenfläche (vgl. die Formeln (20), S. 60):

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v, \quad z = qv \tag{7}$$

eine reelle Minimalfläche ist. Sie muss sich also in der in Satz 114 angegebenen Form darstellen lassen. Um dies zu erreichen, müssen wir zunächst u und v als Function von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ kennen lernen. Zu diesem Zweck bedienen wir uns wieder der Formeln (4). Denn nach XI (F) ist bei der gemeinen Schraubenfläche:

$$DX = q\sin v, \quad DY = -q\cos v, \quad DZ = u.$$

Berechnen wir hieraus $X:Z$ und $Y:Z$ und vergleichen wir diese Werte mit den aus (4) zu ziehenden Werten, so kommt:

$$q\frac{\sin v}{u} = \frac{\mathfrak{u}+\mathfrak{v}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v}-1}, \quad q\frac{\cos v}{u} = i\frac{\mathfrak{u}-\mathfrak{v}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v}-1}, \tag{8}$$

sodass:

$$u = \frac{q}{2}\left(\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}} - \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}}\right),$$

$$\sin v = \frac{\mathfrak{u}+\mathfrak{v}}{2\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}}, \quad \cos v = i\frac{\mathfrak{u}-\mathfrak{v}}{2\sqrt{\mathfrak{u}\mathfrak{v}}}, \quad v = -\operatorname{arc\,tg} i\frac{\mathfrak{u}+\mathfrak{v}}{\mathfrak{u}-\mathfrak{v}}$$

sein muss. Nun ist also bei der gemeinen Schraubenfläche (7):

$$z = -q\operatorname{arc\,tg} i\frac{\mathfrak{u}+\mathfrak{v}}{\mathfrak{u}-\mathfrak{v}}$$

[1] Hiernach ist es leicht, aus der Enneper-Weierstrass'schen Form der Gleichungen einer Minimalfläche beliebig viele **reelle** Minimalflächen abzuleiten, während es früher ein Problem war, die mit Imaginärem behafteten Formeln von Monge so anzuwenden, dass sich reelle Minimalflächen ergaben.

und daher:

$$\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{u}} = -\frac{iq}{2\mathfrak{u}},$$

während aus der dritten Formel des Satzes 114 folgt:

$$\frac{\partial z}{\partial \mathfrak{u}} = \mathfrak{u}\, U.$$

Daher giebt die Vergleichung:

$$U = -\frac{iq}{2\mathfrak{u}^2}.$$

Wenn man dementsprechend die conjugiert complexen Werte:

$$U = -\frac{iq}{2\mathfrak{u}^2}, \quad V = \frac{iq}{2\mathfrak{v}^2}$$

in die Formeln des Satzes 114 einsetzt und dann $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ vermöge (8) durch u und v ausdrückt, so gehen thatsächlich die Gleichungen (7) der gemeinen Schraubenfläche hervor.

2. Beispiel: Schlagen wir jetzt, um eine andere reelle Minimalfläche zu gewinnen, den umgekehrten Weg ein. Wir wollen annehmen, es sei:

$$U = \frac{q}{2\mathfrak{u}^2}$$

gewählt, also bis auf den Factor $-i$ so wie soeben bei der gemeinen Schraubenfläche. Alsdann ist die conjugiert complexe Function:

$$V = \frac{q}{2\mathfrak{v}^2}.$$

Der Satz 114 liefert daher die Fläche:

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{q}{4}\left(\frac{1}{\mathfrak{u}} + \mathfrak{u} + \frac{1}{\mathfrak{v}} + \mathfrak{v}\right) + \text{Const.},\\
y &= -\frac{iq}{4}\left(\frac{1}{\mathfrak{u}} - \mathfrak{u} - \frac{1}{\mathfrak{v}} + \mathfrak{v}\right) + \text{Const.},\\
z &= \frac{q}{2}(\log \mathfrak{u} + \log \mathfrak{v}) + \text{Const.}
\end{aligned}$$

Setzen wir

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}, \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{x} - i\mathfrak{y},$$

so ergiebt sich die reelle Darstellung der Fläche:

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{q}{2}\mathfrak{x}\cdot\frac{1 + \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2} + \text{Const.},\\
y &= -\frac{q}{2}\mathfrak{y}\cdot\frac{1 + \mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2} + \text{Const.},\\
z &= -q \log \sqrt{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2} + \text{Const.}
\end{aligned}$$

Lassen wir die additiven Constanten fort, so heisst das, dass die Fläche im Raume verschoben wird, wobei sie ihre Gestalt nicht ändert. Benutzen wir ferner statt $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ neue Parameter u und v, indem wir setzen:

$$\mathfrak{x} = -e^{-u}\cos v, \quad \mathfrak{y} = -e^{-u}\sin v,$$

so liegt die Fläche in dieser Darstellung vor:

$$x = \frac{q}{2}(e^u + e^{-u})\cos v, \qquad y = \frac{q}{2}(e^u + e^{-u})\sin v, \qquad z = qu.$$

Dies aber ist eine Rotationsfläche, deren Axe die z-Axe ist. Der Meridian in der xz-Ebene oder also die Parameterlinie ($v = 0$) hat die Gleichungen:

$$x = \frac{q}{2}(e^u + e^{-u}), \qquad y = 0, \qquad z = qu,$$

sodass für diesen Meridian:

$$x = \frac{q}{2}\left(e^{\frac{z}{q}} + e^{-\frac{z}{q}}\right)$$

ist. Der Meridian ist also eine Kettenlinie, deren Leitlinie die z-Axe ist. Die gefundene Fläche ist daher ein Catenoid. (Siehe S. 126.)

8. Beispiel: Wir wollen

$$U = \frac{2}{1 - \mathfrak{u}^4}, \qquad V = \frac{2}{1 - \mathfrak{v}^4}$$

wählen. Dann giebt der Satz 114 die Fläche:

$$x = \operatorname{arc\,tg} \mathfrak{u} + \operatorname{arc\,tg} \mathfrak{v} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathfrak{u} + \mathfrak{v}}{1 - \mathfrak{u}\mathfrak{v}},$$

$$y = \operatorname{arc\,tg} i\mathfrak{u} - \operatorname{arc\,tg} i\mathfrak{v} = \operatorname{arc\,tg} \frac{i(\mathfrak{u} - \mathfrak{v})}{1 - \mathfrak{u}\mathfrak{v}},$$

$$z = \tfrac{1}{2}\log\frac{(1 + \mathfrak{u}^2)(1 + \mathfrak{v}^2)}{(1 - \mathfrak{u}^2)(1 - \mathfrak{v}^2)}.$$

Wir haben hier die bei y auftretenden Integrale dadurch ausgewertet, dass wir $i\mathfrak{u}$ und $i\mathfrak{v}$ als die Veränderlichen benutzten. Wenn wir

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}, \qquad \mathfrak{v} = \mathfrak{x} - i\mathfrak{y}$$

einführen, so ergiebt sich die reelle Darstellung der Fläche:

$$x = \operatorname{arc\,tg}\frac{2\mathfrak{x}}{1 - \mathfrak{x}^2 - \mathfrak{y}^2}, \quad y = \operatorname{arc\,tg}\frac{-2\mathfrak{y}}{1 - \mathfrak{x}^2 - \mathfrak{y}^2}, \quad z = \tfrac{1}{2}\log\frac{(1 - \mathfrak{x}^2 - \mathfrak{y}^2)^2 + 4\mathfrak{x}^2}{(1 - \mathfrak{x}^2 - \mathfrak{y}^2)^2 + 4\mathfrak{y}^2},$$

woraus folgt:

$$z = \tfrac{1}{2}\log\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$$

oder:

$$z = \log\frac{\cos y}{\cos x}. \tag{9}$$

Diese Fläche heisst die Scherk'sche Minimalfläche.[1] Ihre Gestalt erkennt man am bequemsten aus der letzten Darstellungsform (9). Da z nur

[1] Nach ihrem Entdecker Scherk, „Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen", Journ. f. d. r. u. ang. Math. 13. Bd. (1835). Zur richtigen Würdigung dieser Entdeckung sei hervorgehoben, dass man damals die Sätze 114 und 115 noch nicht kannte.

dann reell ist, wenn $\cos x$ und $\cos y$ dasselbe Zeichen haben, so lassen sich die reellen Gebiete leicht erkennen: Wir teilen die xy-Ebene vermöge der Parallelen zu den Axen

$$x = \frac{2n+1}{2}\pi \quad \text{und} \quad y = \frac{2n+1}{2}\pi \qquad (n \text{ eine ganze Zahl})$$

in Quadrate von der Seitenlänge π ein. Denken wir uns diese Quadrate schachbrettartig in zwei Scharen zerlegt, so sehen wir, dass für reelle Punkte der Fläche nur solche Werte von x und y in Betracht kommen, deren zugehörige Punkte (x, y) in der xy-Ebene in den Quadraten der einen Schar liegen, und zwar gehört zu dieser Schar dasjenige Quadrat, dessen Mitte der Anfangspunkt ist. Wenn x um π wächst oder abnimmt und y gleichzeitig um π wächst oder abnimmt, so ändern $\cos x$ und $\cos y$ zugleich ihr Zeichen, sodass z nach (9) ungeändert bleibt. Die Fläche ist daher doppelt-periodisch. Das Stück, das über dem Quadrat um den Anfangspunkt liegt, wiederholt sich congruent über den in den Diagonalen anstossenden Quadraten.

Stellt man die Fläche, indem man x und y als Parameter u und v benutzt, nach (9) in der Form dar:

$$(10) \qquad x = u, \qquad y = v, \qquad z = \log\cos u - \log\cos v,$$

so erkennt man, dass sie auch dadurch entsteht, dass die Curve:

$$(11) \qquad x = u, \qquad y = 0, \qquad z = \log\cos u$$

längs der Curve:

$$(12) \qquad x = 0, \qquad y = v, \qquad z = -\log\cos v,$$

die sie im Anfangspunkt schneidet, ohne Änderung ihrer Gestalt und Stellung verschoben wird. Sie ist daher nicht nur hinsichtlich ihrer Minimalcurven als Minimalfläche eine Schiebungsfläche, sondern ausserdem hinsichtlich dieser Curven (11) und (12), vgl. S. 188. Sie ist daher sehr leicht zu construieren, sobald man die Curven (11) und (12) für die Gebiete:

$$-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2} < v < \frac{\pi}{2}$$

bestimmt hat.

Leicht sind die Haupttangentencurven zu finden. Wir berechnen zunächst die Verhältnisse der Fundamentalgrössen zweiter Ordnung nach (9), S. 106. Es kommt, wenn die obigen Gleichungen (10) benutzt werden:

$$LD = -\frac{1}{\cos^2 u}, \qquad MD = 0, \qquad ND = \frac{1}{\cos^2 v},$$

sodass nach S. 174 die Haupttangentencurven der Fläche der Gleichung

$$\frac{du^2}{\cos^2 u} - \frac{dv^2}{\cos^2 v} = 0$$

oder also einer der beiden Gleichungen:

$$\frac{du}{\cos u} \pm \frac{dv}{\cos v} = 0$$

genügen. Demnach sind:

$$\log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right) \pm \log\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2}\right) = \text{Const.}$$

die endlichen Gleichungen der Haupttangentencurven. Die Projectionen der Haupttangentencurven auf die xy-Ebene haben also nach (10) die Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right)=\text{Const.}$$

und:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{y}{2}\right)=\text{Const.}$$

Wir haben gesehen, dass die Fläche in doppelter Weise als Schiebungsfläche aufgefasst werden kann: Einmal als Schiebungsfläche ihrer imaginären Minimalcurven und dann als Schiebungsfläche der reellen Curven (11) und (12). Man kann beweisen, dass sie sogar auf unendlich viele Arten als Schiebungsfläche augefasst werden kann und daher ein Seitenstück zur gemeinen Schraubenfläche (vgl. S. 191) ist. Wenn man nämlich irgend eine Haupttangentencurve der Fläche herausgreift und den Ort der Mitten ihrer Secanten bestimmt, so findet man stets wieder Punkte der Fläche. (Vgl. S. 190). Die Fläche entsteht daher, wenn eine Curve, die zu einer Haupttangentencurve der Fläche im halben Maassstab ähnlich ist, an einer mit ihr congruenten Curve ohne Drehung entlang geschoben wird. Doch wollen wir hierauf nicht näher eingehen.[1]

Wenn wir die reellen Minimalflächen bestimmen wollen, so müssen wir nach Satz 115 unter U und V conjugiert complexe Functionen der conjugiert complexen Grössen $\mathfrak{u} = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{v} = \mathfrak{x} - i\mathfrak{y}$ verstehen und die Integrale in Satz 114 berechnen. Da nun jede der drei Coordinaten x, y, z als Summe von zwei Integralen gewonnen wird und jedesmal die beiden einzelnen Integrale conjugiert complex sind, so ist jedesmal ihre Summe gleich dem doppelten reellen Teil des einen Integrals allein.

Wenn wir also durch den vorgesetzten Buchstaben $\mathfrak{R}$ andeuten, dass von dem nachfolgenden Ausdruck nur der reelle Teil benutzt werden soll, so können wir das Ergebnis so aussprechen:[2]

Satz 116: Jede reelle Minimalfläche mit Ausnahme der Ebene ist in der Form darstellbar:

$$x = \mathfrak{R}\int(1-\mathfrak{u}^2)\,U(\mathfrak{u})\,d\mathfrak{u},$$

$$y = \mathfrak{R}\int i(1+\mathfrak{u}^2)\,U(\mathfrak{u})\,d\mathfrak{u},$$

$$z = \mathfrak{R}\int 2\,\mathfrak{u}\,U(\mathfrak{u})\,d\mathfrak{u},$$

sobald man darin U als irgend eine Function von $\mathfrak{u} = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$

---

[1] Diese Eigenschaft der Scherk'schen Minimalfläche fand Lie; vgl. die Anm. zu S. 191.

[2] Nach Weierstrass, vgl. die Anm. zu S. 247.

wählt, die nicht gleich Null ist, und nach beendigter Auswertung der Integrale $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ als Parameter der Fläche auffasst. Die reellen Punkte der Fläche gehören dann zu den reellen Werten der Parameter.

Wir können diese Gleichungen auch von den Integralzeichen befreien, indem wir wie in I S. 342 die Methode der teilweisen Integration anwenden. Wenn wir unter $F(\mathfrak{u})$ eine Function verstehen, deren dritter Differentialquotient gleich $U(\mathfrak{u})$ ist und also als von Null verschieden vorausgesetzt werden muss (vgl. (5) in I S. 342), so kommt entsprechend dem Satz 51, I S. 343:

Satz 117: Jede reelle Minimalfläche mit Ausnahme der Ebene ist in der Form darstellbar:[1]

$$\begin{aligned} x &= \Re\,[\,(1-\mathfrak{u}^2)F''(\mathfrak{u}) + 2\mathfrak{u}\,F'(\mathfrak{u}) - 2F(\mathfrak{u})],\\ y &= \Re\,[\,i(1+\mathfrak{u}^2)F''(\mathfrak{u}) - 2i\mathfrak{u}F'(\mathfrak{u}) + 2iF(\mathfrak{u})],\\ z &= \Re\,[\qquad 2\mathfrak{u}F''(\mathfrak{u}) - 2F'(\mathfrak{u})], \end{aligned}$$

sobald man darin $\mathfrak{u} = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$ setzt und die reellen Grössen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ als Parameter benutzt. Dabei bedeutet $F(\mathfrak{u})$ eine beliebige Function von $\mathfrak{u}$, deren dritter Differentialquotient nicht gleich Null ist.

Die Parameter $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sind nach Satz 27, S. 65, thermische Parameter der Minimalfläche. In der That lässt sich dies auch sofort daraus schliessen, dass das Quadrat des Bogenelementes nach (3) die Form

$$ds^2 = (\mathfrak{u}\mathfrak{v} + 1)^2\,UV\,d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v}$$

oder also in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ die Form:

$$ds^2 = (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + 1)^2\,UV(d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2),$$

also den Factor $d\mathfrak{x}^2 + d\mathfrak{y}^2$ hat. (Vgl. Satz 25, S. 58).

Die Parameterlinien $(\mathfrak{x})$ und $(\mathfrak{y})$ bilden daher auf der Minimalfläche ein Isothermennetz.

Bei der sphärischen Abbildung sind die Grössen (4) die Coordinaten des Bildpunktes des Flächenpunktes $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ oder $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$. Sie haben, in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ geschrieben, die Werte:

$$X = \frac{2\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+1}, \qquad Y = \frac{2\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+1}, \qquad Z = \frac{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2-1}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+1}.$$

Dies ist eine analytische Darstellung für die Kugelpunkte (X, Y, Z)

[1] Auch diese Darstellung der reellen Minimalflächen wurde von Weierstrass gegeben, vgl. die Anm. zu S. 247.

mit Hülfe zweier Parameter $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$. Da die sphärische Abbildung der Minimalfläche nach Satz 108 conform ist, so sind die Parameterlinien ($\mathfrak{x}$) und ($\mathfrak{y}$) auf der Kugel ebenfalls Isothermen, nach Satz 32, S. 71. In der That traten dieselben Gleichungen schon auf S. 81 in (14) bei der stereographischen Projection der Kugel auf; nur hatten wir dort x, y, z statt X, Y, Z. Wenn wir also die Bildkugel vom Nordpol (0, 0, 1) aus auf die xy-Ebene perspectiv projicieren, so ist die Projection des Kugelpunktes (X, Y, Z) der Punkt in der xy-Ebene mit den rechtwinkligen Coordinaten $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$. Die Parameterlinien ($\mathfrak{x}$) und ($\mathfrak{y}$) auf der Kugel sind hiernach diejenigen Kreise, die im Nordpol die yz-Ebene bez. xz-Ebene berühren. Da die stereographische Projection auch eine conforme Abbildung der Kugel auf die Ebene ist, so folgt:

Satz 118: Deutet man $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ als rechtwinklige Punktcoordinaten in der Ebene, so wird die in Satz 116 angegebene Minimalfläche conform auf die Ebene abgebildet.

Wir beschliessen diesen Paragraphen,[1] indem wir noch ein Beispiel von Minimalflächen erwähnen, das allerdings etwas schwierigere Betrachtungen verlangt, sodass wir uns nur auf die Hauptsachen einlassen und es dem Leser anheimstellen, dies Beispiel zu überschlagen.

Beispiel: Wir wollen diejenigen Minimalflächen besprechen, die sogenannte Doppelflächen sind. Dabei erinnern wir daran, dass wir die allgemeinen Gleichungen einer Minimalfläche aus dem Umstande abgeleitet haben, dass die Minimalflächen Schiebungsflächen von Minimalcurven sind. Nun sahen wir, als wir auf S. 188 u. f. von den Schiebungsflächen überhaupt sprachen, dass es insbesondere vorkommen kann, dass die beiden erzeugenden Curven der Schiebungsfläche mit einander congruent und von gleicher Stellung sind (vgl. S. 189). Da eine reelle Minimalfläche nur conjugiert complexe Minimalcurven enthält, so werden wir hier zu der besonderen Annahme geführt, dass beide erzeugende Minimalcurven einerseits conjugiert complex sind und andererseits die eine in die andere durch eine Schiebung übergeführt werden kann. Diese

[1] Hierbei sei zur Orientierung des Lesers noch bemerkt, dass wir nur einen sehr kleinen Teil derjenigen Ergebnisse beibringen können, die seitens verschiedener Mathematiker auf dem Gebiete der Minimalflächen gefunden worden sind. So werden wir z. B. auf die wichtigen Untersuchungen von Schwarz gar nicht eingehen können. Wir wollen aber noch erwähnen, dass Schwarz im Journal f. d. r. u. angew. Math., 80. Band, einen geschichtlichen Überblick über die Minimalflächen gegeben hat, der auszugsweise in Salmon-Fiedler's „Analytische Geometrie des Raumes“, II. Teil, Leipzig 1880, S. XX—XXVIII, aufgenommen worden ist. Auch die geschichtlichen Notizen in Darboux' „Leçons“ (vgl. die Anm. zu S. 187), I. partie, S. 267 u. f., sind zu beachten.

Flächen hat man **Doppelflächen** genannt, und zwar deshalb, weil sie, sobald sie nicht-periodisch sind, eine merkwürdige Eigenschaft haben. Diese Eigenschaft wollen wir aber nicht durch geometrische Überlegungen, wie wir sie soeben andeuteten, sondern durch die Untersuchung eines analytischen Problems ableiten, nämlich so:

Wählt man eine bestimmte Function $U(\mathfrak{u})$, so gehört zu ihr nach Satz 116 eine reelle Minimalfläche, die bis auf eine Schiebung im Raume eine völlig bestimmte Lage hat, denn die Integrationsconstanten können noch beliebig gewählt werden. Man kann sich nun fragen, ob zwei verschiedene Functionen dieselbe Minimalfläche — abgesehen von Schiebungen — liefern. Geben wir daher der Functin U noch einen zweiten Wert $\bar{U}(\bar{\mathfrak{u}})$, indem wir auch die Veränderliche $\mathfrak{u}$ durch

$$\bar{\mathfrak{u}} = \bar{\mathfrak{x}} + i\bar{\mathfrak{y}}$$

ersetzen, sodass für die zweite Fläche die Richtungscosinus der Normalen nach (4) die Werte haben:

$$(13) \qquad \bar{X} = \frac{\bar{\mathfrak{u}} + \bar{\mathfrak{v}}}{\bar{\mathfrak{u}}\bar{\mathfrak{v}} + 1}, \qquad \bar{Y} = -i\frac{\bar{\mathfrak{u}} - \bar{\mathfrak{v}}}{\bar{\mathfrak{u}}\bar{\mathfrak{v}} + 1}, \qquad \bar{Z} = \frac{\bar{\mathfrak{u}}\bar{\mathfrak{v}} - 1}{\bar{\mathfrak{u}}\bar{\mathfrak{v}} + 1},$$

wo natürlich $\bar{\mathfrak{v}}$ der zu $\bar{\mathfrak{u}}$ conjugierte Wert

$$\bar{\mathfrak{v}} = \bar{\mathfrak{x}} - i\bar{\mathfrak{y}}$$

sein soll. Soll jeder Punkt $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ der ersten Fläche mit einem Punkte $(\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}})$ der zweiten — abgesehen von einer Schiebung im Raume — zusammenfallen, so müssen sie parallele Normalen haben, aber es kann der Sinn der positiven Normalen bei der zweiten Fläche der umgekehrte sein. Daher setzen wir die Werte (4) entweder direct den Werten (13) gleich oder aber erst nach Multiplication mit -1. Im ersten Fall ergiebt sich dann

$$(14) \qquad \bar{\mathfrak{u}} = \mathfrak{u}, \qquad \bar{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v},$$

dagegen im zweiten Fall:

$$(15) \qquad \bar{\mathfrak{u}} = -\frac{1}{\mathfrak{v}}, \qquad \bar{\mathfrak{v}} = -\frac{1}{\mathfrak{u}} \qquad \text{oder:} \qquad \mathfrak{u} = -\frac{1}{\bar{\mathfrak{v}}}, \qquad \mathfrak{v} = -\frac{1}{\bar{\mathfrak{u}}},$$

und diese Werte $\bar{\mathfrak{u}}$, $\bar{\mathfrak{v}}$ sind conjugiert complex, sobald es $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ sind. Denn wenn

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}, \qquad \mathfrak{v} = \mathfrak{x} - i\mathfrak{y}$$

ist, so giebt (15):

$$(16) \qquad \bar{\mathfrak{u}} = -\frac{\mathfrak{x} + i\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}, \qquad \bar{\mathfrak{v}} = -\frac{\mathfrak{x} - i\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}.$$

Nun giebt die Gleichung für x in Satz 116 oder, was vielleicht klarer ist, die Gleichung für x in Satz 114, wo U und V conjugiert complexe Functionen von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ bedeuten:

$$dx = \mathfrak{u}\,U d\mathfrak{u} + \mathfrak{v}\,V d\mathfrak{v},$$

während bei der neuen Fläche:

$$d\bar{x} = \bar{\mathfrak{u}}\,\bar{U} d\bar{\mathfrak{u}} + \bar{\mathfrak{v}}\,\bar{V} d\bar{\mathfrak{v}}$$

ist. Sollen beide Werte übereinstimmen, so giebt die Annahme (14) die triviale Lösung $\bar{U}(\bar{\mathfrak{u}}) = \bar{U}(\mathfrak{u}) = U(\mathfrak{u})$ und $\bar{V}(\bar{\mathfrak{v}}) = \bar{V}(\mathfrak{v}) = V(\mathfrak{v})$, also keine zweite Fläche. Dagegen giebt die Annahme (15):

$$\bar{\mathfrak{u}}\,\bar{U} d\bar{\mathfrak{u}} + \bar{\mathfrak{v}}\,\bar{V} d\bar{\mathfrak{v}} = -\frac{1}{\bar{\mathfrak{v}}^3} U\left(-\frac{1}{\bar{\mathfrak{v}}}\right) d\bar{\mathfrak{v}} - \frac{1}{\bar{\mathfrak{u}}^3} V\left(-\frac{1}{\bar{\mathfrak{u}}}\right) d\bar{\mathfrak{u}}.$$

Diese Forderung wird für alle Werte von $\bar{\mathfrak{u}}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ befriedigt, wenn:

$$\bar{U}(\bar{\mathfrak{u}}) = -\frac{1}{\bar{\mathfrak{u}}^4} V\left(-\frac{1}{\bar{\mathfrak{u}}}\right), \qquad \bar{V}(\bar{\mathfrak{v}}) = -\frac{1}{\bar{\mathfrak{v}}^4} U\left(-\frac{1}{\bar{\mathfrak{v}}}\right)$$

gesetzt wird, und dann sind $\bar{U}$ und $\bar{V}$ thatsächlich zu einander conjugiert complexe Functionen. Daher, mit Rücksicht auf (16):

Satz 119: Die beiden reellen Minimalflächen, die durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= \Re\int(1-\mathfrak{u}^2)\,U d\mathfrak{u}, & x &= \Re\int(1-\bar{\mathfrak{u}}^2)\,\bar{U} d\bar{\mathfrak{u}},\\ y &= \Re\int i(1+\mathfrak{u}^2)\,U d\mathfrak{u}, \quad \text{und} & y &= \Re\int i(1+\bar{\mathfrak{u}}^2)\,\bar{U} d\bar{\mathfrak{u}},\\ z &= \Re\int 2\mathfrak{u}\,U d\mathfrak{u} & z &= \Re\int 2\bar{\mathfrak{u}}\,\bar{U} d\bar{\mathfrak{u}} \end{aligned}$$

dargestellt werden, in denen U eine Function von

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$$

und $\bar{U}$ eine Function von

$$\bar{\mathfrak{u}} = \bar{\mathfrak{x}} + i\bar{\mathfrak{y}}$$

bedeutet, sind — abgesehen von einer Schiebung — nur dann mit einander identisch, wenn entweder U dieselbe Function von $\mathfrak{u}$ wie $\bar{U}$ von $\bar{\mathfrak{u}}$ ist oder wenn sich $\bar{U}$ durch die zu U conjugiert complexe Function V so ausdrückt:

$$\bar{U} = -\frac{1}{\bar{\mathfrak{u}}^4} V\left(-\frac{1}{\bar{\mathfrak{u}}}\right).$$

Im zweiten Fall entspricht dem Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der einen Fläche derjenige Punkt $(\bar{\mathfrak{x}}, \bar{\mathfrak{y}})$ der anderen Fläche, für den

$$\bar{\mathfrak{x}} = -\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}, \qquad \bar{\mathfrak{y}} = -\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2}$$

ist, und die Normalen beider Punkte sind einander parallel, aber von entgegengesetztem Sinn.

Bleiben wir jetzt bei dem nicht trivialen zweiten Fall. Es kann vorkommen, dass die neue Function $\bar{U}$, ausgedrückt durch $\bar{\mathfrak{u}}$, genau dieselbe Function ist wie die alte Function U, ausgedrückt durch $\mathfrak{u}$. Alsdann liegt eine reelle Minimalfläche vor, ausgedrückt durch die reellen Parameter $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, bei der die Stelle $(\mathfrak{u})$ oder $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ mit der Stelle

$$\left(-\frac{1}{\mathfrak{u}}\right) \quad \text{oder} \quad \left(-\frac{\mathfrak{x}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}, \quad -\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2}\right)$$

congruent ist, während sie an diesen beiden Stellen nach verschiedenen Seiten gerichtete parallele Normalen hat. Ist die Fläche nicht-periodisch, so müssen beide Stellen zusammenliegen. Wenn sie dagegen periodisch ist, so könnte die eine Stelle um eine oder um einige Perioden von der andern entfernt sein.

Setzen wir nun voraus, dass die Fläche nicht-periodisch sei, so wollen wir annehmen, dass sich die Grösse $\mathfrak{u}$ stetig in die Grösse $-1:\mathfrak{u}$ verwandele. Dabei beschreibt der zugehörige Punkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der Fläche eine stetige Curve auf der Fläche, wobei er schliesslich in seine Anfangslage zurückkehrt, aber

dann eine nach der anderen Seite gerichtete Normale hat; d. h. er ist auf die andere Seite der Fläche übergegangen. Es liegt also dann der merkwürdige Fall einer Fläche vor, bei der ein auf der Fläche gelegener Punkt auf stetigem Wege auf die andere Seite gerade an dieselbe Stelle gelangen kann, ohne die Fläche zu durchsetzen.[1] Eine solche Minimalfläche heisst eine Doppelfläche.[2]

Zu diesen Flächen gelangt man auch, wenn man, wie oben bemerkt, untersucht, wann die erzeugende Minimalcurve $(\mathfrak{v})$:

$$x = \frac{1}{2}\int (1 - \mathfrak{u}^2)\, U\, d\mathfrak{u}, \quad y = \frac{i}{2}\int (1 + \mathfrak{u}^2)\, U\, d\mathfrak{u}, \quad z = \int \mathfrak{u}\, U\, d\mathfrak{u}$$

in die zu ihr conjugierte erzeugende Minimalcurve $(\mathfrak{u})$:

$$x = \frac{1}{2}\int (1 - \mathfrak{v}^2)\, V\, d\mathfrak{v}, \quad y = -\frac{i}{2}\int (1 + \mathfrak{v}^2)\, V\, d\mathfrak{v}, \quad z = \int \mathfrak{v}\, V\, d\mathfrak{v}$$

durch Schiebung überführbar ist. Dies ist nämlich dann und nur dann der Fall, wenn man eine Veränderliche t so als Function von $\mathfrak{u}$ bestimmen kann, dass für jeden Wert von t

$$\begin{aligned}(1 - \mathfrak{u}^2)\, U\, d\mathfrak{u} &= \quad (1 - t^2)\, V(t)\, dt,\\ (1 + \mathfrak{u}^2)\, U\, d\mathfrak{u} &= -(1 + t^2)\, V(t)\, dt,\\ \mathfrak{u}\, U(\mathfrak{u})\, d\mathfrak{u} &= \quad t\, V(t)\, dt\end{aligned}$$

wird. Zunächst also wäre zu fordern:

$$\frac{1 - \mathfrak{u}^2}{\mathfrak{u}} = \frac{1 - t^2}{t}, \quad \frac{1 + \mathfrak{u}^2}{\mathfrak{u}} = -\frac{1 + t^2}{t},$$

woraus folgt:

$$t = -\frac{1}{\mathfrak{u}}.$$

Alsdann bliebe, indem wir diesen Wert von t in die drei Bedingungen einsetzen, nur die Forderung:

$$U(\mathfrak{u}) = -\frac{1}{\mathfrak{u}^4}\, V\left(-\frac{1}{\mathfrak{u}}\right),$$

was wieder zu dem Werte $\overline{U}$ in unserem Satze 119 zurückführt.

---

[1] Es ist leicht, sich ein Modell einer Fläche herzustellen, die zwar keine Minimalfläche ist, aber auch die Eigenschaft hat, dass man von ihrer einen Seite auf die andere auf stetigem Wege gelangen kann, die also, wie man sagen kann, nur einseitig ist. Man schneide nämlich einen etwa rechteckigen Streifen Papier aus und klebe die kurzen Seiten zusammen, nachdem man das eine Ende zum andern hingebogen und einmal um zwei rechte Winkel gedreht hat. Verfolgt man auf dem so hergestellten Modell die frühere längere Mittellinie des Rechtecks, so erkennt man sofort die Einseitigkeit. — Auf das Vorhandensein einseitiger Flächen hat Listing, „Census räumlicher Complexe", Abh. d. Göttinger Gesellsch. d. Wiss. 10. Bd. (1862), und unabhängig von ihm und in ausdrücklicherer Weise Möbius, „Über die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders", Leipziger Berichte 1865 (siehe auch Ges. Werke Bd. II), hingewiesen.

[2] Die Theorie der Minimal-Doppelflächen rührt von Lie her, vgl. die Anm. zu S. 188.

Setzen wir z. B.

$$U(\mathfrak{u}) = 1 - \frac{1}{\mathfrak{u}^4},$$

so ist die zu U conjugierte Function V von derselben Gestalt, also die im Satz 119 angegebene neue Function:

$$\bar{U}(\bar{\mathfrak{u}}) = -\frac{1}{\bar{\mathfrak{u}}^4}\left(1 - \frac{1}{\frac{1}{\bar{\mathfrak{u}}^4}}\right) = 1 - \frac{1}{\bar{\mathfrak{u}}^4},$$

d. h. dieselbe Function von $\bar{\mathfrak{u}}$ wie U von $\mathfrak{u}$. Mithin ergiebt sich für

$$U(\mathfrak{u}) = 1 - \frac{1}{\mathfrak{u}^4}$$

eine Doppelfläche, denn die Fläche ist offenbar durch eine algebraische Gleichung zwischen x, y, z darstellbar und deshalb nicht-periodisch. Sie heisst die Henneberg'sche Minimalfläche.[1]

Indem wir hier mit dem Paragraphen auch den zweiten Abschnitt schliessen, bemerken wir noch, dass wir auch eine Reihe von Formeln dieses Abschnittes in Tafeln im Anhange des Bandes zusammengestellt haben. Die Tafel XII enthält die Hauptformeln dieses Abschnittes, die sich auf die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung und die Krümmung beziehen. In der Tafel XIII sind einige dieser Formeln für die specielle Darstellungsform

$$z = f(x, y)$$

der Fläche, bei der x und y die Parameter sind, wiedergegeben. Einige von diesen Formeln sind zwar im Texte nicht entwickelt worden; sie gehen indes so unmittelbar aus den entsprechenden Formeln der Tafel XII durch Einsetzen der besonderen Werte hervor, dass wir von ihrer ausdrücklichen Ableitung hier füglich absehen dürfen. Die Tafel XIV bezieht sich auf die sphärische Abbildung einer Fläche und die Tafel XV auf die Parallelflächen.

Die Formeln dieser Tafeln werden wir künftig wieder in der üblichen Weise citieren.

---

[1] Henneberg, „Über solche Minimalflächen, welche eine vorgeschriebene ebene Curve zur geodätischen Linie haben", Zürich 1875.

Dritter Abschnitt.

Die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie.

---

§ 1. Die höheren Differentialquotienten der rechtwinkligen Coordinaten.

Die Betrachtungen des ersten und des zweiten Abschnittes zeigen, dass die drei Fundamentalgrössen erster Ordnung, E, F, G, und die drei Fundamentalgrössen zweiter Ordnung, L, M, N, von der grössten Bedeutung für die Flächentheorie sind. Dieser Umstand ist schon durch die Benennung gewürdigt worden.

Wir haben eine Reihe von solchen Eigenschaften der Flächen besprochen, die von ihrer zufälligen Lage gegenüber dem Kreuze der Coordinatenaxen unabhängig sind, wie z. B. die Krümmungsverhältnisse in einem Punkte, die Lagerung der zu einer Normalen unendlich benachbarten Normalen u. s. w. Wir fanden, dass zu ihrem analytischen Ausdruck die Fundamentalgrössen völlig ausreichten; so lassen sich z. B. die Hauptkrümmungsradien eines Flächenpunktes durch die Fundamentalgrössen allein ausdrücken, nach XII (K).

Da wir aber nur einen Teil der Eigenschaften der Flächen, insbesondere nur einen Teil ihrer von der Lage im Raume unabhängigen Eigenschaften betrachtet haben, so dürfen wir diese Bemerkung nicht ohne weiteres verallgemeinern. Vielmehr führt sie uns zu dem Problem, zu untersuchen, wie sich überhaupt die von der Lage im Raume unabhängigen Eigenschaften einer Fläche analytisch ausdrücken.

Die Erledigung dieses Problemes ist eines der Hauptziele des gegenwärtigen Abschnittes.

Zur Vorbereitung bedürfen wir einer Reihe von Formeln, die jetzt aufgestellt werden sollen. Erinnern wir uns an die Definitionen der Fundamentalgrössen in XI (A) und XII (B):

(1) $$\mathbf{S}\, x_u^2 = E, \quad \mathbf{S}\, x_u x_v = F, \quad \mathbf{S}\, x_v^2 = G,$$

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} x_{uu} & x_u & x_v \\ y_{uu} & y_u & y_v \\ z_{uu} & z_u & z_v \end{vmatrix} = DL, \quad \begin{vmatrix} x_{uv} & x_u & x_v \\ y_{uv} & y_u & y_v \\ z_{uv} & z_u & z_v \end{vmatrix} = DM, \quad \begin{vmatrix} x_{vv} & x_u & x_v \\ y_{vv} & y_u & y_v \\ z_{vv} & z_u & z_v \end{vmatrix} = DN,$$

wo

$$D^2 = EG - F^2$$

ist, so erkennen wir, dass sie die sechs ersten und neun zweiten partiellen Differentialquotienten der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z nach den Parametern u und v enthalten. Differenzieren wir die drei Gleichungen (1) einmal partiell nach u und einmal partiell nach v, so gehen aus ihnen die sechs Gleichungen hervor:

$$\mathbf{S}\,x_{uu}x_u = \tfrac{1}{2}E_u, \quad \mathbf{S}\,x_{uu}x_v + \mathbf{S}\,x_u x_{uv} = F_u, \quad \mathbf{S}\,x_{uv}x_v = \tfrac{1}{2}G_u,$$
$$\mathbf{S}\,x_{uv}x_u = \tfrac{1}{2}E_v, \quad \mathbf{S}\,x_{uv}x_v + \mathbf{S}\,x_u x_{vv} = F_v, \quad \mathbf{S}\,x_{vv}x_v = \tfrac{1}{2}G_v,$$

die wir auch so schreiben können:

$$(3)\quad \begin{cases} \mathbf{S}\,x_{uu}x_u = \tfrac{1}{2}E_u, & \mathbf{S}\,x_{uv}x_u = \tfrac{1}{2}E_v, \quad \mathbf{S}\,x_{vv}x_u = F_v - \tfrac{1}{2}G_u, \\ \mathbf{S}\,x_{uu}x_v = F_u - \tfrac{1}{2}E_v, & \mathbf{S}\,x_{uv}x_v = \tfrac{1}{2}G_u, \quad \mathbf{S}\,x_{vv}x_v = \tfrac{1}{2}G_v. \end{cases}$$

Die Gleichungen (2) und (3) sind neun lineare Gleichungen für die neun zweiten partiellen Ableitungen von x, y, z:

$$\begin{matrix} x_{uu}, & x_{uv}, & x_{vv}, \\ y_{uu}, & y_{uv}, & y_{vv}, \\ z_{uu}, & z_{uv}, & z_{vv}. \end{matrix}$$

Dabei enthalten die drei in (2) und (3) links stehenden Gleichungen nur die partiellen Ableitungen der ersten Reihe, ferner die in (2) und (3) in der Mitte stehenden Gleichungen nur die partiellen Ableitungen der mittleren Reihe und endlich die in (2) und (3) rechts stehenden Gleichungen nur die partiellen Ableitungen der dritten Reihe der soeben angegebenen Tabelle. Wir werden nun sehen, dass jedesmal die betreffenden drei Gleichungen hinsichtlich der in ihnen vorkommenden zweiten Ableitungen eine von Null verschiedene Determinante haben und daher nach den zweiten Ableitungen auflösbar sind. Durch die Auflösung ergeben sich alsdann die zweiten Ableitungen ausgedrückt durch die ersten Ableitungen, durch die Fundamentalgrössen und durch die ersten partiellen Ableitungen der Fundamentalgrössen erster Ordnung.

Die drei in (2) und (3) links stehenden Gleichungen können so geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(y_u z_v - z_u y_v) x_{uu} &= DL, \\ \mathbf{S}\, x_u x_{uu} &= \tfrac{1}{2} E_u, \\ \mathbf{S}\, x_v x_{uu} &= F_u - \tfrac{1}{2} E_v. \end{aligned}$$

Ihre Determinante hinsichtlich x_{uu}, y_{uu}, z_{uu} ist:

$$\begin{vmatrix} y_u z_v - z_u y_v & z_u x_v - x_u z_v & x_u y_v - y_u x_v \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

Direct oder auch nach XI (F) und XI (L) findet man als ihren Wert D^2. Ist also $D \neq 0$, d. h. ist die Fläche nicht die Tangentenfläche einer Minimalcurve (nach S. 29), so ist die Auflösung nach x_{uu}, y_{uu}, z_{uu} möglich. So kommt:

$$x_{uu} = \frac{1}{D^2} \begin{vmatrix} DL & z_u x_v - x_u z_v & x_u y_v - y_u x_v \\ \tfrac{1}{2} E_u & y_u & z_u \\ F_u - \tfrac{1}{2} E_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

oder:

$$x_{uu} = \frac{1}{D^2} [DL(y_u z_v - z_u y_v) + \tfrac{1}{2} E_u (x_u y_v^2 + x_u z_v^2 - x_v y_u y_v - x_v z_u z_v) - \\ - (F_u - \tfrac{1}{2} E_v)(x_u y_u y_v + x_u z_u z_v - x_v y_u^2 - x_v z_u^2)].$$

Wenn wir in der zweiten runden Klammer $x_u x_v^2$ addieren und subtrahieren, so sehen wir, dass sie nach (1) den Wert $x_u G - x_v F$ hat, und wenn wir in der letzten runden Klammer $x_u^2 x_v$ addieren und subtrahieren, finden wir, dass sie nach (1) den Wert $x_u F - x_v E$ hat. So kommt:

$$x_{uu} = \frac{1}{D^2} [DL(y_u z_v - z_u y_v) + \tfrac{1}{2} E_u (x_u G - x_v F) - (F_u - \tfrac{1}{2} E_v)(x_u F - x_v E)].$$

Die Werte, die sich für y_{uu}, z_{uu} ergeben, gehen aus diesem durch cyklische Vertauschung von x, y, z hervor.

Wenn wir alsdann in den drei Gleichungen u mit v und entsprechend E mit G, L mit N vertauschen, so gehen die Werte von x_{vv}, y_{vv}, z_{vv} hervor.

Um x_{uv}, y_{uv}, z_{uv} zu finden, müssen wir die drei mittleren Gleichungen in (2) und (3) benutzen. Hier ist die Rechnung genau so wie vorher durchzuführen.

In dieser Weise kommen wir zu neun Formeln, von denen drei so lauten:

$$
(4) \quad \begin{cases}
x_{uu} = \frac{L}{D}(y_u z_v - z_u y_v) + \frac{1}{2D^2}(E_u G + E_v F - 2F_u F)x_u + \\
\qquad + \frac{1}{2D^2}(-E_u F - E_v E + 2F_u E)x_v, \\
x_{uv} = \frac{M}{D}(y_u z_v - z_u y_v) + \frac{1}{2D^2}(E_v G - G_u F)x_u + \\
\qquad + \frac{1}{2D^2}(-E_v F + G_u E)x_v, \\
x_{vv} = \frac{N}{D}(y_u z_v - z_u y_v) + \frac{1}{2D^2}(-G_v F - G_u G + 2F_v G)x_u + \\
\qquad + \frac{1}{2D^2}(G_v E + G_u F - 2F_v F)x_v,
\end{cases}
$$

während die übrigen sechs aus diesen durch cyklische Vertauschung von x, y, z hervorgehen. Sie lehren:

Satz 1: Die zweiten partiellen Ableitungen der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Flächenpunktes nach den Parametern u und v lassen sich sämtlich durch die ersten Ableitungen von x, y, z, durch die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung und durch die ersten partiellen Ableitungen der Fundamentalgrössen erster Ordnung ausdrücken. Vorausgesetzt ist dabei, dass die Fläche keine Tangentenfläche einer Minimalcurve sei.

Hieraus ziehen wir weitere Schlüsse, wobei wir die Rechnungen gar nicht auszuführen brauchen: Wollen wir die dritten partiellen Ableitungen der Coordinaten x, y, z haben, so differenzieren wir unsere Formeln noch einmal nach u oder v. So giebt die erste Formel (4) nach u differenziert den Wert von x_{uuu}, und zwar ausgedrückt durch die ersten und zweiten Ableitungen von x, y, z, durch die Fundamentalgrössen, durch die ersten und zweiten Ableitungen von E, F, G und durch die ersten Ableitungen von L, M, N. Aber hierin können wir die zweiten Ableitungen von x, y, z mit Hilfe der Formeln (4) und der sechs analogen Formeln durch die ersten Ableitungen von x, y, z durch die Fundamentalgrössen und die ersten Ableitungen von E, F, G ausdrücken u. s. w. So ergiebt sich, wenn wir in derselben Weise weiter schliessen:

Satz 2: Die zweiten und höheren partiellen Ableitungen der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Flächenpunktes nach den Parametern u und v lassen sich sämtlich durch die ersten Ableitungen von x, y, z, durch die sechs Fundamentalgrössen und durch die partiellen Ableitungen

der Fundamentalgrössen nach u und v ausdrücken, und zwar treten bei den n^{ten} Ableitungen von x, y, z die Ableitungen von E, F, G bis zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, die von L, M, N bis zur $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung auf. Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Fläche keine Tangentenfläche einer Minimalcurve sei.

§ 2. Die drei Fundamentalgleichungen.

Wir sahen, dass sich die zweiten Ableitungen von x, y, z nach u und v durch die ersten, durch E, F, G, L, M, N und durch die ersten Ableitungen von E, F, G ausdrücken lassen. In den Formeln (4), S. 264, sind die Ausdrücke für x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} ausführlich angegeben worden. Wir zogen hieraus Schlüsse in Bezug auf die höheren Ableitungen von x, y, z. Hierbei aber ist nun ein Einwand zu machen:

Wollen wir z. B. x_{uuv} berechnen, so kann dies in zwei Arten geschehen, entweder dadurch, dass wir die Formel für x_{uu} partiell nach v, oder dadurch, dass wir die Formel für x_{uv} partiell nach u differenzieren. Dasselbe gilt bei der Berechnung von x_{uvv}. Jedesmal haben wir zwei Methoden, und wenn wir die nach beiden Methoden berechneten Werte einander gleichsetzen, erhalten wir also zwei Gleichungen. Da wir dieselben Schlüsse für y_{uuv}, y_{uvv} und für z_{uuv}, z_{uvv} machen können, so übersehen wir, dass wir so zu sechs Gleichungen kommen, die notwendig richtig sind.

Wir stellen uns die Aufgabe, diese sechs Gleichungen zu finden. Dabei werden wir sehen, dass sie sich auf nur drei reducieren, die wir ihrer grossen Wichtigkeit halber die drei Fundamentalgleichungen der Flächentheorie nennen wollen.

Da die Formeln einen grösseren Rechenaufwand erfordern, ist es angebracht, sie zunächst unter speciellen Voraussetzungen abzuleiten, für die sie sich einfacher gestalten. Der Leser wird dadurch einen besseren Überblick gewinnen und alsdann ihre allgemeine Berechnung leichter verstehen.

Wir wollen zunächst den speciellen Fall betrachten, dass die Parametercurven (u) und (v) Minimalcurven seien. Nach Satz 16, S. 36, schliessen wir dabei nur die Tangentenflächen der Minimalcurven aus, von denen wir ja hier, wie schon auf S. 263 bemerkt wurde, überhaupt absehen. Nach Satz 17, S. 36, ist jetzt

$$E = G = 0$$

und also $D = \sqrt{EG - F^2} = iF$ anzunehmen, sodass die Gleichungen (4), S. 264, die einfachere Gestalt bekommen:

$$(1)\quad \begin{cases} x_{uu} = -\dfrac{iL}{F}(y_u z_v - z_u y_v) + \dfrac{F_u}{F} x_u, \\ x_{uv} = -\dfrac{iM}{F}(y_u z_v - z_u y_v), \\ x_{vv} = -\dfrac{iN}{F}(y_u z_v - z_u y_v) + \dfrac{F_v}{F} x_v. \end{cases}$$

Wenn wir jetzt x_{uuv} aus der ersten Gleichung durch partielle Differentiation nach v berechnen wollen, so haben wir rechts den Ausdruck

$$-\frac{i}{F}(y_u z_v - z_v y_v)$$

oder:

$$\frac{y_u z_v - z_u y_v}{D}$$

partiell nach v zu differenzieren. Alsdann treten die zweiten partiellen Ableitungen von y und z auf, die wir mit Hülfe der Formeln, die aus (1) durch cyklische Vertauschung von x, y, z hervorgehen, wieder entfernen könnten. Aber wir können dies Geschäft vereinfachen, weil wir nämlich die partiellen Ableitungen des angegebenen Ausdruckes schon früher berechnet haben, denn er ist ja nach XI (F) nichts anderes als X, und die Ableitungen von X sind in XII (F) angegeben. Danach ist, weil jetzt $E = G = 0$, $D = iF$ ist:

$$(2)\quad \begin{cases} X_u = -\dfrac{M}{F} x_u - \dfrac{L}{F} x_v, \\ X_v = -\dfrac{N}{F} x_u - \dfrac{M}{F} x_v. \end{cases}$$

Wenn wir also statt (1) schreiben:

$$(3)\quad \begin{cases} x_{uu} = LX + \dfrac{F_u}{F} x_u, \\ x_{uv} = MX, \\ x_{vv} = NX + \dfrac{F_v}{F} x_v \end{cases}$$

und nun die Formeln (2) benutzen, so ist es ein leichtes, die Werte von x_{uuv} und x_{uvv} zu berechnen.

Die erste Formel (3) giebt, nach v differenziert, mit Rücksicht auf die zweite Formel (2):

$$x_{uuv} = L_v X - L\left(\frac{N}{F} x_u + \frac{M}{F} x_v\right) + \frac{\partial^2 \log F}{\partial u\, \partial v} x_u + \frac{F_u}{F} x_{uv}.$$

Die zweite Formel (3) dagegen giebt, nach u differenziert, mit Rücksicht auf die erste Formel (2):

$$x_{uuv} = M_u X - M\left(\frac{M}{F} x_u + \frac{L}{F} x_v\right).$$

Setzen wir beide Werte einander gleich und entfernen wir x_{uv} vermöge der zweiten Formel (3), so kommt:

$$L_v X - L\left(\frac{N}{F} x_u + \frac{M}{F} x_v\right) + \frac{\partial^2 \log F}{\partial u\, \partial v} x_u + \frac{F_u}{F} M X =$$
$$= M_u X - M\left(\frac{M}{F} x_u + \frac{L}{F} x_v\right)$$

oder, geordnet nach X, x_u, x_v:

$$(4) \qquad \left(L_v - M_u + \frac{F_u}{F} M\right) X + \left(-\frac{LN}{F} + \frac{\partial^2 \log F}{\partial u\, \partial v} + \frac{M^2}{F}\right) x_u = 0.$$

Hätten wir in entsprechender Weise aus denjenigen Formeln, die aus (3) durch Vertauschung von x mit y oder z und von X mit Y oder Z hervorgehen, die beiden Werte von y_{uuv} und die beiden Werte von z_{uuv} abgeleitet und jedesmal einander gleichgesetzt, so wären wir zu denjenigen beiden Gleichungen gelangt, die aus der letzten Gleichung durch dieselbe Vertauschung hervorgehen. Multiplicieren wir die drei so sich ergebenden Gleichungen mit X, Y, Z bezüglich x_v, y_v, z_v und addieren sie jedesmal, so ergiebt sich, weil $\mathbf{S}\, X^2 = 1$ und $\mathbf{S}\, X x_v = 0$ nach XI (I) ist, einzeln:

$$(5) \qquad L_v - M_u + \frac{F_u}{F} M = 0, \qquad \frac{LN - M^2}{F} - \frac{\partial^2 \log F}{\partial u\, \partial v} = 0,$$

und diese beiden Gleichungen ziehen umgekehrt die Gleichung (4) nach sich sowie die aus (4) durch Vertauschung von x mit y oder z und X mit Y oder Z hervorgehenden beiden Gleichungen.

Wenn wir nun nach derselben Methode statt x_{uuv}, y_{uuv}, z_{uuv} die Grössen x_{uvv}, y_{uvv}, z_{uvv} berechnen und jedesmal die beiden hervorgehenden Werte einander gleich setzen, so ergeben sich diejenigen Bedingungen, die durch Vertauschung von u mit v hervorgehen, wobei dann auch L mit N zu vertauschen ist. Es treten also analog (5) die beiden Bedingungen auf:

$$N_u - M_v + \frac{F_v}{F} M = 0, \qquad \frac{LN - M^2}{F} - \frac{\partial^2 \log F}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

Von diesen aber ist die zweite Gleichung identisch mit der zweiten Gleichung (5). Mithin ergeben sich insgesamt gerade drei Bedingungen, die wir so schreiben:

$$
(6) \quad \begin{cases} L_v - M_u = -\frac{F_u}{F} M, \\ \frac{LN - M^2}{F} = \frac{\partial^2 \log F}{\partial u \, \partial v}, \\ N_u - M_v = -\frac{F_v}{F} M. \end{cases}
$$

Wir kehren jetzt wieder zu allgemeinen Parametern u und v zurück. Dabei haben wir die Gleichungen (1) durch die Gleichungen (4), S. 264, zu ersetzen. Da der Übergang von den soeben benutzten speciellen Parametern u, v zu beliebigen Parametern auch dadurch bewirkt werden kann, dass man neue Parameter einführt, so ist es von vornherein klar, dass sich auch im allgemeinen Fall drei Bedingungen ergeben werden, diejenige nämlich, die aus (6) durch Einführung beliebiger neuer Parameter hervorgehen. Wir werden dies aber auch direct nachweisen. Die Gleichungen (4), S. 264, lassen sich zunächst wegen XI (F) so schreiben:

$$
(7) \quad \begin{cases} x_{uu} = LX + \frac{1}{2D^2}(E_u G + E_v F - 2F_u F) x_u + \\ \qquad + \frac{1}{2D^2}(-E_u F - E_v E + 2F_u E) x_v, \\ x_{uv} = MX + \frac{1}{2D^2}(E_v G - G_u F) x_u + \\ \qquad + \frac{1}{2D^2}(-E_v F + G_u E) x_v, \\ x_{vv} = NX + \frac{1}{2D^2}(-G_v F - G_u G + 2F_v G) x_u + \\ \qquad + \frac{1}{2D^2}(G_v E + G_u F - 2F_v F) x_v. \end{cases}
$$

Dabei nehmen wir Rücksicht auf die Formeln XII (R), mittels deren die Ableitungen von X, Y, Z zu berechnen sind und von denen die auf X bezüglichen so lauten:

$$
(8) \quad \begin{cases} X_u = \frac{1}{D^2}(FM - GL) x_u + \frac{1}{D^2}(FL - EM) x_v, \\ X_v = \frac{1}{D^2}(FN - GM) x_u + \frac{1}{D^2}(FM - EN) x_v. \end{cases}
$$

Wir differenzieren also jetzt die erste Gleichung (7) partiell nach v und die zweite partiell nach u. Die dadurch hervorgehenden Werte von x_{uuv} setzen wir einander gleich. So erhalten wir, wenn wir die dabei auftretenden Werte von x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} mittels (7) und

die Werte X_u, X_v mittels (8) entfernen, zunächst die sehr umständliche Gleichung:

$$
\begin{aligned}
& L_v X - M_u X + \\
& + \frac{L}{D^2}(FN - GM)x_u + \frac{L}{D^2}(FM - EN)x_v - \\
& - \frac{M}{D^2}(FM - GL)x_u - \frac{M}{D^2}(FL - EM)x_v + \\
& + \frac{1}{2D^2}(E_u G + E_v F - 2F_u F)\Big[MX + \frac{1}{2D^2}(E_v G - G_u F)x_u + \\
& \qquad + \frac{1}{2D^2}(-E_v F + G_u E)x_v\Big] + \\
& + \frac{1}{2D^2}(-E_u F - E_v E + 2F_u E)\Big[NX + \frac{1}{2D^2}(-G_v F - G_u G + 2F_v G)x_u + \\
& \qquad + \frac{1}{2D^2}(G_v E + G_u F - 2F_v F)x_v\Big] - \\
& - \frac{1}{2D^2}(E_v G - G_u F)\Big[LX + \frac{1}{2D^2}(E_u G + E_v F - 2F_u F)x_u + \\
& \qquad + \frac{1}{2D^2}(-E_u F - E_v E + 2F_u E)x_v\Big] - \\
& - \frac{1}{2D^2}(-E_v F + G_u E)\Big[MX + \frac{1}{2D^2}(E_v G - G_u F)x_u + \\
& \qquad + \frac{1}{2D^2}(-E_v F + G_u E)x_v\Big] + \\
& + \frac{\partial}{\partial v}\frac{E_u G + E_v F - 2F_u F}{2D^2}\cdot x_u + \frac{\partial}{\partial v}\frac{-E_u F - E_v E + 2F_u E}{2D^2}\cdot x_v - \\
& - \frac{\partial}{\partial u}\frac{E_v G - G_u F}{2D^2}\cdot x_u - \frac{\partial}{\partial u}\frac{-E_v F + G_u E}{2D^2}\cdot x_v = 0.
\end{aligned}
$$

Ehe wir an die Ausrechnung gehen, überblicken wir diese lange Formel und bemerken, dass sie in Bezug auf X, x_u, x_v linear und homogen ist, also die Form hat:

$$\alpha X + \beta x_u + \gamma x_v = 0,$$

wobei α, β, γ Functionen der Fundamentalgrössen und ihrer Ableitungen sind.

Wenn wir entsprechend y_{uuv} auf zwei Weisen berechnen und beide Werte einander gleich setzen und dasselbe für z_{uuv} thun, so gehen die Gleichungen hervor:

$$\alpha Y + \beta y_u + \gamma y_v = 0,$$
$$\alpha Z + \beta z_u + \gamma z_v = 0,$$

da α, β, γ ungeändert bleiben, wenn x, y, z cyklisch vertauscht werden.

Jetzt liegen drei in α, β, γ lineare homogene Gleichungen vor, deren Determinante nach XI (L) gleich D und daher von Null verschieden ist, sodass notwendig einzeln

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0$$

sein muss. Diese drei Gleichungen ziehen umgekehrt die vorigen nach sich. Also sehen wir:

Die ersten drei Bedingungen ergeben sich dadurch, dass wir den Coefficienten von X, den von x_u und den von x_v in unserer umständlichen Gleichung einzeln gleich Null setzen.

Wir hätten ebenso schliessen können, indem wir x_{uvv}, y_{uvv}, z_{uvv} auf je zwei Arten berechneten. Die dadurch hervorgehenden Bedingungen aber ergeben sich offenbar einfacher dadurch, dass wir in den soeben erwähnten drei Bedingungen u mit v und also E mit G und L mit N vertauschen.

Insgesamt ergeben sich also sechs Bedingungen, doch werden wir wie gesagt sehen, dass sie sich auf nur drei reducieren.

Zunächst ist die Gleichung $\alpha = 0$, die sich also durch Nullsetzen des Coefficienten von X aus der obigen langen Gleichung ergiebt, diese:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} L_v - M_u = \frac{E_v G - G_u F}{2D^2} L - \\ - \frac{E_u G - G_u E + 2(E_v - F_u)F}{2D^2} M - \\ - \frac{-E_u F - E_v E + 2F_u E}{2D^2} N. \end{aligned} \right.$$

Rechnet man die Gleichungen $\beta = 0$ und $\gamma = 0$ aus, d. h. zieht man aus der grossen Gleichung die Coefficienten von x_u und von x_v und setzt sie gleich Null, so findet man, dass sich F bez. E absondern lässt. Alsdann aber bleibt bei beiden dasselbe übrig, sodass die beiden Gleichungen $\beta = 0$ und $\gamma = 0$ nur die eine Bedingung ergeben:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{LN - M^2}{D^2} = \frac{1}{2D^2}(2F_{uv} - E_{vv} - G_{uu}) + \\ + \frac{E}{4D^4}(G_u^2 + E_v G_v - 2G_v F_u) + \\ + \frac{G}{4D^4}(E_v^2 + E_u G_u - 2E_u F_v) + \\ + \frac{F}{4D^4}(E_u G_v - E_v G_u - 2F_u G_u - 2F_v E_v + 4F_u F_v). \end{aligned} \right.$$

Dabei hat man natürlich zu berücksichtigen, dass

$$D^2 = EG - F^2,$$

also

$$\frac{\partial(D^2)}{\partial u} = E_u G + G_u E - 2 F_u F,$$

$$\frac{\partial(D^2)}{\partial v} = E_v G + G_v E - 2 F_v F$$

ist.

Die drei Bedingungen $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ reducieren sich somit auf die beiden Gleichungen (9) und (10). Die übrigen Bedingungen erhält man mithin, indem man in (9) und (10) die Parameter u und v, entsprechend E und G sowie L und N vertauscht. Aber dabei bleibt die Gleichung (10) ungeändert. Also tritt nur die eine aus (9) folgende Gleichung hinzu:

$$(11) \quad \begin{cases} N_u - M_v = \dfrac{G_u E - E_v F}{2D^2} N - \\ \quad - \dfrac{G_v E - E_v G + 2(G_u - F_v) F}{2D^2} M - \\ \quad - \dfrac{- G_v F - G_u G + 2 F_v G}{2D^2} L, \end{cases}$$

sodass wir also thatsächlich zu nur drei Bedingungen gelangen, zu den Gleichungen (9), (10) und (11).

Demnach ergiebt sich der wichtige

Satz 3: Zwischen den Fundamentalgrössen E, F, G und L, M, N und ihren Ableitungen bestehen drei Gleichungen. Die eine drückt

$$\frac{LN - M^2}{EG - F^2}$$

als Function von E, F, G und den ersten und zweiten Ableitungen von E, F, G aus; die beiden anderen drücken

$$L_v - M_u \quad \text{und} \quad N_u - M_v$$

als lineare homogene Functionen von L, M, N aus, deren Coefficienten die Grössen E, F, G und die ersten Ableitungen dieser Grössen enthalten.

Wie wir schon bemerkt haben, nennen wir die drei Gleichungen (9), (10) und (11) die Fundamentalgleichungen der Flächentheorie,[1] und zwar aus folgendem Grunde: Wenn E, F, G

[1] Von den drei Fundamentalgleichungen ist die eine, die Gleichung (10), schon von GAUSS 1828 in seinen „Disquisitiones“ (siehe die Anm. zu S. 5)

und L, M, N irgend welche sechs gegebene Functionen von u und v sind, so können sie nach den obigen Ergebnissen nur dann die Fundamentalgrössen einer Fläche sein, wenn sie die drei Fundamentalgleichungen für alle Werte von u und v erfüllen. Ist dies nun der Fall, so werden wir erkennen, dass es thatsächlich Flächen giebt, die diese Grössen zu Fundamentalgrössen haben. Mit anderen Worten: Wir werden erkennen, dass die drei Fundamentalgleichungen nicht nur die notwendigen, sondern auch die hinreichenden Bedingungen dafür sind, dass sechs gegebene Functionen E, F, G und L, M, N als Fundamentalgrössen einer Fläche aufgefasst werden können.

Doch geschieht dies erst später, in § 9. Ehe wir dazu übergehen, besprechen wir in § 3 bis § 5 einige Probleme, die sich an die Aufstellung der Fundamentalgleichungen naturgemäss anschliessen.

Wir wollen hier noch zum Überfluss erwähnen, dass sich die drei Fundamentalgleichungen (9), (10) und (11) für den Fall, dass die Curven (u) und (v) die Minimalcurven der Fläche sind, auf die drei Gleichungen (6) reducieren.

§ 3. Verbiegung einer Fläche auf eine andere.

Unter den drei Fundamentalgleichungen hat eine, nämlich die Gleichung (10) auf S. 270, eine besondere Bedeutung für ein wichtiges Problem der Flächentheorie. In dieser Gleichung steht links nichts anderes als das Krümmungsmaass K der Fläche — nach XII (K) —, sodass sich ergiebt:

---

entwickelt worden. Er hat aus ihr wichtige Schlüsse gezogen, die wir im nächsten Paragraphen besprechen. Auch ist es leicht, aus den von Gauss sonst noch gegebenen Gleichungen die beiden anderen Fundamentalgleichungen abzuleiten, wie Darboux und Bianchi betont haben. Die beiden anderen Fundamentalgleichungen (9) und (11) treten, allerdings in anderer Form, bei Mainardi, „Su la teoria generale delle superficie“, Giornale dell' Istituto Lombardo, t. IX (1857), auf, aber man nennt sie die Gleichungen von Codazzi, weil sie in Codazzi's Abhandlung „Sulle coordinate curvilinee d'una superficie e dello spazio“, Annali di Mat. t. II (1868), explicite zuerst vorkommen. Bonnet gebührt das Verdienst, die grosse Bedeutung der Codazzi'schen Gleichungen ins rechte Licht gesetzt zu haben, worauf wir noch zurückkommen. Schliesslich muss bemerkt werden, dass die Fundamentalgleichungen für specielle Parameter schon bei Lamé, insbesondere in seinen „Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications“, Paris 1859, vorkommen.

Satz 4:[1] Das Krümmungsmaass K einer Fläche ist als eine solche Function darstellbar, die nur die Fundamentalgrössen erster Ordnung E, F, G und die ersten und zweiten partiellen Ableitungen dieser drei Grössen nach den Parametern u und v der Fläche enthält.

Dies analytische Ergebnis hat nun auch einen geometrischen Sinn, wie bald auseinander gesetzt werden wird. Wir bedürfen dazu einiger Vorbereitungen.

In Satz 10, I S. 282, ist es ausgesprochen worden, dass nur die Tangentenflächen von Curven in der Art Punkt für Punkt auf die Ebene abgebildet werden können, dass jeder Curve der Fläche eine gleichlange Curve in der Ebene entspricht. Deshalb eben heissen diese Flächen abwickelbare Flächen. Es wäre deutlicher, sie auf die Ebene abwickelbare Flächen zu nennen, denn wenn man die Ebene durch eine krumme Fläche ersetzt, so kommt man zu einem neuen Problem:

Gegeben seien zwei Flächen. Wir fragen uns, ob es möglich ist, die eine Punkt für Punkt auf die andere so abzubilden, dass jeder Curve auf der einen Fläche eine gleichlange Curve auf der anderen Fläche entspricht. Lässt sich diese Forderung der Längentreue (vgl. S. 38) erfüllen, so werden wir sagen, dass die eine Fläche auf die andere abwickelbar sei. Man zieht es vor, zu sagen: Die eine Fläche lässt sich auf die andere verbiegen,[2]

---

[1] Wie schon in der letzten Anmerkung gesagt wurde, rührt dieser Satz von Gauss her.

[2] Das Problem der Verbiegung von Flächen wurde von Gauss in seinen „Disquisitiones" zuerst gestellt und behandelt. Daran schliesst sich eine sehr grosse Reihe von Arbeiten, von denen wir nur die folgenden nennen:

Minding, „Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen mit unveränderlichem Krümmungsmaasse", Journ. f. d. r. u. ang. Math. 19. Bd. (1839).

Liouville's Noten: „Sur le théorème de M. Gauss, concernant le produit des deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface" und „Du tracé géographique des surfaces les unes sur les autres" zur 5. Aufl. von Monge's „Application", Paris 1850.

Bour, „Théorie de la déformation des surfaces", Journ. de l'École polyt. 39. cah. (1862).

Bonnet, „Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée", Journ. de l'École polyt. 41. u. 42. cah. (1865—67).

Weingarten, „Über eine Classe auf einander abwickelbarer Flächen", Journ. f. d. r. u. ang. Math. 59. Bd. (1861), und „Über die Theorie

indem man also unter Verbiegung eine solche Änderung der Gestalt einer Fläche versteht, bei der keine Flächencurve eine Dehnung oder Kürzung erleidet. Die Bevorzugung des Wortes Verbiegung vor dem Worte Abwickelung hat ihren Grund darin, dass man unter Abwickelung oft stillschweigend die Abwickelung auf die Ebene, statt auf eine krumme Fläche, versteht. Die abwickelbaren Flächen also sind die auf die Ebene verbiegbaren Flächen.

Die Verbiegung einer Fläche auf eine andere Fläche kann auch als eine zugleich flächentreue und conforme Abbildung definiert werden, wie aus S. 70 erhellt. Der Ähnlichkeitsmaassstab ist hier 1 : 1, d. h. die Verbiegung kann auch als eine solche Abbildung bezeichnet werden, bei der jedem unendlich kleinen Stück der einen Fläche ein congruentes Stück der anderen entspricht.

Hervorgehoben sei noch, dass wir im allgemeinen mit dem Wort: Verbiegung durchaus nicht den Begriff einer stetigen Überführung der einen Fläche in die andere — ohne Dehnung — verbinden. Ob die Verbiegung einer Fläche in eine andere Fläche auf stetigem Wege möglich ist, das ist eine schwierigere Frage, auf die wir nur in einzelnen Beispielen eingehen werden.

Während zwei beliebige Flächen nach Satz 35, S. 72, stets conform auf einander abgebildet werden können, ist es klar, dass zwei beliebig gegebene Flächen nicht auf einander verbiegbar sein werden, denn wir wissen ja, dass z. B. auf die Ebene nur die Tangentenflächen der Curven verbiegbar sind. Vielmehr wird es zu jeder bestimmt gewählten Fläche nur eine gewisse Familie von Flächen geben, die auf sie verbiegbar sind.

Wenn wir wie in § 11 des 1. Abschnittes die punktweise Abbildung einer Fläche auf eine andere analytisch dadurch ausdrücken, dass wir entsprechenden Punkten beider Flächen dieselben Parameterwerte u, v geben, sodass etwa:

$$x = \varphi(u,v), \quad y = \chi(u,v), \quad z = \psi(u,v) \tag{1}$$

und

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(u,v), \quad \bar{y} = \bar{\chi}(u,v), \quad \bar{z} = \bar{\psi}(u,v) \tag{2}$$

---

der auf einander abwickelbaren Oberflächen", Festschrift der technischen Hochschule zu Berlin 1884.

Endlich ist noch die Behandlung des Problems in Darboux' „Leçons" (vgl. die Anm. zu S. 187), 3. partie, Paris 1894, zu erwähnen.

die Gleichungen der beiden Flächen sind, deren Bogenelemente die Quadrate haben mögen:

$$(3)\quad \begin{cases} ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \\ d\bar{s}^2 = \bar{E}\,du^2 + 2\bar{F}\,du\,dv + \bar{G}\,dv^2, \end{cases}$$

so wird die Abbildung der einen Fläche auf die andere nur dann eine Verbiegung sein, wenn insbesondere jedes Bogenelement ds der einen Fläche dieselbe Länge wie sein Bild $d\bar{s}$ hat. Nach (3) tritt dies dann und nur dann ein, wenn

$$(4)\quad E = \bar{E}, \quad F = \bar{F}, \quad G = \bar{G}$$

ist. Da jede Curvenlänge ein Integral über Bogenelemente ist, so sind dann auch entsprechende Curven beider Flächen gleich lang. Also:

Satz 5: Eine Fläche ist dann und nur dann auf eine andere Fläche verbiegbar, wenn es möglich ist, Parameter u, v auf beiden Flächen derart einzuführen, dass die Fundamentalgrössen erster Ordnung der einen Fläche den entsprechenden Fundamentalgrössen erster Ordnung der anderen Fläche gleich werden. Alsdann entsprechen diejenigen Punkte beider Flächen einander, die zu denselben Werten der Parameter u und v gehören.

Nach Satz 4 ist aber dann auch das Krümmungsmaass K der einen Fläche gleich dem Krümmungsmaass $\bar{K}$ der anderen. Daher:

Satz 6: Sind zwei Flächen auf einander verbiegbar, so haben sie in einander entsprechenden Punkten dasselbe Krümmungsmaass.

Oder auch:

Satz 7: Bei der Verbiegung einer Fläche bleibt ihr Krümmungsmaass überall ungeändert.[1]

Auf diesen wichtigen Satz haben wir schon gelegentlich (auf S. 229) hingewiesen.

Wenn zwei Flächen auf einander verbiegbar sein sollen, so müssen hiernach die einander entsprechenden Punkte beider Flächen dasselbe Krümmungsmaass haben. Hat man nun zwischen zwei Flächen eine solche punktweise Abbildung hergestellt, dass jeder Punkt der einen Fläche dasselbe Krümmungsmaass wie sein Bild-

[1] Die Sätze 5, 6 und 7 rühren von Gauss her. Insbesondere ist Satz 7 das von Gauss so genannte „Theorema egregium".

punkt auf der anderen Fläche hat, so folgt aber keineswegs daraus, dass die Abbildung der einen Fläche auf die andere eine Verbiegung wäre.

Es ist in der That leicht, Beispiele für das Gegenteil zu bilden.[1]

Beispiel: In der xz-Ebene sei die logarithmische Curve:

$$x = u\,, \quad y = 0\,, \quad z = \log u$$

gegeben. Drehen wir sie um die z-Axe, so entsteht die Rotationsfläche der logarithmischen Curve:

$$x = u \cos v\,, \quad y = u \sin v\,, \quad z = \log u\,,$$

auf der das Quadrat des Bogenelementes den Wert hat:

$$d s^2 = \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) d u^2 + u^2 d v^2\,.$$

Andererseits betrachten wir die gemeine Schraubenfläche (vgl. S. 60):

$$\bar{x} = \bar{u} \cos \bar{v}\,, \quad \bar{y} = \bar{u} \sin \bar{v}\,, \quad \bar{z} = \bar{v}\,,$$

deren Ganghöhe gleich 2π ist. Hier ist das Quadrat des Bogenelementes:

$$d \bar{s}^2 = d \bar{u}^2 + (1 + \bar{u}^2) d \bar{v}^2.$$

Da bei der ersten Fläche die Fundamentalgrössen erster Ordnung die Werte

$$E = 1 + \frac{1}{u^2}\,, \quad F = 0\,, \quad G = u^2\,,$$

auf der zweiten Fläche die Werte:

$$\bar{E} = 1\,, \quad \bar{F} = 0\,, \quad \bar{G} = 1 + \bar{u}^2$$

haben, so ergiebt die Fundamentalgleichung (10), S. 270, für die Krümmungsmaasse K und $\bar{K}$ beider Flächen die Werte:

$$K = -\frac{1}{(1 + u^2)^2}\,, \quad \bar{K} = -\frac{1}{(1 + \bar{u}^2)^2}\,.$$

Wenn wir also die Punkte der beiden Flächen einander dadurch zuordnen, dass wir

$$\bar{u} = u\,, \quad \bar{v} = v$$

setzen, so haben einander zugeordnete Punkte dasselbe Krümmungsmaass, während doch die Quadrate der Bogenelemente verschieden sind. Diese punktweise Zuordnung ist also keine Verbiegung der einen Fläche auf die andere.

Es giebt hier überhaupt keine Abbildung der einen Fläche auf die andere, die eine Verbiegung wäre. Denn die allgemeinste Abbildung der einen Fläche auf die andere, bei der jedem Punkte (u, v) ein Punkt $(\bar{u}, \bar{v})$ mit demselben Krümmungsmaass entspricht, ergiebt sich ja, wenn man

$$1 + \bar{u}^2 = \pm (1 + u^2)$$

[1] Solche Beispiele gaben Stäckel und Wangerin, „Zur Theorie des Gauss'schen Krümmungsmaasses", Leipziger Berichte 1893. Das obige Beispiel rührt von Wangerin her.

oder also:

$$\mathfrak{u} = \sqrt{-1 \pm 1 \pm u^2}$$

annimmt, d. h.

$$\mathfrak{u} = \pm u \quad \text{oder} \quad \mathfrak{u} = \sqrt{-2 - u^2}$$

setzt, während $\mathfrak{v}$ eine beliebige Function von u und v sein darf:

$$\mathfrak{v} = \varphi(u, v).$$

Führen wir zunächst $\mathfrak{u} = \pm u$, $\mathfrak{v} = \varphi(u, v)$ in den Ausdruck für $d\mathfrak{s}^2$ ein, so kommt:

$$d\mathfrak{s}^2 = du^2 + (1 + u^2)(\varphi_u\, du + \varphi_v\, dv)^2.$$

Er ist nur dann gleich dem obigen Ausdruck für ds^2, wenn

$$1 + (1 + u^2)\varphi_u^2 = 1 + \frac{1}{u^2}, \quad \varphi_u \varphi_v = 0, \quad (1 + u^2)\varphi_v^2 = u^2$$

ist. Wegen der zweiten Gleichung müsste φ_u oder φ_v gleich Null sein, was beides zu Widersprüchen führen würde. Wenn wir dagegen:

$$\mathfrak{u} = \sqrt{-2 - u^2}, \quad \mathfrak{v} = \varphi(u, v)$$

in $d\mathfrak{s}^2$ einsetzen, so kommt:

$$d\mathfrak{s}^2 = -\frac{u^2}{2 + u^2}\, du^2 + (1 + u^2)(\varphi_u\, du + \varphi_v\, dv)^2.$$

Dieser Ausdruck aber deckt sich nur dann mit ds^2, wenn

$$-\frac{u^2}{2 + u^2} + (1 + u^2)\varphi_u = 1 + \frac{1}{u^2}, \quad \varphi_u \varphi_v = 0, \quad (1 + u^2)\varphi_v^2 = u^2$$

ist, was ebenso zu Widersprüchen führt.

Wir haben also hier den Fall vor uns, dass keine derjenigen Abbildungen der einen Fläche auf die andere, bei denen Punkte mit gleichem Krümmungsmaass einander entsprechen, eine Verbiegung ist.

Will man für zwei gegebene Flächen untersuchen, ob sie auf einander verbiegbar sind, so hat man zu bedenken, dass man von vornherein nicht weiss, wie die Punkte der beiden Flächen einander bei der noch fraglichen Verbiegbarkeit entsprechen. Aber man weiss von vornherein, dass gewissen Curven der einen Fläche gewisse Curven auf der anderen entsprechen müssen, nämlich die Minimalcurven. In der That gehören ja die Verbiegungen mit zu den conformen Abbildungen, sodass der Satz 37, S. 73, die Behauptung enthält. Man kann die Behauptung auch mittels des Satzes 5 und der Differentialgleichung XI (O) der Minimalcurven als richtig nachweisen.

Wenn also zwei Flächen, von denen man nicht weiss, ob sie auf einander verbiegbar sind, irgend wie analytisch gegeben sind, so wird man gut thun, auf beiden die Minimalcurven als Parameterlinien einzuführen. Auf der einen Fläche seien $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ und auf

der anderen $\mathfrak{\bar u}, \mathfrak{\bar v}$ zugehörige Parameter. Nach Satz 17, S. 36, haben dann die Quadrate der Bogenelemente beider Flächen die Formen:

$$ds^2 = 2F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})\,d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v},$$
$$d\bar{s}^2 = 2\bar{F}(\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}})\,d\bar{\mathfrak{u}}\,d\bar{\mathfrak{v}}.$$

Die Zurückführung der Bogenelement-Quadrate auf solche Formen erfordert natürlich die Integration der Differentialgleichung der Minimalcurven.

Wenn sich nun herausstellt, dass $F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ dieselbe Function von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ ist wie $\bar{F}$ von $\bar{\mathfrak{u}}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$, so würde durch $\mathfrak{u} = \bar{\mathfrak{u}}$, $\mathfrak{v} = \bar{\mathfrak{v}}$ eine solche Abbildung der beiden Flächen auf einander vermittelt sein, bei der einander entsprechende Bogenelemente dieselbe Länge haben, d. h. dann ist die Verbiegung ausführbar.

Aber dies ist nicht die einzige Möglichkeit. Man muss sich vielmehr daran erinnern, dass zu bestimmten Scharen von Parameterlinien nach S. 10 nicht auch ganz bestimmte Parameter gehören. Vielmehr wird z. B. auf der ersten Fläche das System der Parameterlinien immer dann noch aus den Minimalcurven bestehen, wenn statt $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ eine Function $\bar{\mathfrak{u}}$ von $\mathfrak{u}$ allein und eine Function $\bar{\mathfrak{v}}$ von $\mathfrak{v}$ allein als neue Parameter eingeführt werden.

Wird also etwa:

$$\mathfrak{u} = A(\bar{\mathfrak{u}}), \qquad \mathfrak{v} = B(\bar{\mathfrak{v}})$$

gesetzt und werden hierdurch neue Parameter $\bar{\mathfrak{u}}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ eingeführt, so wird:

$$d\mathfrak{u} = A'd\bar{\mathfrak{u}}, \qquad d\mathfrak{v} = B'd\bar{\mathfrak{v}},$$

sodass das Quadrat des Bogenelementes ds der ersten Fläche statt der Form

$$ds^2 = 2F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})\,d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v}$$

die Form:

$$ds^2 = 2F(A, B)\,A'B'\,d\bar{\mathfrak{u}}\,d\bar{\mathfrak{v}} \tag{5}$$

annimmt. Mithin folgt, wenn man noch bedenkt, dass das System der Parameterlinien auch bei Vertauschung von $\mathfrak{u}$ mit $\mathfrak{v}$ ungeändert bleibt:

Satz 8: Sind zwei Flächen auf ihre Minimalcurven als Parameterlinien bezogen und sind $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ bez. $\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}}$ zugehörige Parameter der beiden Flächen, wobei die Quadrate ihrer Bogenelemente also die Formen:

$$ds^2 = 2F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})\,d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v}, \qquad d\bar{s}^2 = 2\bar{F}(\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}})\,d\bar{\mathfrak{u}}\,d\bar{\mathfrak{v}}$$

annehmen, so sind die beiden Flächen dann und nur dann auf einander verbiegbar, wenn es eine Function A von $\bar{\mathfrak{u}}$ allein und eine Function B von $\bar{\mathfrak{v}}$ allein giebt, für die entweder:

$$F(A, B) A'(\bar{\mathfrak{u}}) B'(\bar{\mathfrak{v}}) = \bar{F}(\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}})$$

oder

$$F(B, A) A'(\bar{\mathfrak{u}}) B'(\bar{\mathfrak{v}}) = \bar{F}(\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}})$$

für alle Werte von $\bar{\mathfrak{u}}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ ist. Dabei sind alsdann im ersten Fall:

$$\mathfrak{u} = A(\bar{\mathfrak{u}}), \quad \mathfrak{v} = B(\bar{\mathfrak{v}})$$

und im zweiten Fall:

$$\mathfrak{u} = B(\bar{\mathfrak{v}}), \quad \mathfrak{v} = A(\bar{\mathfrak{u}})$$

die Gleichungen der Verbiegung.

Beispiel: Es liege die Minimalfläche vor (vgl. Satz 114, S. 247):

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\int (1 - \mathfrak{u}^2) U d\mathfrak{u} + \frac{1}{2}\int (1 - \mathfrak{v}^2) V d\mathfrak{v}, \\ y &= \frac{i}{2}\int (1 + \mathfrak{u}^2) U d\mathfrak{u} - \frac{i}{2}\int (1 + \mathfrak{v}^2) V d\mathfrak{v}, \\ z &= \int \mathfrak{u} U d\mathfrak{u} + \int \mathfrak{v} V d\mathfrak{v}, \end{aligned} \right.$$

wo U eine Function von $\mathfrak{u}$ allein und V eine Function von $\mathfrak{v}$ allein bedeutet. Bei der Fläche (6) sind die Parameterlinien ($\mathfrak{u}$) und ($\mathfrak{v}$) die Minimalcurven, und das Quadrat ihres Bogenelementes ist:

$$ds^2 = (1 + \mathfrak{u}\mathfrak{v})^2 U V d\mathfrak{u} d\mathfrak{v}.$$

Soll diese Minimalfläche auf eine andere Minimalfläche verbiegbar sein,[1] bei der $\bar{\mathfrak{u}}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ statt $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ sowie $\bar{U}(\bar{\mathfrak{u}})$ und $\bar{V}(\bar{\mathfrak{v}})$ statt U und V stehen, so müssen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ nach unserem Satze solche Functionen $A(\bar{\mathfrak{u}})$ und $B(\bar{\mathfrak{v}})$ sein, dass

$$(7) \quad (1 + AB)^2 U(A) V(B) A'B' = (1 + \bar{\mathfrak{u}}\bar{\mathfrak{v}})^2 \bar{U}(\bar{\mathfrak{u}}) \bar{V}(\bar{\mathfrak{v}})$$

wird, wenn wir vorerst von dem Fall, dass $\mathfrak{u}$ mit $\mathfrak{v}$ vertauscht wird, absehen. Wenn wir diese Gleichung logarithmisch nach $\bar{\mathfrak{u}}$ differenzieren, so kommt:

$$\frac{2A'B}{1 + AB} + \frac{U'A'}{U} + \frac{A''}{A'} = \frac{2\bar{\mathfrak{v}}}{1 + \bar{\mathfrak{u}}\bar{\mathfrak{v}}} + \frac{\bar{U}'}{\bar{U}},$$

---

[1] Die Theorie der Verbiegung von Minimalflächen in Minimalflächen verdankt man BONNET. Siehe seine „Note sur la théorie générale des surfaces“, Comptes Rendus t. XXXVII (1853), und sein „Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée“, 2. partie, Journ. de l'École polyt. 42. cahier (1867).

woraus zu ersehen ist, dass

$$\frac{A'B}{1+AB}-\frac{\bar{\mathfrak{v}}}{1+\bar{\mathfrak{u}}\bar{\mathfrak{v}}}$$

von $\bar{\mathfrak{v}}$ frei sein muss. Ebenso muss

$$\frac{AB'}{1+AB}-\frac{\bar{\mathfrak{u}}}{1+\bar{\mathfrak{u}}\bar{\mathfrak{v}}}$$

von $\bar{\mathfrak{u}}$ frei sein. Wenn wir in dem ersten Ausdruck statt $\bar{\mathfrak{u}}$ eine Constante setzen, was ja auf $B(\bar{\mathfrak{v}})$ keinen Einfluss hat, so sehen wir sofort, dass B linear gebrochen in $\bar{\mathfrak{v}}$ sein muss. Ebenso muss A linear gebrochen in $\bar{\mathfrak{u}}$ sein. Setzen wir für A und B solche linear gebrochene Functionen in die beiden Ausdrücke ein und untersuchen wir, ob die Ausdrücke dann wirklich von $\bar{\mathfrak{v}}$ bez. $\bar{\mathfrak{u}}$ frei werden, so finden wir ohne Mühe, dass A und B die Formen haben müssen:

$$A=\frac{a\bar{\mathfrak{u}}+b}{c\bar{\mathfrak{u}}+d},\quad B=\frac{d\bar{\mathfrak{v}}-c}{a-b\bar{\mathfrak{v}}},$$

wo a, b, c, d irgend welche Constanten bedeuten. Also werden:

$$\mathfrak{u}=\frac{a\bar{\mathfrak{u}}+b}{c\bar{\mathfrak{u}}+d},\quad \mathfrak{v}=\frac{d\bar{\mathfrak{v}}-c}{a-b\bar{\mathfrak{v}}} \tag{8}$$

die Gleichungen der Verbiegung sein müssen. Aber dies lässt sich ganz erheblich vereinfachen. Nach den Formeln (4), S. 247, sind nämlich die Richtungscosinus X, Y, Z der Normale der Fläche (6):

$$X=\frac{\mathfrak{u}+\mathfrak{v}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v}+1},\quad Y=-i\,\frac{\mathfrak{u}-\mathfrak{v}}{\mathfrak{u}\mathfrak{v}+1},\quad Z=\frac{\mathfrak{u}\mathfrak{v}-1}{\mathfrak{u}\mathfrak{v}+1}. \tag{9}$$

Analog sind

$$\bar{X}=\frac{\bar{\mathfrak{u}}+\bar{\mathfrak{v}}}{\bar{\mathfrak{u}}\bar{\mathfrak{v}}+1},\quad \bar{Y}=-i\,\frac{\bar{\mathfrak{u}}-\bar{\mathfrak{v}}}{\bar{\mathfrak{u}}\bar{\mathfrak{v}}+1},\quad \bar{Z}=\frac{\bar{\mathfrak{u}}\bar{\mathfrak{v}}-1}{\bar{\mathfrak{u}}\bar{\mathfrak{v}}+1} \tag{10}$$

die der Normale der fraglichen zweiten Minimalfläche. Setzen wir hierin die Werte (8) ein, so finden wir:

$$X=\frac{(a^2-c^2-b^2+d^2)\bar{X}+i(a^2-c^2+b^2-d^2)\bar{Y}+2(cd-ab)\bar{Z}}{2(ad-bc)},$$

$$Y=\frac{-i(a^2+c^2-b^2-d^2)\bar{X}+(a^2+c^2+b^2+d^2)\bar{Y}+2i(cd+ab)\bar{Z}}{2(ad-bc)},$$

$$Z=\frac{2(bd-ac)\bar{X}-2i(bd+ac)\bar{Y}+2(ad+bc)\bar{Z}}{2(ad-bc)},$$

sodass sich X, Y, Z linear und homogen durch $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ ausdrücken. Die rechts auftretenden neun Coefficienten von $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ erfüllen nun die Bedingungen I (C) oder I (D) und I (F) für die Cosinus der Winkel, die drei zu einander senkrechte und wie die Coordinatenaxen orientierte Richtungen mit den Coordinatenaxen bilden. Hieraus folgt: Wir können die fragliche zweite Minimalfläche, starr gedacht, in eine solche Lage mittels einer Bewegung überführen, dass direct $X=\bar{X}$, $Y=\bar{Y}$, $Z=\bar{Z}$ wird, d. h. *dass entsprechende Punkte beider Flächen parallele und zwar auch dem Sinne nach parallele Normalen haben.*

Man hätte dies voraussehen können: Wenn wir nämlich die gegebene Minimalfläche sphärisch abbilden, so ist die Abbildung nach Satz 108, S. 242, conform. Nach der Definition des Krümmungsmaasses K auf S. 212 wird dabei jedes unendlich kleine Flächenstück der Minimalfläche in einem solchen Maassstab ähnlich abgebildet, dass der Inhalt der Bildfläche zum Inhalt der Originalfläche im Verhältnis von K zu Eins steht. Ist nun die Minimalfläche auf eine andere Minimalfläche verbiegbar, so hat diese zweite Fläche an der entsprechenden Stelle nach Satz 6 dasselbe Krümmungsmaass K. D. h. zwei einander entsprechende Flächenelemente beider Flächen werden bei der sphärischen Abbildung im selben Maassstab ähnlich vergrössert oder verkleinert. Da nun die Verbiegung eine im Unendlichkleinen congruente Abbildung ist, so folgt, dass zwei einander entsprechende (congruente) unendlich kleine Stücke beider Flächen auch congruente sphärische Bilder haben. Hieraus kann man dann schliessen, dass auch zwei bei der Verbiegung mit einander zur Deckung zu bringende endliche Stücke beider Minimalflächen congruente sphärische Bilder haben. Aber zwei congruente Figuren auf der Bildkugel lassen sich durch Drehen der einen auf der Kugel mit einander zur Deckung bringen. Oder auch: Man kann die zweite, starr gedachte, Fläche in eine solche Lage bringen, dass ihr sphärisches Bild direct mit dem der ersten Fläche übereinstimmt.

Wir haben jedoch diese nicht ganz streng durchgeführte Infinitesimalbetrachtung durch die obigen exacten analytischen Schlüsse ersetzt und können nun annehmen, dass $X = \overline{X}$, $Y = \overline{Y}$, $Z = \overline{Z}$ ist, d. h. dass nach (9) und (10) einfach:

$$\mathfrak{u} = \overline{\mathfrak{u}}, \quad \mathfrak{v} = \overline{\mathfrak{v}}$$

ist. Jetzt lautet die Bedingung (7) so:

$$U(\mathfrak{u})\,V(\mathfrak{v}) = \overline{U}(\mathfrak{u})\,\overline{V}(\mathfrak{v}).$$

Sie wird in allgemeinster Weise durch die Annahme:

$$\overline{U}(\mathfrak{u}) = c\,U(\mathfrak{u}), \quad \overline{V}(\mathfrak{v}) = \frac{1}{c}\,V(\mathfrak{v})$$

befriedigt, wobei c eine willkürliche Constante bedeutet.

Vertauschen wir $\mathfrak{u}$ mit $\mathfrak{v}$, so ergiebt sich:

$$\mathfrak{u} = \overline{\mathfrak{v}}, \quad \mathfrak{v} = \overline{\mathfrak{u}}$$

und

$$\overline{U}(\mathfrak{u}) = c\,V(\mathfrak{u}), \quad \overline{V}(\mathfrak{v}) = \frac{1}{c}\,U(\mathfrak{v}).$$

In diesem Fall ist nach (9) und (10) zwar $X = \overline{X}$ und $Z = \overline{Z}$, aber $Y = -\overline{Y}$, d. h. alsdann liegen die sphärischen Bilder entsprechender Punkte beider Flächen symmetrisch zur xz-Ebene. In diesem Fall sind die sphärischen Bilder nicht congruent, sondern symmetrisch. Über diese Möglichkeit sind wir bei der obigen synthetischen Ableitung absichtlich stillschweigend hinweggegangen, um nicht Verwirrung hineinzubringen. Wir haben gefunden:

Satz 9: Sind zwei Minimalflächen auf einander verbiegbar, so kann man sie immer in eine solche gegenseitige Lage bringen, dass die sphärischen Bilder entsprechender Stellen beider Flächen

zusammenfallen oder symmetrisch auf beiden Seiten einer Ebene durch die Kugelmitte liegen. Sind

$$x = \frac{1}{2}\int(1-\mathfrak{u}^2)U(\mathfrak{u})\,d\mathfrak{u} + \frac{1}{2}\int(1-\mathfrak{v}^2)V(\mathfrak{v})\,d\mathfrak{v},$$

$$y = \frac{i}{2}\int(1+\mathfrak{u}^2)U(\mathfrak{u})\,d\mathfrak{u} - \frac{i}{2}\int(1+\mathfrak{v}^2)V(\mathfrak{v})\,d\mathfrak{v},$$

$$z = \int\mathfrak{u}\,U(\mathfrak{u})\,d\mathfrak{u} + \int\mathfrak{v}\,U(\mathfrak{v})\,d\mathfrak{v}$$

die Gleichungen der einen Fläche, so erhält man dadurch, dass man U und V durch

$$c\,U(\mathfrak{u}) \quad \text{und} \quad \frac{1}{c}V(\mathfrak{v})$$

oder durch

$$c\,V(\mathfrak{u}) \quad \text{und} \quad \frac{1}{c}U(\mathfrak{v})$$

ersetzt, alle Flächen der einen oder anderen Art. Dabei ist c eine willkürliche Constante. Entsprechende Punkte der Flächen haben parallele Normalen.

Der zweite Fall kann durch folgende Überlegung aus dem ersten abgeleitet werden: Wenn zwei Flächen auf einander verbiegbar sind, so gilt dies auch, wenn man die eine Fläche durch ihr Spiegelbild ersetzt, das man erhält, wenn man sie z. B. an einer Coordinatenebene spiegelt, wenn man also eine der rechtwinkligen Coordinaten mit -1 multipliciert, denn dabei bleiben die Fundamentalgrössen erster Ordnung ungeändert, nach XI (A). Aber dabei ändern zwei der drei Richtungscosinus der Normalen ihr Vorzeichen, nach XI (F). Wenn wir nun auf der Fläche überall den Sinn der Parameterlinien der einen Schar mit dem entgegengesetzten vertauschen, wodurch die Fläche selbst keine Änderung erfährt, so gehen alle drei Richtungscosinus in die entgegengesetzten über, nach S. 80. Also wird jetzt schliesslich gerade ein Richtungscosinus mit dem entgegengesetzten Zeichen wie zuerst behaftet sein, und dieser Fall lag oben vor, wo wir $X = \overline{X}$, $Z = \overline{Z}$, aber $Y = -\overline{Y}$ fanden. Die Flächen der zweiten Art gehen daher aus denen der ersten Art durch Spiegelung an einer Ebene hervor.

Soll die erste Minimalfläche des Satzes 9 reell sein, so müssen $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ nach Satz 115, S. 250, conjugiert complexe Veränderliche und U und V conjugiert complexe Functionen sein. Soll auch die Fläche, bei der U und V durch

$$c\,U \quad \text{und} \quad \frac{1}{c}V$$

ersetzt werden, reell sein, so müssen also c und $1:c$ conjugiert complexe Constanten sein, d. h. der absolute Betrag von c muss gleich Eins sein. Daher ist:

$$c = e^{i\alpha},$$

wo α eine beliebige reelle Constante bedeutet.

Somit:

Satz 10: Liegt eine reelle Minimalfläche vor:

$$x = \frac{1}{2}\int (1-\mathfrak{u}^2)\,U\,d\mathfrak{u} + \frac{1}{2}\int (1-\mathfrak{v}^2)\,V\,d\mathfrak{v},$$

$$y = \frac{i}{2}\int (1+\mathfrak{u}^2)\,U\,d\mathfrak{u} - \frac{i}{2}\int (1+\mathfrak{v}^2)\,V\,d\mathfrak{v},$$

$$z = \int \mathfrak{u}\,U\,d\mathfrak{u} + \int \mathfrak{v}\,V\,d\mathfrak{v},$$

sind also $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ conjugiert complexe Veränderliche und U und V conjugiert complexe Functionen von ihnen, so gehen alle auf diese Fläche verbiegbaren Minimalflächen dadurch hervor, dass man entweder U und V durch

$$e^{i\alpha}U \quad \text{und} \quad e^{-i\alpha}V$$

ersetzt, wobei α eine beliebige reelle Constante bedeutet, oder dadurch, dass man diese letzteren Flächen noch an einer Ebene spiegelt. Auf die erste Art erhält man diejenigen Minimalflächen, deren sphärisches Bild mit dem der gegebenen Fläche zusammenfällt.

Zu einer reellen Minimalfläche giebt es hiernach, weil die Constante α willkürlich ist, unendlich viele auf sie verbiegbare und eine stetige Schar bildende Minimalflächen, und in entsprechenden Punkten haben diese Flächen parallele Normalen. Man nennt sie die **zur ursprünglichen Minimalfläche associierten Minimalflächen.**

Wählt man insbesondere die Constante α unendlich klein, so kommt man zu einer Minimalfläche, die von der ursprünglichen unendlich wenig abweicht. Indem man für α nach und nach immer neue unendlich wenig von einander abweichende Werte setzt, kommt man so zu dem Begriff einer **stetigen Verbiegung** der ursprünglichen Fläche, wobei sie in jedem Augenblick eine unendlich kleine Formänderung erleidet, ohne sich zu dehnen und ohne aufzuhören, Minimalflächen zu sein. Am besten macht man sich dies klar, wenn man etwa α als Maass der Zeit deutet, in der die Veränderung vor sich geht. Nach dem Obigen bleiben bei dieser stetigen Verbiegung die Richtungen der Flächennormalen ungeändert.

Ist α von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ gewachsen, so hat sich die Minimalfläche ergeben:

$$\bar{x} = \frac{i}{2}\int (1-\mathfrak{u}^2)\,U\,d\mathfrak{u} - \frac{i}{2}\int (1-\mathfrak{v}^2)\,V\,d\mathfrak{v},$$

$$\bar{y} = -\frac{1}{2}\int (1+\mathfrak{u}^2)\,U\,d\mathfrak{u} - \frac{1}{2}\int (1+\mathfrak{v}^2)\,V\,d\mathfrak{v},$$

$$\bar{z} = i\int \mathfrak{u}\,U\,d\mathfrak{u} - i\int \mathfrak{v}\,V\,d\mathfrak{v}.$$

Wenn wir dagegen für α irgend einen reellen Wert wählen, so erkennen wir, da

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

ist, sofort, dass die zugehörige Minimalfläche aus der im Satze 10 angegebenen und der soeben bestimmten Minimalfläche so hervorgeht: Ist (x, y, z) ein Punkt

der ersten Fläche und $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ der zugehörige, d. h. zu denselben Werten von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ gehörige Punkt der zweiten Fläche, so sind:

$$(11)\qquad \begin{cases} \xi = x\cos\alpha + \bar{x}\sin\alpha\,, \\ \eta = y\cos\alpha + \bar{y}\sin\alpha\,, \\ \zeta = z\cos\alpha + \bar{z}\sin\alpha \end{cases}$$

die rechtwinkligen Coordinaten des zugehörigen Punktes der zu beliebigem α gehörigen Minimalfläche. Kennt man die zu $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ gehörenden Flächen, so findet man also die Zwischenflächen in sehr einfacher Weise. Der Punkt (x, y, z) der ursprünglichen Fläche beschreibt bei der stetigen Verbiegung, wenn α von 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ geht, eine gewisse Curve, wobei er schliesslich in die Lage $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ gelangt. Die Gleichungen dieser Curven sind in den laufenden Coordinaten ξ, η, ζ die Gleichungen (11) mit dem Parameter α. Offenbar ist die Curve eben, denn ξ, η, ζ erfüllen die lineare Gleichung

$$\begin{vmatrix} \xi & x & \bar{x} \\ \eta & y & \bar{y} \\ \zeta & z & \bar{z} \end{vmatrix} = 0\,,$$

und da die Projectionen der Curve auf die Coordinatenebenen augenscheinlich Ellipsen sind, so ist die Curve selbst auch eine Ellipse.

Die stetige Verbiegung der Minimalfläche in die associierten Minimalflächen kann man daher in der Art bewirken, dass dabei jeder Punkt eine Ellipse beschreibt, während die Richtungen der Normalen ungeändert bleiben. Der Winkel α ist der Winkel, um den sich jedes Bogenelement der Fläche dabei dreht, doch überlassen wir dem Leser den Nachweis hierfür.

Wenden wir dies insbesondere auf den Fall der gemeinen Schraubenfläche an, die ja nach S. 242 eine Minimalfläche ist, so haben wir nach dem ersten Beispiel auf S. 251 zu setzen:

$$U = -\frac{iq}{2\,\mathfrak{u}^2}\,, \qquad V = \frac{iq}{2\,\mathfrak{v}^2}\,.$$

Alsdann ist die im Satze 10 angegebene Fläche diejenige gemeine Schraubenfläche, deren Axe die z-Axe und deren Ganghöhe gleich $2\pi q$ ist. Die dem Werte $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ entsprechende associierte Fläche gehört zu den Functionen:

$$U = \frac{q}{2\,\mathfrak{u}^2}\,, \qquad V = \frac{q}{2\,\mathfrak{v}^2}$$

und ist daher nach dem zweiten Beispiel auf S. 251 dasjenige Catenoid, dessen Axe die z-Axe und dessen Meridian in der xz-Ebene die Kettenlinie

$$x = \frac{q}{2}\left(e^{\frac{z}{q}} + e^{-\frac{z}{q}}\right), \qquad y = 0$$

ist. Die gemeine Schraubenfläche lässt sich also ohne Dehnung stetig und ohne dabei aufzuhören, eine Minimalfläche zu bleiben, so verbiegen, dass sie ein Catenoid wird, wobei die Punkte sämtlich Ellipsen beschreiben. Nach Satz 6 geht dabei eine Curve, längs

deren das Krümmungsmaass constant ist, in eine ebensolche Curve über. Nun sind diese Curven auf der Schraubenfläche offenbar die Schraubenlinien um die z-Axe und auf dem Catenoid die Breitenkreise. Erstere gehen also in letztere über. Insbesondere geht die Axe der Schraubenfläche, auf der die Krümmung am grössten ist, in den kleinsten Breitenkreis des Catenoids über, woraus man sieht, dass die Schraubenfläche das Catenoid unendlich oft nach der Verbiegung umhüllt. Da die Verbiegung winkeltreu ist, so leuchtet ferner ein, dass die orthogonalen Trajectorien der erwähnten Schraubenlinien, d. h. also die geradlinigen Erzeugenden der Schraubenfläche, in die Meridiane des Catenoids übergehen.

Die Verbiegung einer Fläche auf eine andere ist, wie wir hervorgehoben, eine besondere Art der Abbildung der einen Fläche auf die andere. Nun sprachen wir in § 11 des ersten Abschnittes von beliebigen punktweisen Abbildungen von Flächen. Die dortigen Betrachtungen waren aber insofern unvollständig, als wir damals noch nicht von conjugierten Richtungen sprachen und deshalb auch einen Satz noch nicht erwähnen konnten, der für beliebige Abbildungen gilt, ein Analogon zu dem Satze 49, S. 96, ist und hier nachgetragen werden soll, da wir ihn für den Fall der Verbiegung gebrauchen.

Wenn wir nämlich wie damals zwei Flächen Punkt für Punkt auf einander abbilden und einander entsprechenden Punkten dieselben Parameterwerte u, v beilegen, sodass etwa

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v) \tag{12}$$

die Gleichungen der einen Fläche und

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(u, v), \quad \bar{y} = \bar{\chi}(u, v), \quad \bar{z} = \bar{\psi}(u, v) \tag{13}$$

die der anderen Fläche sind, so sind zwei von einem Punkte (u, v) der ersten Fläche (12) ausgehende Fortschreitungsrichtungen ($k = dv : du$) und ($\varkappa = \delta v : \delta u$) nach Satz 36, S. 153, oder Satz 39, S. 155, zu einander conjugiert, wenn

$$L + M(k + \varkappa) + Nk\varkappa = 0 \tag{14}$$

ist, wobei L, M, N die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung auf der Fläche (12) bedeuten. Die ihnen bei der Abbildung entsprechenden Fortschreitungsrichtungen (k) und ($\varkappa$) auf der zweiten Fläche (13) sind alsdann im allgemeinen nicht zu einander conjugiert. Sie sind es vielmehr nur dann, wenn ausserdem:

$$\bar{L} + \bar{M}(k + \varkappa) + \bar{N}k\varkappa = 0 \tag{15}$$

ist, sobald $\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$ die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung auf der Fläche (13) bedeuten.

Sollen also zu k und $\varkappa$ solche Richtungen gehören, die auf beiden Flächen conjugiert sind, so müssen die beiden Bedingungen (14) und (15) erfüllt sein. In § 11 des ersten Abschnittes haben wir ein analoges Problem behandelt, nämlich das, solche zwei Werte k und $\varkappa$ zu finden, zu denen Richtungen gehören, die auf beiden Flächen zu einander senkrecht sind. An Stelle der Gleichungen (14) und (15) hatten wir damals die Gleichungen (10) auf S. 94. Ganz entsprechend wie damals können wir daher auch hier drei Fälle unterscheiden und discutieren. Nur ein Umstand ist wesentlich anders: Auf einer reellen Fläche mit reellen Parametern sind die Fundamentalgrössen erster Ordnung E und G reell positiv und ist die Fundamentalgrösse F reell. Die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung dagegen sind dann zwar auch reell, können aber beliebige Vorzeichen haben. Daher gilt die an die damalige Fig. 26, S. 95, geknüpfte Realitätsuntersuchung hier nicht.

Analog der Gleichung (13) auf S. 94 finden wir hier die quadratische Gleichung für k:

$$\begin{vmatrix} k^2 & L & \bar{L} \\ -k & M & \bar{M} \\ 1 & N & \bar{N} \end{vmatrix} = 0 \tag{16}$$

als Bedingung für die beiden Werte k und $\varkappa$, die den beiden Gleichungen (14) und (15) genügen. Beachten wir ferner, dass sich die Differentialgleichung XI (O) der Minimalcurven durch die Fundamentalgrössen **erster** Ordnung gerade so ausdrückt wie die Differentialgleichung XII (X) der Haupttangentencurven durch die Fundamentalgrössen **zweiter** Ordnung, so übersehen wir sofort, dass sich analog dem Satze 49, S. 96, hier ein Satz ergiebt, bei dem wir, da es sich um conjugierte Richtungen handelt, die abwickelbaren Flächen nach S. 154 und S. 185 von vornherein ausschliessen. Es kommt:[1]

Satz 11: Bildet man eine nicht-abwickelbare Fläche Punkt für Punkt auf eine andere nicht-abwickelbare Fläche ab, so sind drei Fälle denkbar:

Erstens: Die beiden Scharen von Haupttangentencurven der einen Fläche bilden sich als die beiden Scharen von Haupttangentencurven der anderen Fläche ab. Jedem System conjugierter Curven auf der einen Fläche ent-

[1] Dieser Satz rührt her von Peterson, „Über Curven und Flächen“, 1. Lieferung, Moskau und Leipzig 1868.

spricht dann ein ebensolches System auf der anderen Fläche.

Zweitens: Nur eine Schar von Haupttangentencurven der einen Fläche bildet sich als Schar von Haupttangentencurven der anderen Fläche ab. Ausser dieser als Ausartung eines Systems conjugierter Curven aufzufassenden Schar giebt es alsdann kein System von conjugierten Curven auf der einen Fläche, dem auf der anderen Fläche ein ebensolches System entspräche.

Drittens: Keine der beiden Scharen von Haupttangentencurven der einen Fläche bildet sich als eine Schar von Haupttangentencurven der anderen Fläche ab. Alsdann giebt es ein und nur ein System von conjugierten Curven auf der einen Fläche, dem auf der anderen Fläche ein ebensolches System entspricht.

Der letzte Fall ist natürlich der allgemeine. In ihm ist nach (16), wenn darin wieder $dv:du$ für k gesetzt wird, die Gleichung

$$\begin{vmatrix} dv^2 & L & \bar{L} \\ -du\,dv & M & \bar{M} \\ du^2 & N & \bar{N} \end{vmatrix} = 0$$

die Differentialgleichung der ausgezeichneten Systeme von conjugierten Curven auf beiden Flächen.

Ist nun die Abbildung der Fläche (12) auf die Fläche (13) insbesondere eine Verbiegung, und geht keine Schar von Haupttangentencurven der einen Fläche dabei in eine Schar von Haupttangentencurven der anderen Fläche über,[1] so giebt es nach unserem Satze ein System von conjugierten Curven auf der einen Fläche, das auch nach der Verbiegung ein solches System bleibt. Da die Verbiegung ferner conform ist, so ändern sich die Winkel nicht, unter denen die Curven des Systems einander schneiden. Auch die Bogenlängen der Curven bleiben unverändert. Nach Satz 79, S. 196, sind die unendlich kleinen Netzvierecke als eben aufzufassen. Da nun ihre Winkel und Seitenlängen bei der Verbiegung ungeändert

[1] Da wir den Fall, dass die Haupttangentencurven einer Schar solche bei der Verbiegung bleiben, hier ausschliessen, sei zur Orientierung des Lesers bemerkt, dass Bonnet gezeigt hat, dass in diesem Falle die beiden Flächen congruent oder symmetrisch sind, es sei denn, dass sie geradlinig und die einander entsprechenden Haupttangentencurven die Geraden der Flächen sind.

bleiben, so ist überhaupt jedes der Netzvierecke bei der Verbiegung als starr aufzufassen. Wir gewinnen hierdurch einen Einblick in das Wesen der Verbiegung einer Fläche, den wir so ausdrücken können:

Satz 12:[1] Eine jede Verbiegung einer Fläche, bei der keine Schar von Haupttangentencurven eine solche Schar bleibt, kann aufgefasst werden als eine Formänderung eines Polyeders von lauter einzeln starren unendlich kleinen ebenen Vierecken.

Dies Polyeder hat man sich — indem man nur ein begrenztes Stück der Fläche betrachtet — offen vorzustellen wie in Fig. 67, S. 197.

Hiernach leuchtet ein, wie ein solches Flächenmodell, das auf S. 197 beschrieben wurde, geeignet ist, einen Begriff von der Verbiegung einer Fläche zu geben: Man hat es so einzurichten, dass die einzelnen starren ebenen Vierecke des Netzes gegen einander drehbar bleiben, was sich mechanisch leicht erreichen lässt. Doch darf nicht ausser acht gelassen werden, dass dasjenige System von conjugierten Curven, das bei der Verbiegung seine Eigentümlichkeit bewahrt, sehr wohl bei reellen Flächen imaginär sein kann. Dies ist z. B. bei den Minimalflächen der Fall, denn die Minimalcurven einer Minimalfläche sind ja nach Satz 111, S. 244, zu einander conjugiert, und bei der Verbiegung einer Minimalfläche in eine Minimalfläche bleiben diese Curven — wie überhaupt — Minimalcurven und sind auch nachher conjugiert. Wenn man also zwei Minimalflächen auf einander verbiegen kann, so ist dasjenige System von conjugierten Curven der einen Fläche, dem ein ebensolches System auf der anderen entspricht, imaginär, sodass für diesen Fall kein Modell hergestellt werden kann.

Das beschriebene Modell giebt auch eine gute Vorstellung davon, was unter einer stetigen Verbiegung zu verstehen ist, da man es stetig in andere Gestalten überführen kann.

---

[1] Satz von Peterson (1868), vgl. die Anm. zu S. 286. Das Buch von Peterson hat bis in die jüngste Zeit fast keine Beachtung gefunden, sodass Ribaucour in seiner Note „Sur les systèmes cycliques“, Comptes Rendus t. CXIII (1891), das gemeinschaftliche System conjugierter Curven von neuem betrachtet hat. Es ist das Verdienst von Stäckel, durch seine beiden Abhandlungen: „Über Abbildungen“, Math. Annalen 44. Bd. (1894), und „Biegungen und conjugierte Systeme“, ebenda 49. Bd. (1897), auf die vergessenen Ergebnisse Peterson's hingewiesen zu haben.

§ 4. Verbiegung von Flächen auf Rotationsflächen.

Es kann vorkommen, dass eine Fläche auf sich selbst verbiegbar ist. Man denke sich nämlich die Fläche in zwei Exemplaren materiell hergestellt, etwa einmal aus starrem Material, das andere Mal aus einer zwar durchaus biegsamen, aber unausdehnbaren dünnen Haut. Alsdann wird diese zweite Haut natürlich so auf die erste Fläche ausgebreitet werden können, dass homologe Punkte zur Deckung kommen. Aber es ist auch denkbar, dass die unausdehnbare, aber biegsame Haut noch auf eine andere Art auf die starre Fläche vollkommen ausgebreitet werden kann, sodass nicht mehr homologe Punkte zur Deckung kommen. Ein triviales Beispiel hierzu liefert jede Rotationsfläche. Bei einer solchen darf sogar das zweite Modell auch starr sein. Es kann in unendlich vielen Lagen mit dem ersten Modell zur Deckung gebracht werden, da die Rotationsfläche durch Drehung um ihre Axe immer in sich übergeht. Ein allgemeineres, aber ebenfalls triviales Beispiel liefern die Schraubenflächen (vgl. 2. Beispiel, S. 59), die ja die Rotationsflächen umfassen, da jede Drehung eine specielle Schraubung ist. Jede Schraubenfläche geht, wenn man sie derjenigen stetigen Schraubung unterwirft, durch die sie aus einer starren Curve erzeugt worden ist, beständig in sich über.

Wir wollen uns nun fragen, welche Flächen stetig in sich selbst verbogen werden können. Diese Frage deckt sich mit der Frage: Welche Flächen können in der Art unendlich wenig verbogen werden, dass die neue Fläche mit der ursprünglichen congruent ist? Denn wenn eine Fläche eine solche unendlich kleine Verbiegung erlaubt, bei der sie wieder die alte Gestalt annimmt, so braucht man nur diese unendlich kleine Verbiegung beständig zu wiederholen, um dazu zu gelangen, die Fläche stetig in sich zu verbiegen.

Es seien wieder wie auf S. 278 die Parameterlinien ($\mathfrak{u}$) und ($\mathfrak{v}$) die Minimalcurven der Fläche. Da sie zwei getrennte Scharen bilden, nach Satz 16, S. 36, — denn von den Tangentenflächen der Minimalcurven sehen wir ja ab —, und da andererseits jede Minimalcurve nach dem Früheren bei Verbiegung wieder in eine Minimalcurve übergeht, so kann eine Curve ($\mathfrak{u}$) bei unendlich kleiner Verbiegung nur in eine unendlich benachbarte Curve derselben Schar übergehen. Dasselbe gilt von jeder Curve ($\mathfrak{v}$). Es möge daher die Curve ($\mathfrak{u}$) in die unendlich benachbarte Curve mit dem Parameter

$$\mathfrak{u} + \varphi(\mathfrak{u})\,\varepsilon$$

und die Curve ($\mathfrak{v}$) in die unendlich benachbarte Curve mit dem Parameter

$$\mathfrak{v} + \psi(\mathfrak{v})\,\varepsilon$$

übergehen, wobei ε auf der ganzen Fläche ein und dieselbe unendlich kleine Grösse bedeute. Wenn wir jetzt bedenken, dass das System der Parameterlinien nicht geändert wird, sobald wir eine Function von $\mathfrak{u}$ als neuen Parameter $\mathfrak{u}$ und eine Function von $\mathfrak{v}$ als neuen Parameter $\mathfrak{v}$ einführen, so können wir die Voraussetzungen noch etwas vereinfachen. Wenn sich nämlich $\mathfrak{u}$ in $\mathfrak{u} + \varphi(\mathfrak{u})\varepsilon$ verwandelt, so geht eine beliebige Function U von $\mathfrak{u}$ über in

$$U(\mathfrak{u} + \varphi(\mathfrak{u})\varepsilon) = U(\mathfrak{u}) + U'(\mathfrak{u}) \cdot \varphi(\mathfrak{u})\varepsilon,$$

da ε unendlich klein ist. Wählen wir also, wenn $\varphi \neq 0$ ist:

$$U = \int \frac{d\mathfrak{u}}{\varphi(\mathfrak{u})},$$

so ändert sich U gerade um ε. Ebenso ändert sich, wenn $\psi \neq 0$ ist,

$$V = \int \frac{d\mathfrak{v}}{\psi(\mathfrak{v})}$$

gerade um ε. Wenn wir nun diese Functionen U und V als neue Parameter benutzen, so sehen wir im Falle $\varphi \neq 0$, $\psi \neq 0$:

Wir können voraussetzen, dass auf der gesuchten Fläche solche Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ vorhanden seien, dass erstens die Curven ($\mathfrak{u}$) und ($\mathfrak{v}$) die Minimalcurven der Fläche sind und dass zweitens jede Curve ($\mathfrak{u}$) bez. ($\mathfrak{v}$) bei der unendlich kleinen Verbiegung in die unendlich benachbarte Curve ($\mathfrak{u} + \varepsilon$) bez. ($\mathfrak{v} + \varepsilon$) übergeht. Ist jetzt, wie auf S. 278:

$$ds^2 = 2F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})\,d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v}$$

das Quadrat des Bogenelementes der Fläche, so ist zu fordern, dass es ungeändert bleibe, wenn für $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ die Werte $\mathfrak{u} + \varepsilon$ und $\mathfrak{v} + \varepsilon$ gesetzt werden. Da $d(\mathfrak{u} + \varepsilon) = d\mathfrak{u}$ und $d(\mathfrak{v} + \varepsilon) = d\mathfrak{v}$ ist, so ist nur das Eine zu fordern:

$$F(\mathfrak{u} + \varepsilon, \mathfrak{v} + \varepsilon) = F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$$

oder, wenn wir nach Potenzen von ε entwickeln:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{u}}\varepsilon + \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{v}}\varepsilon + \ldots = 0.$$

Die angedeuteten Glieder sind von höherer Ordnung in ε. Einmal lässt sich ε absondern, sodass sich schliesslich ergiebt:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{u}} + \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{v}} = 0.$$

Dies ist leicht anders auszusprechen. Wenn wir nämlich für den Augenblick

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{u} - \mathfrak{v}, \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{u}$$

als Veränderliche in F einführen, so ist:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{u}} = \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{x}} + \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{y}}, \quad \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{v}} = - \frac{\partial F}{\partial \mathfrak{x}},$$

sodass die Forderung zurückkommt auf:

$$\frac{\partial F}{\partial \mathfrak{y}} = 0.$$

Also enthält F nur $\mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{u} - \mathfrak{v}$.

Im Fall $\varphi = 0$ ergiebt sich, dass F nur von $\mathfrak{u}$ abhängt, sodass das Krümmungsmaass nach (10), S. 270, gleich Null, die Fläche also nach Satz 90, S. 214, abwickelbar ist. Ebenso im Falle $\psi = 0$. Daher:

Satz 13: Ist es möglich, eine nicht-abwickelbare Fläche unendlich wenig in sich selbst zu verbiegen, so lassen sich solche Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ auf der Fläche einführen, dass das Quadrat ihres Bogenelementes die Form annimmt:

$$ds^2 = 2F(\mathfrak{u} - \mathfrak{v})\, d\mathfrak{u}\, d\mathfrak{v}.$$

Umgekehrt: Jede Fläche mit diesem Bogenelement-Quadrat lässt sich stetig in sich derart verbiegen, dass dabei die Parameter $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ eines beliebigen Flächenpunktes Schritt für Schritt um eine unendlich kleine Grösse ε wachsen, die überall auf der Fläche denselben Wert hat.

Dass diese Fläche jetzt jede solche endliche Verbiegung erlaubt, bei der der Punkt $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ in den Punkt $(\bar{\mathfrak{u}}, \bar{\mathfrak{v}})$ mit

$$\bar{\mathfrak{u}} = \mathfrak{u} + a, \quad \bar{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v} + a$$

übergeht, wo a eine beliebige Constante ist, sieht man sofort daran, dass $d\bar{\mathfrak{u}} = d\mathfrak{u}$, $d\bar{\mathfrak{v}} = d\mathfrak{v}$ und $F(\bar{\mathfrak{u}} - \bar{\mathfrak{v}}) = F(\mathfrak{u} - \mathfrak{v})$ ist.

Insbesondere gehören die Rotationsflächen zu diesen Flächen. Dies wollen wir bestätigen. Auf der Rotationsfläche (vgl. S. 41):

$$(1) \qquad x = p(u)\cos v, \quad y = p(u)\sin v, \quad z = q(u)$$

bedeute u die Bogenlänge des Meridians, sodass

$$ds^2 = du^2 + p^2(u)\, dv^2$$

oder:

$$ds = p^2(u)\left(\frac{du}{p(u)} + i\,dv\right)\left(\frac{du}{p(u)} - i\,dv\right)$$

ist. Wenn wir daher neue Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ einführen, indem wir setzen:

$$2\mathfrak{u} = \int \frac{du}{p(u)} + iv,$$

$$2\mathfrak{v} = -\int \frac{du}{p(u)} + iv,$$

so kommt:

(2) $$ds^2 = -\,4p^2 d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v}.$$

Dabei ist:

(3) $$\int \frac{du}{p(u)} = \mathfrak{u} - \mathfrak{v},$$

also u eine Function von $\mathfrak{u} - \mathfrak{v}$ allein und mithin $p^2(u)$ auch eine Function von $\mathfrak{u} - \mathfrak{v}$ allein, sodass das Bogenelement-Quadrat (2) thatsächlich die in unserem Satze angegebene charakteristische Form hat.

Aber noch mehr: Liegt irgend eine nicht-abwickelbare Fläche vor, die stetig in sich verbiegbar ist und deren Bogenelement-Quadrat also auf die Form gebracht werden kann:

(4) $$ds^2 = 2F(\mathfrak{u} - \mathfrak{v})\,d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v},$$

wobei F irgend eine Function von $\mathfrak{u} - \mathfrak{v}$ allein bezeichnet, so können wir stets eine Rotationsfläche mit genau demselben Quadrat des Bogenelementes bestimmen. Denn nach (2) und (4) ist zu fordern:

$$-\,2p^2(u) = F(\mathfrak{u} - \mathfrak{v})$$

oder, wenn $\mathfrak{u} - \mathfrak{v}$ mit w bezeichnet wird:

(5) $$-\,2p^2(u) = F(w),$$

während nach (3)

(6) $$\frac{1}{p(u)} = \frac{dw}{du}$$

sein soll. Hierin ist $F(w)$ gegeben, $p(u)$ gesucht. Die Gleichung (5) liefert:

$$-\,4p(u)p'(u) = F'(w)\frac{dw}{du}$$

oder, wenn (6) benutzt wird:

(7) $$-\,4p^2(u)p'(u) = F'(w).$$

Die beiden Forderungen (5) und (6) sind jetzt ersetzbar durch (5) und (7). Eliminieren wir aus diesen beiden w, was ja, da $F(w)$ eine gegebene Function von w ist, theoretisch möglich ist, so ergiebt sich eine Gleichung zwischen $p(u)$ und $p'(u)$, etwa:

$$p'(u) = \Omega(p(u)).$$

Hieraus berechnen wir dann:

$$\int \frac{dp}{\Omega(p)} = u.$$

Eine additive Integrationsconstante spielt hier keine wesentliche Rolle, da wir die Bogenlänge u von irgend einer Stelle an rechnen können. Ist die Quadratur links ausgeführt, so lässt sich durch Auflösen der hervorgehenden Gleichung nach p diese Function p von u berechnen. Wir setzen sie alsdann in (5) ein und erlangen so eine Gleichung zwischen u und w, aus der sich — theoretisch — u als Function von w berechnen lässt. Überdies bestimmt man $q(u)$ aus der Forderung, dass u die Bogenlänge des Meridians sein soll, also aus:

$$p'^2 + q'^2 = 1,$$

sodass kommt:

$$q = \int \sqrt{1 - p'^2}\, du.$$

Die bei dieser Quadratur auftretende additive Constante hat keine wesentliche Bedeutung; sie rührt daher, dass die Rotationsfläche längs ihrer Drehaxe, der z-Axe, verschoben werden kann.

Wir haben also gefunden, dass es thatsächlich eine Rotationsfläche mit dem vorgeschriebenen Bogenelement-Quadrat giebt, woraus folgt:

Satz 14: Eine Fläche lässt sich dann und nur dann stetig in sich verbiegen, wenn sie auf eine Rotationsfläche verbiegbar ist.

Denn die Umkehrung leuchtet ein: Ist die Fläche auf eine Rotationsfläche verbiegbar, so giebt jede Drehung der Rotationsfläche um ihre Axe eine solche Verbiegung der Fläche, bei der sie in sich übergeht. Dass der Satz auch für jede abwickelbare Fläche gilt, ist klar.

Da insbesondere die Schraubenflächen in sich verschraubbar sind, so gehören sie zu den betrachteten Flächen, sodass sich ergiebt:

Satz 15:[1] Jede Schraubenfläche ist auf eine Rotationsfläche verbiegbar.

---

[1] Dieser Satz wird öfters als das Theorem von Bour bezeichnet, vgl. die Anm. zu S. 273.

Beispiel: Wir haben schon auf S. 284 gesehen, dass sich die gemeine Schraubenfläche auf ein Catenoid verbiegen lässt.

Wenn man beachtet, dass das Quadrat (4) des Bogenelementes einer Fläche, die stetig in sich verbogen werden kann, seine Form nicht wesentlich ändert, sobald man statt $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ dieselben constanten Vielfachen $a\mathfrak{u}$ und $a\mathfrak{v}$ als Parameter einführt, weil dann an die Stelle von $\mathfrak{u} - \mathfrak{v}$ ein constantes Vielfaches von $\mathfrak{u} - \mathfrak{v}$ tritt, also F nach wie vor eine Function von $\mathfrak{u} - \mathfrak{v}$ bleibt, so erhellt, dass wir nicht nur *eine* Rotationsfläche (1) bestimmen können, auf die sich die Fläche verbiegen lässt, sondern ∞^1 solche Flächen. Und da zwei Flächen, die auf eine dritte verbiegbar sind, auch auf einander verbogen werden können, so schliessen wir hieraus, dass jede Rotationsfläche auf ∞^1 Rotationsflächen verbiegbar sein wird. Wir wollen dies jetzt direct bestätigen.

Wir behandeln also die *Frage nach allen Rotationsflächen, die auf eine gegebene Rotationsfläche verbiegbar sind.* Auf einer Rotationsfläche sind die Breitenkreise diejenigen Curven, längs deren das Krümmungsmaass constant ist. *Wenn daher auf den jetzt betrachteten Rotationsflächen das Krümmungsmaass nicht überhaupt constant ist — wovon wir vorerst absehen,* — so folgt aus Satz 7, S. 275, dass zwei Rotationsflächen nur so auf einander verbiegbar sind, dass jeder Breitenkreis der einen in einen Breitenkreis der anderen übergeht. Da ferner die Verbiegung eine winkeltreue Abbildung ist, so müssen die orthogonalen Trajectorien der Breitenkreise der einen Fläche in die orthogonalen Trajectorien der Breitenkreise der anderen Fläche übergehen, d. h. Meridian geht in Meridian über. Nun sind bei der Rotationsfläche

$$x = p(u)\cos v, \quad y = p(u)\sin v, \quad z = q(u) \tag{8}$$

die Parametercurven (u) und (v) die Breitenkreise und Meridiane. Soll die Fläche auf die Rotationsfläche:

$$\bar{x} = \bar{p}(\bar{u})\cos\bar{v}, \quad \bar{y} = \bar{p}(\bar{u})\sin\bar{v}, \quad \bar{z} = \bar{q}(\bar{u}) \tag{9}$$

verbiegbar sein, so muss also $\bar{u}$ eine Function von u allein und $\bar{v}$ eine Function von v allein sein. Insbesondere setzen wir wieder voraus, dass u bez. $\bar{u}$ die Bogenlängen auf den Meridianen bedeuten, sodass die Quadrate der Bogenelemente die Ausdrücke haben:

$$ds^2 = du^2 + p^2 dv^2, \quad d\bar{s}^2 = d\bar{u}^2 + \bar{p}^2 d\bar{v}^2.$$

Wir haben daher zu verlangen, dass $\bar{u}$ eine solche Function von u und $\bar{v}$ eine solche Function von v sei, dass:

$$du^2 = d\bar{u}^2, \quad p^2 dv^2 = \bar{p}^2 d\bar{v}^2$$

wird. Also ist zunächst

$$\bar{u} = \pm u + \text{Const.}$$

zu setzen. Nun können wir aber dies vereinfachen: Wir rechnen die Bogenlänge von zwei solchen Breitenkreisen aus, die einander bei der Verbiegung entsprechen, und zwar überdies in entsprechendem Sinne. Alsdann dürfen wir

$$\bar{u} = u$$

setzen. Jetzt bleibt die Bedingung:

$$\frac{p^2(u)}{\bar{p}^2(u)} = \frac{d\bar{v}^2}{dv^2},$$

die links nur u, rechts nur v enthält, weil $\bar{v}$ eine Function von v sein soll. Also sind beide Seiten der Gleichung Constanten. Daher kommt:

$$\bar{p}(u) = a\,p(u), \quad \frac{d\bar{v}}{dv} = \pm\frac{1}{a} \qquad (a = \text{Const.}),$$

woraus noch folgt:

$$\bar{v} = \pm\frac{v}{a} + \text{Const.}$$

Aber wenn $\bar{v}$ um eine Constante wächst, so heisst dies nur, dass die Fläche um ihre Axe gedreht wird, wobei sie in sich übergeht. Wenn $\bar{v}$ durch $-\bar{v}$ ersetzt wird, so heisst dies, dass die Fläche an der xz-Ebene gespiegelt wird, wodurch sie ebenfalls in sich übergeht. Wir können daher einfacher setzen:

$$\bar{v} = \frac{v}{a}.$$

Jetzt ist noch $\bar{q}$ zu bestimmen. Da u die Bogenlänge bedeuten soll, so muss:

$$\bar{p}'^2 + \bar{q}'^2 = 1, \quad \text{also} \quad \bar{q} = \int\sqrt{1 - a^2 p'^2}\,du$$

sein. Demnach sind:

$$(10) \qquad x = a\,p(u)\cos\frac{v}{a}, \quad y = a\,p(u)\sin\frac{v}{a}, \quad z = \int\sqrt{1 - a^2 p'^2}\,du$$

die Gleichungen der gesuchten Fläche (9).

Durchläuft a stetig die Werte von Eins an, so erhalten wir eine stetige Schar von Rotationsflächen (10), die auf die Fläche (8), die sich aus (10) für $a = 1$ ergiebt, verbiegbar sind. Der Übergang

von einer Rotationsfläche zu einer auf sie verbiegbaren Rotationsfläche kann also durch eine solche stetige Verbiegung erzielt werden, bei der die Fläche beständig Rotationsfläche bleibt.

Die in der xz-Ebene gelegene Meridiancurve der Fläche (10):

$$x = a p(u), \quad y = 0, \quad z = \int \sqrt{1 - a^2 p'^2}\, du$$

hat die Eigentümlichkeit, dass das Product, das man aus der Normalen n ihres Punktes (u) — gemessen bis zur z-Axe — und aus dem Krümmungsradius r dieses Punktes von der Constanten a frei ist, wie aus Satz 7, S. 275, und aus Satz 13, S. 122, sofort folgt und auch direct nachgewiesen werden kann, da dies Product nach I S. 98 den Wert

$$n r = -\frac{x}{\frac{d^2 x}{d u^2}} = -\frac{p(u)}{p''(u)}$$

hat. Wir hätten die Meridiancurven der gesuchten Flächen auch auf Grund dieser Eigenschaft bestimmen können.

Wir sahen von den Rotationsflächen constanter Krümmung ab, da auf ihnen die Breitenkreise nicht die einzigen Curven mit constanter Flächenkrümmung sind, also auch nicht von vornherein feststeht, dass jeder Breitenkreis in einen Breitenkreis übergeht. Auf diese Flächen kommen wir im nächsten Paragraphen zurück.

Wir haben gefunden:

Satz 16:[1] Liegt eine Rotationsfläche

$$x = p(u) \cos v, \quad y = p(u) \sin v, \quad z = \int \sqrt{1 - p'^2(u)}\, du$$

vor, die keine constante Krümmung hat, so werden alle Rotationsflächen, die auf diese Fläche verbiegbar sind, durch die Gleichungen:

$$x = a p(u) \cos \frac{v}{a}, \quad y = a p(u) \sin \frac{v}{a}, \quad z = \int \sqrt{1 - a^2 p'(u)^2}\, du$$

gegeben. Dabei bedeutet a eine willkürliche Constante. Die Verbiegung wird in allgemeinster Weise dadurch bewirkt, dass man zunächst die Stellen mit gleichen Para-

[1] Satz von Minding, „Über die Biegung gewisser Flächen“, Journ. f. d. r. u. ang Math. 18. Bd. (1838).

meterwerten u, v mit einander zur Deckung bringt, worauf die eine Fläche noch in sich gedreht oder an einer Meridianebene gespiegelt werden kann. Dabei gehen Breitenkreise in Breitenkreise und Meridiane in Meridiane über.

§ 5. Verbiegung von Flächen constanter Krümmung.

Wir haben im vorigen Paragraphen bei der Betrachtung der Verbiegung von Rotationsflächen ausdrücklich von den Rotationsflächen constanter Krümmung abgesehen, von jenen Flächen also, deren typische Formen wir schon früher untersucht haben, vgl. das Beispiel auf S. 214. Der Grund für diese Ausschliessung ist der, dass die Flächen constanter Krümmung überhaupt in Bezug auf die Verbiegung eine Ausnahmestellung einnehmen.

Um dies zu zeigen, wollen wir zuerst untersuchen, auf welche Form sich das Quadrat des Bogenelementes einer jeden Fläche constanter Krümmung K bringen lässt. Sind die Parameterlinien ($\mathfrak{u}$) und ($\mathfrak{v}$) wieder die Minimalcurven der Fläche, wie auf S. 278, sodass das Quadrat des Bogenelementes die Form hat:

$$ds^2 = 2F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})\,d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v}, \tag{1}$$

so wird die Fundamentalgleichung (10) auf S. 270 zur dritten Gleichung (6) auf S. 268 oder also, da wir $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ statt u und v schreiben, zur Gleichung:

$$\frac{LN - M^2}{-F^2} = -\frac{1}{F}\,\frac{\partial^2 \log F}{\partial \mathfrak{u}\,\partial \mathfrak{v}}.$$

Hierin ist die linke Seite, da $E = G = 0$ ist, das Krümmungsmaass K, nach Satz 89, S. 214, sodass wir haben:

$$\frac{1}{F}\,\frac{\partial^2 \log F}{\partial \mathfrak{u}\,\partial \mathfrak{v}} = -K, \tag{2}$$

wo jetzt die rechte Seite nach Voraussetzung eine Constante ist.

Die Gleichung (2) ist eine Bedingungsgleichung für die einzige in (1) auftretende Function F, und die Frage ist, was für eine Gestalt sie der Function F vorschreibt. Die Gleichung (2) ist, weil sie von der unbekannten Function F von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ einen zweiten partiellen Differentialquotienten enthält, eine sogenannte partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung für F.[1] Aber wir

[1] Diese partielle Differentialgleichung hat zuerst Liouville (1850) in der ersten der beiden auf S. 278, Anm., genannten Noten allgemein integriert. Dort

können doch die Function F aus ihr bestimmen, ohne die Theorie derartiger Gleichungen dazu heranzuziehen, und zwar beruht dies darauf, dass es gelingt, zunächst den Ausdruck:

$$\lambda = \frac{\partial \log F}{\partial \mathfrak{u}} \tag{3}$$

zu bestimmen.

In der That lässt sich ja (2) so schreiben:

$$\lambda_{\mathfrak{v}} = -KF, \tag{4}$$

sodass, da K eine Constante ist,

$$\lambda_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}} = -KF_{\mathfrak{u}} = -KF \cdot \frac{F_{\mathfrak{u}}}{F} = -KF\frac{\partial \log F}{\partial \mathfrak{u}}$$

oder also nach (3) und (4):

$$\lambda_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}} = \lambda_{\mathfrak{v}}\lambda$$

ist. Hierfür aber können wir schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial \mathfrak{v}}(\lambda_{\mathfrak{u}} - \tfrac{1}{2}\lambda^2) = 0.$$

Also muss $\lambda_{\mathfrak{u}} - \frac{1}{2}\lambda^2$ eine Function von $\mathfrak{u}$ allein sein. Bezeichnen wir sie für den Augenblick mit $\omega(\mathfrak{u})$, so kommt:

$$\lambda_{\mathfrak{u}} = \tfrac{1}{2}\lambda^2 + \omega(\mathfrak{u}). \tag{5}$$

Wohlbemerkt ist λ eine Function von $\mathfrak{u}$ und von $\mathfrak{v}$. Da aber $\omega(\mathfrak{u})$ nur von $\mathfrak{u}$ abhängt, so giebt es Functionen σ von $\mathfrak{u}$ allein, für die ganz analog:

$$\frac{d\sigma}{d\mathfrak{u}} = \tfrac{1}{2}\sigma^2 + \omega(\mathfrak{u}) \tag{6}$$

ist. Denn dies ist ja eine Riccati'sche Gleichung für die Function σ von $\mathfrak{u}$ (vgl. I S. 213, 214). Wir brauchen aber diese Gleichung gar nicht zu integrieren, denn $\omega(\mathfrak{u})$ bezeichnete uns irgend eine Function von $\mathfrak{u}$, die vorläufig keiner besonderen Beschränkung unterworfen ist. Wenn wir also unter $\sigma(\mathfrak{u})$ irgend eine Function von $\mathfrak{u}$ allein verstehen, so können wir uns umgekehrt $\omega(\mathfrak{u})$ durch (6) definiert denken.

---

behandelt er gerade unser gegenwärtiges Problem. Vgl. auch seine Arbeit: „Sur l'équation aux différences partielles

$$\frac{d^2 \log \lambda}{du\,dv} \pm \frac{\lambda}{2a^2} = 0\text{“},$$

Comptes Rendus, t. XXXVI (1853), oder Journ. de Math. p. et app., 1. série, t. XVIII (1858). Wir folgen im Texte seiner Methode.

Alsdann folgt aus (5) und (6)

$$\lambda_{\mathfrak{u}} - \sigma' = \tfrac{1}{2}(\lambda^2 - \sigma^2) = \tfrac{1}{2}(\lambda - \sigma)(\lambda + \sigma). \tag{7}$$

Hier haben wir σ' statt $d\sigma : d\mathfrak{u}$ geschrieben, weil σ nur von $\mathfrak{u}$ abhängt und daher σ' nur den Differentialquotienten nach $\mathfrak{u}$ bedeuten kann.

Jetzt liegt es nahe, zu versuchen, zunächst $\lambda - \sigma$ anstatt λ selbst zu bestimmen. Wir setzen daher:

$$\mu = \lambda - \sigma \tag{8}$$

und finden aus (7)

$$\mu_{\mathfrak{u}} = \tfrac{1}{2}\mu(\mu + 2\sigma)$$

oder:

$$\frac{\mu_{\mathfrak{u}}}{\mu^2} = \tfrac{1}{2} + \frac{\sigma}{\mu}$$

oder auch:

$$-\frac{\partial \frac{1}{\mu}}{\partial \mathfrak{u}} = \tfrac{1}{2} + \sigma \cdot \frac{1}{\mu}.$$

Dies aber ist eine Bedingung für die Function:

$$\nu = \frac{1}{\mu}, \tag{9}$$

nämlich diese:

$$\nu_{\mathfrak{u}} = -\tfrac{1}{2} - \sigma\nu. \tag{10}$$

Wäre uns ν bekannt, so würde uns (9) auch μ und darauf (8) auch λ geben, denn hiernach ist ja:

$$\lambda = \frac{1}{\nu} + \sigma. \tag{11}$$

Mithin wird es darauf ankommen, die Form der Function $\nu(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ aus (10) abzuleiten.

Zu diesem Zweck machen wir wieder von dem Umstand Gebrauch, dass σ irgend eine Function von $\mathfrak{u}$ bedeutet. Wir können also statt σ eine Function τ von $\mathfrak{u}$ allein vorlegen und

$$\sigma = -\frac{\tau'}{\tau} \tag{12}$$

setzen, und zwar thun wir dies, weil dann die Gleichung (10) eine bequemere Form annimmt, nämlich diese:

$$\nu_{\mathfrak{u}} - \frac{\tau'}{\tau}\nu = -\frac{1}{2}$$

oder:

$$\frac{\tau \nu_{u} - \tau' \nu}{\tau^2} = -\frac{1}{2\tau}. \tag{13}$$

Links steht jetzt der partielle Differentialquotient von $\nu : \tau$ nach u. Wir würden diese Gleichung daher auswerten können, wenn auch rechts ein partieller Differentialquotient nach u stände. Dies aber erreichen wir, wenn wir abermals eine neue Function U von u allein statt τ einführen, indem wir setzen:

$$\frac{1}{\tau} = 2U'. \tag{14}$$

Dann ist $\nu : \tau = 2U'\nu$, sodass (13) giebt:

$$\frac{\partial}{\partial u}(2U'\nu) = -U',$$

woraus folgt, dass $2U'\nu + U$ eine Function von v allein sein muss. Wird diese Function mit $-V$ bezeichnet, so haben wir nun:

$$\nu = -\frac{U+V}{2U'}. \tag{15}$$

Wegen (12) und (14) ist aber jetzt:

$$\sigma = \frac{U''}{U'},$$

also nach (15) und (11):

$$\lambda = -\frac{2U'}{U+V} + \frac{U''}{U'},$$

wofür wir auch schreiben können:

$$\lambda = \frac{\partial}{\partial u}[\log U' - 2\log(U+V)].$$

Jetzt lehrt (3), dass $\log F$ die Form hat:

$$\log F = \log U' - 2\log(U+V) + \log W,$$

wo W noch eine Function von v allein bedeutet, sodass wir haben:

$$F = \frac{U'W}{(U+V)^2}. \tag{16}$$

Setzen wir aber diesen Wert in die ursprüngliche Gleichung (2) ein, so kommt:

$$\frac{2V'}{W} = -K$$

oder:

$$W = -\frac{2V'}{K},$$

sodass die Substitution dieses Wertes in (16) schliesslich ergiebt:

$$F = -\frac{2}{K}\frac{U'V'}{(U+V)^2}. \tag{17}$$

Die allgemeinste Function $F(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ also, die der Bedingung (2) genügt, hat diese Form (17), in der U eine beliebig zu wählende Function von $\mathfrak{u}$ allein und V eine beliebig zu wählende Function von $\mathfrak{v}$ allein bedeutet.

Aber dies gilt wohlbemerkt nur unter der Voraussetzung, dass K eine Constante ist.

Nach (1) lässt sich also das Quadrat des Bogenelementes einer jeden Fläche von der constanten Krümmung K auf die Form bringen:

$$ds^2 = -\frac{4}{K}\frac{U'V'}{(U+V)^2}\,d\mathfrak{u}\,d\mathfrak{v}.$$

Führen wir nun U und V als neue Parameter u und v ein, wobei nach wie vor die Minimalcurven der Fläche die Parameterlinien sind, so kommt einfacher:

$$ds^2 = -\frac{4}{K}\frac{du\,dv}{(u+v)^2}.$$

Daher:

Satz 17:[1] Das Quadrat des Bogenelementes einer jeden Fläche von constanter Krümmung K lässt sich auf die Form bringen:

$$ds^2 = -\frac{4}{K}\frac{du\,dv}{(u+v)^2}.$$

Hieraus aber folgt weiter:

Satz 18:[2] Zwei Flächen von derselben constanten Krümmung sind stets auf einander verbiegbar.

Denn man kann hiernach ihre Bogenelemente durch geeignete Wahl der Parameter auf dieselbe Form bringen.

Bezüglich der Flächen constanter positiver Krümmung K kann hier noch ohne Mühe eine Folgerung gezogen werden: Da die Kugel vom Radius $1:\sqrt{K}$ die constante positive Krümmung K hat, so ist jede Fläche constanter positiver Krümmung auf eine Kugel verbiegbar, nach Satz 18. Die Kugel aber kann in sich nicht nur auf eine, sondern auf ∞^3 Arten gedreht werden. Daraus

[1] Satz von Liouville (1850), vgl. die Anm. zu S. 273.

[2] Satz von Minding (1839), vgl. die Anm. zu S. 273. Minding's Beweis verwendet eine andere Methode als die, die wir hier nach Liouville benutzt haben.

folgt, dass eine Fläche constanter positiver Krümmung auf ∞^2 Arten in sich verbogen werden kann. Dasselbe kann man übrigens von den Flächen constanter negativer Krümmung beweisen, worauf wir nicht näher eingehen. Man kann sagen: Es giebt drei Arten von Flächen, die einen lassen sich nicht stetig in sich verbiegen, die anderen auf ∞^1 Arten — das sind die auf Rotationsflächen verbiegbaren Flächen nicht-constanter Krümmung —, und die letzten auf ∞^2 Arten, — und dies sind die Flächen constanter Krümmung.

Wir haben aber nicht die Absicht, aus der sehr weit ausgebauten Theorie der Verbiegung hier noch weiteres zu bringen. So übergehen wir auch die Theorie der Verbiegung geradliniger Flächen.

§ 6. Differentialinvarianten einer Fläche.

Die Paragraphen 3 bis 5 sind als eine Einschaltung zu betrachten, die an eine der drei Fundamentalgleichungen der Flächentheorie angeknüpft wurde. Wir bitten daher den Leser, wieder auf die Betrachtungen der Paragraphen 1 und 2 zurückzugehen.

Wir fanden dort, dass sich die zweiten partiellen Differentialquotienten der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z einer Fläche:

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v)$$

nach den Parametern u und v durch die ersten partiellen Differentialquotienten von x, y, z, durch die Fundamentalgrössen und die partiellen Differentialquotienten der Fundamentalgrössen ausdrücken lassen. Indem wir alsdann die dritten Ableitungen von x, y, z zu berechnen unternahmen, sahen wir, dass sich x_{uuv} und x_{uvv} auf je zwei Weisen finden lassen, und dasselbe galt von y_{uuv}, y_{uvv} und von z_{uuv}, z_{uvv}. Durch Gleichsetzen der jedesmal erhaltenen beiden Werte kamen wir zu sechs Gleichungen, die sich aber auf nur drei von einander unabhängige reducierten, auf die drei Fundamentalgleichungen der Flächentheorie. Es waren dies Gleichungen, die nur die Fundamentalgrössen und ihre Ableitungen enthielten.

Wir deuteten schon auf S. 272 an, dass wir darauf ausgehen, nachzuweisen, dass zu solchen sechs Functionen E, F, G, L, M, N von zwei Veränderlichen u und v, die diesen drei Fundamentalgleichungen Genüge leisten, stets Flächen (1) vorhanden sind, bei denen sie die Rolle der Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung spielen; ja wir wollen überdies zeigen, dass alle Flächen, die diese sechs Grössen zu Fundamentalgrössen haben, mit einander

congruent sind. Es ist also unsere Absicht, in Bezug auf Flächen dasjenige Problem zu erledigen, das wir in Bezug auf Curven im ersten Bande in den Paragraphen 13 und 14 des zweiten Abschnittes behandelt haben. Wie wir damals einen Paragraphen über die Differentialinvarianten der Curven vorausschickten, so wollen wir auch hier vorerst die Frage nach allen Differentialinvarianten einer Fläche beantworten.

Unterwerfen wir eine Fläche (1) allen Bewegungen des Raumes, so geht sie in unendlich viele neue Lagen über. Dabei werden die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z andere und andere Functionen der Parameter u und v. Wenn nämlich der Punkt (x, y, z) der Fläche bei einer Bewegung in den Punkt $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ übergeht, so ist, wie in (2), I S. 201:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \bar{x} &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z + a, \\ \bar{y} &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + b, \\ \bar{z} &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z + c, \end{aligned}\right.$$

wobei die α, β, γ solche Constanten sind, die den Formeln I (C), (D), (E), (F) Genüge leisten, im übrigen aber beliebig gewählt werden können, während a, b; c überhaupt ganz willkürliche Constanten bedeuten. Da x, y, z nach (1) Functionen von u und v sind, so sind $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ nach (2) ebenfalls Functionen von u und v, die aber noch willkürliche Constanten enthalten.

Wir fragen nun nach allen denjenigen Functionen von x, y, z und ihren partiellen Differentialquotienten nach u und v, die bei allen Bewegungen ungeändert bleiben, d. h. also nach allen Functionen

$$J(x, y, z;\; x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v;\; x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} \ldots),$$

die ungeändert bleiben, sobald man in ihnen x, y, z durch die Functionen $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ ersetzt, die noch willkürliche Constanten enthalten. Alle derartigen Functionen J heissen Differentialinvarianten der Fläche hinsichtlich der Bewegungen.[1]

Zum besseren Verständnis dieser Definition ist noch zu bemerken, dass infolge von (2) die ersten Ableitungen von x, y, z nach u und v die Formen haben:

---

[1] Wie wir schon in der Anm. zu I S. 44 bemerkten, ist der Begriff der Differentialinvarianten überhaupt allmählich ausgebildet worden. Seine völlige, scharfe und allgemeine Definition und Theorie aber verdankt man Lie's Arbeiten aus den Jahren 1882—84. Wir nennen von seinen vielen Arbeiten hierüber nur die eine: „Über Differentialinvarianten", Math. Ann. 24. Bd. (1884).

$$(3)\quad \begin{cases} \bar{x}_u = \alpha_1 x_u + \alpha_2 y_u + \alpha_3 z_u, & \bar{x}_v = \alpha_1 x_v + \alpha_2 y_v + \alpha_3 z_v, \\ \bar{y}_u = \beta_1 x_u + \beta_2 y_u + \beta_3 z_u, & \bar{y}_v = \beta_1 x_v + \beta_2 y_v + \beta_3 z_v, \\ \bar{z}_u = \gamma_1 x_u + \gamma_2 y_u + \gamma_3 z_u, & \bar{z}_v = \gamma_1 x_v + \gamma_2 y_v + \gamma_3 z_v \end{cases}$$

und dass sich die höheren Ableitungen analog ausdrücken. Wenn wir nämlich zur Vereinfachung unter λ_{ik} diejenige Ableitung einer Function λ von u und v verstehen, die sich durch i-malige Differentiation nach u und k-malige Differentiation nach v ergiebt, also allgemein setzen:

$$(4)\qquad \frac{\partial^{i+k}\lambda(u,v)}{\partial u^i\,\partial v^k} = \lambda_{ik},$$

so ist nach (2):

$$(5)\quad \begin{cases} \bar{x}_{ik} = \alpha_1 x_{ik} + \alpha_2 y_{ik} + \alpha_3 z_{ik}, \\ \bar{y}_{ik} = \beta_1 x_{ik} + \beta_2 y_{ik} + \beta_3 z_{ik}, \\ \bar{z}_{ik} = \gamma_1 x_{ik} + \gamma_2 y_{ik} + \gamma_3 z_{ik}. \end{cases}$$

Nun soll die Function J eine Differentialinvariante heissen, wenn die Gleichung:

$$(6)\quad \begin{cases} J(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z};\ \bar{x}_{10}, \bar{x}_{01}, \bar{y}_{10}, \bar{y}_{01}, \bar{z}_{10}, \bar{z}_{01};\ \bar{x}_{20}, \bar{x}_{11}, \bar{x}_{02} \ldots) = \\ \quad = J(x, y, z;\ x_{10}, x_{01}, y_{10}, y_{01}, z_{10}, z_{01};\ x_{20}, x_{11}, x_{02} \ldots) \end{cases}$$

infolge von (2) und (5) besteht, wie auch die Coefficienten a, b, c und die Richtungscosinus $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ gewählt sein mögen, vorausgesetzt, dass diese Cosinus die in Tafel I angegebenen Bedingungen erfüllen. — Es ist vielleicht überflüssig, hierbei hervorzuheben, dass z. B. x_{10} und x_{01} nach der Definition (4) die Ableitungen x_u und x_v bedeuten, sodass die Formeln (3) mit in (5) enthalten sind.

Noch deutlicher wird die Definition der Differentialinvarianten werden, wenn wir einige Beispiele angeben. Solche Beispiele sind die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung E, F, G, L, M, N, deren Unveränderlichkeit bei den Bewegungen des Raumes wir schon in Satz 6, S. 16, und Satz 5, S. 107, ausgesprochen haben. Bei unserer Bezeichnungsweise (4) ist nach XI (A) insbesondere:

$$(7)\quad \begin{cases} E = x_{10}^2 + y_{10}^2 + z_{10}^2, \\ F = x_{10}x_{01} + y_{10}y_{01} + z_{10}z_{01}, \\ G = x_{01}^2 + y_{01}^2 + z_{01}^2. \end{cases}$$

Zur Bestimmung **aller** Differentialinvarianten wenden wir mit einigen Umstellungen in der Reihenfolge der Schlussfolgerungen die-

selbe Methode an wie bei dem entsprechenden Problem für die Curven in § 12 des 2. Abschn., 1. Bd. Wie dort auf S. 202 erkennen wir auch hier:

Die Differentialinvarianten sind frei von x, y, z selbst, was genau wie damals so auch hier daraus folgt, dass die ganz willkürlichen Constanten a, b, c nur in den Formeln (2), dagegen nicht in den Formeln (5) auftreten.

Jetzt beweisen wir weiter eine Behauptung, die analog der letzten Bemerkung des erwähnten Paragraphen, I S. 208, ist, dort aber aus dem Gesamtergebnis geschlossen wurde, während wir sie hier benutzen, um das Ergebnis selbst abzuleiten:

Wenn nämlich eine Function J eine Differentialinvariante ist, so sind auch alle ihre partiellen Ableitungen nach u und v Differentialinvarianten.

Um dies zu beweisen, wollen wir der Übersichtlichkeit halber in J nur eines der Argumente, x_{ik}, besonders angeben und die übrigen Argumente durch Punkte andeuten:

$$J(x_{ik}\ldots).$$

Es soll dann unter

$$J(\bar{x}_{ik}\ldots)$$

dieselbe Function verstanden werden, nachdem aber überall, nicht nur in dem einen Argumente x_{ik}, die Zeichen x, y, z durch $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ ersetzt worden sind. Ist nun J eine Differentialinvariante, so ist:

$$J(\bar{x}_{ik}\ldots) = J(x_{ik}\ldots)$$

infolge von (5) und zwar für alle Werte von u und v. Daher darf die Formel zunächst nach u differenziert werden. Also ist:

$$\frac{\partial J(\bar{x}_{ik}\ldots)}{\partial u} = \frac{\partial J(x_{ik}\ldots)}{\partial u}. \tag{8}$$

Nun steht auch rechts wieder eine Function der partiellen Differentialquotienten von x, y, z nach u und v, denn es ist ja:

$$\frac{\partial J(x_{ik}\ldots)}{\partial u} = \frac{\partial J(x_{ik}\ldots)}{\partial x_{ik}}\frac{\partial x_{ik}}{\partial u} + \cdots,$$

wo rechts so viele Summanden stehen, als J Argumente hat; und nach der Definition (4) können wir hierfür schreiben:

$$\frac{\partial J(x_{ik}\ldots)}{\partial u} = \frac{\partial J(x_{ik}\ldots)}{\partial x_{ik}} x_{i+1,k} + \cdots \tag{9}$$

Demnach ist die rechte Seite von (8) eine Function der Ableitungen von x, y, z; und links steht in (8) dieselbe Function, aber in $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$

statt x, y, z geschrieben. Die Gleichung (8) sagt aus, dass die Function (9) ebenfalls eine Differentialinvariante ist.

Ebenso können wir beweisen, dass die partielle Differentiation einer Differentialinvariante J nach v wieder eine Differentialinvariante liefert; und weiterhin folgt, dass dasselbe auch für beliebig häufige Differentiation nach u und v gilt, sodass unsere obige Behauptung als richtig dargethan ist.

Da wir hiermit ein einfaches Mittel haben, aus schon bekannten Differentialinvarianten neue abzuleiten, so können wir es z. B. auf die Fundamentalgrössen E, F, G, L, M, N anwenden, die ja, wie wir wissen, Differentialinvarianten sind.

Hiernach sind nicht nur die Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung, sondern auch alle ihre partiellen Ableitungen nach den Parametern u und v Differentialinvarianten.

Fragen wir jetzt zunächst nach allen denjenigen Differentialinvarianten, die nur die ersten partiellen Ableitungen von x, y und z enthalten, also nach den sogenannten Differentialinvarianten erster Ordnung, so handelt es sich darum, diejenigen Functionen

$$J(x_u, x_v, y_u, y_v. z_u, z_v)$$

zu bestimmen, für die infolge von (3):

$$J(\bar{x}_u, \bar{x}_v, \bar{y}_u, \bar{y}_v, \bar{z}_u, \bar{z}_v) = J(x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v)$$

ist. Sie sind leicht gefunden. Die Gleichungen (3) nämlich sind, abgesehen von den Bezeichnungen der Veränderlichen — indem hier die Indices u und v statt 1 und 2 stehen —, genau dieselben wie die Gleichungen in I S. 203 oben, sodass analytisch dasselbe Problem wie damals vorliegt. Nach I S. 204 erkennen wir also, dass jede Differentialinvariante erster Ordnung eine Function von den dreien ist:

$$x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \quad x_v^2 + y_v^2 + z_v^2, \quad x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$

d. h. eine Function der drei Fundamentalgrössen erster Ordnung E, F, G.

Da jede Function von Differentialinvarianten wieder eine Differentialinvariante ist, so folgt, dass E, F, G die einzigen wesentlichen Differentialinvarianten erster Ordnung sind.

Jetzt benutzen wir den Satz 2, S. 264, nach dem sich alle partiellen Ableitungen von x, y, z von den zweiten an durch die ersten, durch die Fundamentalgrössen und die Ableitungen der

Fundamentalgrössen ausdrücken lassen. Thun wir dies in irgend einer Differentialinvariante J, so sehen wir, dass sie sich als Function der ersten Ableitungen von x, y, z, der Fundamentalgrössen und der Ableitungen der Fundamentalgrössen darstellen lässt.

Jede Differentalinvariante lässt sich daher auf die Form bringen:

$$J(x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v;\ E, F, G, E_u \ldots;\ L, M, N, L_u \ldots),$$

in der die partiellen Differentialquotienten von E, F, G und L, M, N durch Punkte angedeutet sind.

Die Eigenschaft dieser Function, bei allen Bewegungen ungeändert zu bleiben, wird durch die Gleichung ausgedrückt:

$$J(\bar{x}_u, \bar{x}_v, \bar{y}_u, \bar{y}_v, \bar{z}_u, \bar{z}_v;\ E, F, G, E_u \ldots;\ L, M, N, L_u \ldots) =$$
$$= J(x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v;\ E, F, G, E_u \ldots;\ L, M, N, L_u \ldots),$$

wo E, F, G, L, M, N und ihre Ableitungen auch links stehen, weil diese Functionen bei allen Bewegungen ungeändert bleiben.

Die Gleichung bleibt notwendig richtig, wenn man für die rechts und links genau an gleicher Stelle stehenden Functionen E, F, G, L, M, N und ihre Ableitungen irgend welche Zahlen setzt, denn die Gleichung soll ja infolge von (3) allein bestehen, also ohne Rücksicht auf die Bedeutung dieser Functionen. Wenn wir aber Zahlen einsetzen, so reduciert sich die Differentialinvariante J auf eine Function von x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v allein, also auf eine Differentialinvariante erster Ordnung. Da wir aber gesehen haben, dass jede Differentialinvariante erster Ordnung eine Function von E, F, G allein ist, so schliessen wir, dass die Function J vor der Substitution von Zahlen eine Function der Fundamentalgrössen und ihrer Ableitungen allein ist.

Andererseits ist mit den Fundamentalgrössen und ihren Ableitungen auch jede Function dieser Functionen eine Differentialinvariante. Mithin folgt:

Satz 19: Unterwirft man eine Fläche

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

allen Bewegungen des Raumes, ohne ihr Parametersystem zu ändern, so ändern sich x, y, z und ihre partiellen Ableitungen nach u und v. Eine Function dieser Grössen bleibt bei allen Bewegungen dann und nur dann ungeändert, wenn sie eine Function der sechs Fundamental-

grössen E, F, G, L, M, N und ihrer partiellen Ableitungen nach u und v ist. Hierbei wird von den Tangentenflächen der Minimalcurven abgesehen.

Die letzte Einschränkung ist deshalb nötig, weil wir den Satz 2, S. 264, benutzt haben.

Wir wollen eine Anwendung machen: Es ist leicht einzusehen, dass jede Summe von der Form

$$\mathbf{S}\, x_{ik} x_{rs}$$

oder

$$\mathbf{S}\, \frac{\partial^{i+k} x}{\partial u^i \partial v^k} \frac{\partial^{r+s} x}{\partial u^r \partial v^s}$$

eine Differentialinvariante ist, denn analog (5) ist auch:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{rs} &= \alpha_1 x_{rs} + \alpha_2 y_{rs} + \alpha_3 z_{rs}, \\ \bar{y}_{rs} &= \beta_1 x_{rs} + \beta_2 y_{rs} + \beta_3 z_{rs}, \\ \bar{z}_{rs} &= \gamma_1 x_{rs} + \gamma_2 y_{rs} + \gamma_3 z_{rs}, \end{aligned}$$

sodass sich ergiebt:

$$\mathbf{S}\, \bar{x}_{ik} \bar{x}_{rs} = \mathbf{S}\, (\alpha_1 x_{ik} + \alpha_2 y_{ik} + \alpha_3 z_{ik})(\alpha_1 x_{rs} + \alpha_2 y_{rs} + \alpha_3 z_{rs}).$$

Nach I (C) aber ist die rechte Seite gleich $\mathbf{S}\, x_{ik} x_{rs}$, also, wie behauptet wurde:

$$\mathbf{S}\, \bar{x}_{ik} \bar{x}_{rs} = \mathbf{S}\, x_{ik} x_{rs}.$$

Da also $\mathbf{S}\, x_{ik} x_{rs}$ eine Differentialinvariante ist, so folgt für sie aus Satz 19:

Satz 20: Sind

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v)$$

die Gleichungen einer Fläche, die keine Tangentenfläche einer Minimalcurve ist, so ist jede Summe von der Form:

$$\frac{\partial^{i+k} x}{\partial u^i \partial v^k} \frac{\partial^{r+s} x}{\partial u^r \partial v^s} + \frac{\partial^{i+k} y}{\partial u^i \partial v^k} \frac{\partial^{r+s} y}{\partial u^r \partial v^s} + \frac{\partial^{i+k} z}{\partial u^i \partial v^k} \frac{\partial^{r+s} z}{\partial u^r \partial v^s}$$

als Function der Fundamentalgrössen E, F, G, L, M, N und ihrer partiellen Ableitungen nach u und v darstellbar.

Die Formeln (4), S. 264, gestatten uns, dies für die einfachsten Summen von dieser Art wirklich auszurechnen. Wir machen dabei Gebrauch davon, dass

$$\mathbf{S}\, (y_u z_v - z_u y_v)^2 = D^2$$

nach XI (G), ferner

$$\mathbf{S}(y_u z_v - z_u y_v) x_u = 0, \quad \mathbf{S}(y_u z_v - z_u y_v) x_v = 0$$

und endlich

$$\mathbf{S} x_u^2 = E, \quad \mathbf{S} x_u x_v = F, \quad \mathbf{S} x_v^2 = G$$

ist. Nach (4), S. 264, berechnen wir nämlich x_{uu}^2, bilden analog y_{uu}^2 und z_{uu}^2 und addieren alle drei. Wegen der soeben angegebenen Gleichungen erhalten wir alsdann $\mathbf{S} x_{uu}^2$ als Function von E, F, G, L und den ersten Ableitungen von E, F, G. Entsprechend lassen sich die anderen ähnlichen Summen berechnen. So kommt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} x_{uu}^2 &= L^2 + \frac{1}{4D^2}(E_u^2 G + 2E_u E_v F + E_v^2 E - \\
&\qquad - 4E_u F_u F - 4E_v F_u E + 4F_u^2 E), \\
\mathbf{S} x_{uv}^2 &= M^2 + \frac{1}{4D^2}(E_v^2 G - 2E_v G_u F + G_u^2 E), \\
\mathbf{S} x_{vv}^2 &= N^2 + \frac{1}{4D^2}(G_u^2 G + 2G_u G_v F + G_v^2 E - \\
&\qquad - 4G_u F_v G - 4G_v F_v F + 4F_v^2 G), \\
\mathbf{S} x_{uu} x_{uv} &= LM + \frac{1}{4D^2}(E_u E_v G + E_v^2 F - 2E_v F_u F - \\
&\qquad - E_u G_u F - E_v G_u E + 2F_u G_u E), \\
\mathbf{S} x_{uu} x_{vv} &= LN + \frac{1}{4D^2}(- E_u G_v F - E_u G_u G + 2E_u F_v G - \\
&\qquad - E_v G_v E - E_v G_u F + 2E_v F_v F + \\
&\qquad + 2F_u G_v E + 2F_u G_u F - 4F_u F_v F), \\
\mathbf{S} x_{uv} x_{vv} &= MN + \frac{1}{4D^2}(G_u^2 F + G_u G_v E - 2G_u F_v F - \\
&\qquad - G_u E_v G - G_v E_v F + 2E_v F_v G).
\end{aligned}$$

Der Satz 19 bestätigt die grosse Bedeutung der Fundamentalgrössen: **Kennt man die Fundamentalgrössen E, F, G, L, M, N einer Fläche, so kennt man auch alle ihre Differentialinvarianten.**

Die Bedeutung der Fundamentalgrössen wird in den folgenden Paragraphen noch stärker hervortreten. Wenn nämlich zwei Flächen dieselben Fundamentalgrössen haben, so haben sie hiernach überhaupt dieselben Differentialinvarianten. Dass alsdann die Flächen mit einander congruent sind, werden wir in § 9 erkennen.

§ 7. Richtungscosinus eines begleitenden Dreikants.[1]

Wir nähern uns jetzt der Lösung der Aufgabe, zu gegebenen Fundamentalgrössen die Fläche zu finden. Da diese Lösung nicht ganz einfach ist, so erscheint es uns angemessen, ihre Behandlung in eine Reihe einzelner Schritte zu zerlegen. Das Problem hat einige Analogie mit dem in § 13 und 14 des 2. Abschnittes im ersten Bande behandelten Problem für Curven. Wie dort, so werden wir auch hier darauf ausgehen, statt der rechtwinkligen Coordinaten der Flächenpunkte zunächst die Cosinus dreier zu einander senkrechter Richtungen zu berechnen, und zwar dreier solcher Richtungen, die in naher Beziehung zum Flächenpunkte stehen. Wir bereiten demnach die Lösung unseres Problems dadurch vor, dass wir im gegenwärtigen Paragraphen ein solches Axenkreuz genauer untersuchen.

Im Punkte (u, v) der Fläche:

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v) \tag{1}$$

haben wir zunächst eine ausgezeichnete Richtung, die der Flächennormale, mit den Cosinus X, Y, Z. Zwei zu dieser senkrechte und auch zu einander senkrechte Richtungen werden alsdann dadurch bestimmt, dass wir nach irgend einem Gesetze zwei zu einander senkrechte Tangenten des Punktes (u, v) auswählen.

Dies geschieht so: Sind k und $\varkappa$ die Werte von $dv:du$ für zwei zu einander senkrechte Fortschreitungsrichtungen, so ist nach Satz (11), S. 33:

$$E + F(k + \varkappa) + Gk\varkappa = 0. \tag{2}$$

Verstehen wir jetzt unter k eine irgend wie, aber bestimmt gewählte Function von u und v, so ist damit jedem Punkte (u, v) der Fläche eine Richtung (k) zugeordnet. Der alsdann aus (2) folgende Wert von $\varkappa$:

$$\varkappa = -\frac{E + Fk}{F + Gk} \tag{3}$$

ist ebenfalls eine Function von u und v und giebt in jedem Punkte

---

[1] Solchen Lesern, denen die folgenden Betrachtungen vorerst zu schwierig sein sollten, raten wir, die Paragraphen 7 bis 9 zu überschlagen. Wenn sie nur die Sätze 25—27 des § 9, S. 338, in sich aufnehmen und sie ohne Beweis als richtig gelten lassen, so wird ihnen das Folgende, von § 10 an, verständlich sein. Das Studium der §§ 7—9 kann also auf spätere Zeit verschoben werden.

(u, v) die zur Richtung (k) senkrechte Richtung an. Sind $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1$ die Cosinus der Richtung (k) und $\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Z}_2$ die der Richtung $(\varkappa)$, so ist:

$$\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{Y}_1 : \mathfrak{Z}_1 = (x_u + k x_v) : (y_u + k y_v) : (z_u + k z_v),$$
$$\mathfrak{X}_2 : \mathfrak{Y}_2 : \mathfrak{Z}_2 = (x_u + \varkappa x_v) : (y_u + \varkappa y_v) : (z_u + \varkappa z_v).$$

Da nach XI (A):

$$\mathbf{S}(x_u + k x_v)^2 = E + 2Fk + Gk^2$$

ist, so folgt:

$$\mathfrak{X}_1 = \frac{x_u + k x_v}{\sqrt{E + 2Fk + Gk^2}}, \quad \mathfrak{Y}_1 = \frac{y_u + k y_v}{\sqrt{E + 2Fk + Gk^2}}, \quad \mathfrak{Z}_1 = \frac{z_u + k z_v}{\sqrt{E + 2Fk + Gk^2}}; \tag{4}$$

und entsprechend kommt:

$$\mathfrak{X}_2 = \frac{x_u + \varkappa x_v}{\sqrt{E + 2F\varkappa + G\varkappa^2}}, \quad \mathfrak{Y}_2 = \frac{y_u + \varkappa y_v}{\sqrt{E + 2F\varkappa + G\varkappa^2}}, \quad \mathfrak{Z}_2 = \frac{z_u + \varkappa z_v}{\sqrt{E + 2F\varkappa + G\varkappa^2}}. \tag{5}$$

Wenn wir hierin den Wert $\varkappa$ aus (3) einsetzen, so gehen die Ausdrücke hervor:

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{X}_2 &= \frac{-(F + Gk)x_u + (E + Fk)x_v}{D\sqrt{E + 2Fk + Gk^2}}, \\
\mathfrak{Y}_2 &= \frac{-(F + Gk)y_u + (E + Fk)y_v}{D\sqrt{E + 2Fk + Gk^2}}, \\
\mathfrak{Z}_2 &= \frac{-(F + Gk)z_u + (E + Fk)z_v}{D\sqrt{E + 2Fk + Gk^2}}.
\end{aligned}\right. \tag{6}$$

Hierin haben wir das Vorzeichen schon so gewählt, dass die Determinante der Cosinus der drei Richtungen $(\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{Y}_1 : \mathfrak{Z}_1)$, $(\mathfrak{X}_2 : \mathfrak{Y}_2 : \mathfrak{Z}_2)$, $(X : Y : Z)$ gleich $+1$ sind, vorausgesetzt, dass wir für die in (4) und (6) auftretende Quadratwurzel

$$\sqrt{E + 2Fk + Gk^2}$$

stets denselben Wert nehmen. Denn jene Determinante ist zunächst:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{X}_1 & \mathfrak{X}_2 & X \\ \mathfrak{Y}_1 & \mathfrak{Y}_2 & Y \\ \mathfrak{Z}_1 & \mathfrak{Z}_2 & Z \end{vmatrix} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x_u & x_v & X \\ y_u & y_v & Y \\ z_u & z_v & Z \end{vmatrix}.$$

Nach XI (L) aber folgt hieraus:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{X}_1 & \mathfrak{X}_2 & X \\ \mathfrak{Y}_1 & \mathfrak{Y}_2 & Y \\ \mathfrak{Z}_1 & \mathfrak{Z}_2 & Z \end{vmatrix} = 1. \tag{7}$$

Nach I S. 146 sind jetzt die drei Richtungen $(\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{Y}_1 : \mathfrak{Z}_1)$, $(\mathfrak{X}_2 : \mathfrak{Y}_2 : \mathfrak{Z}_2)$, $(X : Y : Z)$ so gegen einander orientiert wie die x-, y- und z-Axe. Wir nennen die drei vom Flächenpunkt (u, v) ausgehenden Geraden mit diesen Richtungen das begleitende Dreikant des Punktes (u, v) der Fläche. Bei seiner Feststellung kann die Function k, wie gesagt, willkürlich gewählt werden.

Wir wollen die ersten partiellen Ableitungen der Richtungscosinus des begleitenden Dreikants nach u und v berechnen, aber nur so weit, als es für die späteren Betrachtungen nötig ist. Um aber auch zum Gebrauch fertige Formeln zu haben, wollen wir später in dem Falle, dass $k = 0$ gewählt ist, die Formeln vollständig geben.

Wollten wir nämlich schon jetzt die Formeln in aller Ausführlichkeit entwickeln, so würde ihr grosser Umfang und das Nebensächliche der Rechnung den allgemeinen Überblick erschweren.

Wenn wir die partiellen Ableitungen der Richtungscosinus bestimmen wollen, so haben wir dabei die Formeln für die zweiten Ableitungen von x, y, z nach u und v zu benutzen, die wir unter (7), S. 268, aufstellten. Sie zeigen, dass sich die zweiten Ableitungen von x linear und homogen durch x_u, x_v, X ausdrücken mit Coefficienten, die nur die Fundamentalgrössen E, F, G, L, M, N und die ersten Ableitungen der Fundamentalgrössen E, F, G enthalten. Wir wissen ferner, dass diese Formeln richtig bleiben, wenn x und X mit y und Y oder z und Z vertauscht werden.

Wird der Wert von $\mathfrak{X}_1$, der oben unter (4) angegeben ist, partiell nach u differenziert, so erkennen wir, dass der Differentialquotient zunächst linear und homogen in x_{uu}, x_{uv}, x_u und x_v ist. Die Coefficienten hängen dabei nur von den Grössen E, F, G, E_u, F_u, G_u, k und k_u ab. Wenn wir hierin für x_{uu} und x_{uv} die Werte aus den citierten Formeln (7), S. 268, einsetzen, so erkennen wir, dass die partielle Ableitung von $\mathfrak{X}_1$ nach u linear und homogen in x_u, x_v und X wird mit Coefficienten, die nur von den Grössen

$$(8) \qquad E, F, G, L, M, N; \quad E_u, F_u, G_u, E_v, F_v, G_v; \quad k, k_u, k_v$$

abhängen. Wir gelangen also zu einer Formel von dieser Gestalt:

$$\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial u} = \alpha x_u + \beta x_v + \gamma X,$$

wo α, β, γ Functionen der Grössen (8) sind. Nun aber können wir die beiden ersten Gleichungen (4) und (6) benutzen, um umgekehrt aus ihnen x_u und x_v linear und homogen durch $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ auszu-

drücken. Setzen wir diese Werte, deren Coefficienten von E, F, G, k abhängen, in die hingeschriebene Formel ein, so wird sich schliesslich $\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial u}$ linear und homogen durch $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ und X ausdrücken. Dabei enthalten die Coefficienten nur die Grössen (8).

Dieselben Schlüsse gelten für die ersten Ableitungen von $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ nach u und v überhaupt.

Was die Ableitungen X_u und X_v betrifft, so sind sie schon unter XII (R) angegeben. Auch hierin drücken wir x_u und x_v wie oben mittels der beiden ersten Formeln (4) und (6) linear und homogen durch $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ aus.

Durch diesen summarischen Überblick über die zwar theoretisch einfachen, aber praktisch umständlichen Rechenoperationen erkennen wir also, dass sich sechs Formeln ableiten lassen, von denen die drei ersten diese Gestalt haben:

$$\text{(9)} \quad \begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial u} = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{X}_2 + \mathfrak{A}_3 X, \\ \frac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial u} = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{B}_2 \mathfrak{X}_2 + \mathfrak{B}_3 X, \\ \frac{\partial X}{\partial u} = \mathfrak{C}_1 \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{C}_2 \mathfrak{X}_2, \end{cases}$$

und von denen die für

$$\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial v}, \quad \frac{\partial X}{\partial v}$$

ganz entsprechend gebaut sind. Darin sind die Coefficienten Functionen der Grössen (8).

Da diese Grössen (8) sich nicht ändern, wenn x, y, z cyklisch vertauscht werden, so gelten die Gleichungen (9) auch, wenn $\mathfrak{X}$ und X durch $\mathfrak{Y}$ und Y oder durch $\mathfrak{Z}$ und Z ersetzt werden.

Nun aber ist nach I (C):

$$\text{(10)} \quad \mathfrak{X}_1^2 + \mathfrak{Y}_1^2 + \mathfrak{Z}_1^2 = 1$$

und daher:

$$\mathfrak{X}_1 \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial u} + \mathfrak{Y}_1 \frac{\partial \mathfrak{Y}_1}{\partial u} + \mathfrak{Z}_1 \frac{\partial \mathfrak{Z}_1}{\partial u} = 0$$

oder, wenn die Werte der Differentialquotienten aus (9) und den sechs analogen Gleichungen eingesetzt werden:

$$\text{(11)} \quad \mathfrak{X}_1 (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{X}_1 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{X}_2 + \mathfrak{A}_3 X) + \mathfrak{Y}_1 (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{Y}_2 + \mathfrak{A}_3 Y) + \\ + \mathfrak{Z}_1 (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{Z}_2 + \mathfrak{A}_3 Z) = 0.$$

Weil aber nach I (C) ausser (10) auch

$$\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2 + \mathfrak{Y}_1 \mathfrak{Y}_2 + \mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2 = 0, \quad \mathfrak{X}_1 X + \mathfrak{Y}_1 Y + \mathfrak{Z}_1 Z = 0$$

ist, so folgt aus (11), dass $\mathfrak{A}_1 = 0$ ist. Ebenso muss $\mathfrak{B}_2 = 0$ sein. Wenn wir nun wie soeben mit (10) mit der Gleichung

$$\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_3 + \mathfrak{Y}_1 \mathfrak{Y}_2 + \mathfrak{Z}_1 \mathfrak{Z}_2 = 0$$

verfahren, so ergiebt dieselbe Schlussfolgerung, dass $\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_1 = 0$ sein muss. Genau so folgt, dass $\mathfrak{B}_3 + \mathfrak{C}_2$ und $\mathfrak{C}_1 + \mathfrak{A}_3$ gleich Null sein müssen.

Ohne näher darauf einzugehen, bemerken wir, dass die Analogie mit den Formeln in I S. 153 nicht bloss zufällig ist.

Wir haben jetzt also gefunden:

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{B}_2 = 0, \quad \mathfrak{B}_3 + \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{C}_1 + \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_1 = 0.$$

Mithin haben die Formeln (9) für die partiellen Ableitungen der Richtungscosinus nach u eine noch speciellere Gestalt:

$$(12) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial u} = C_1 \mathfrak{X}_2 - B_1 X, \\[2mm] \dfrac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial u} = A_1 X - C_1 \mathfrak{X}_1, \\[2mm] \dfrac{\partial X}{\partial u} = B_1 \mathfrak{X}_1 - A_1 \mathfrak{X}_2, \end{cases}$$

und da dieselbe Betrachtung für die Ableitungen nach v gilt, so haben wir ausserdem drei Formeln von der Gestalt:

$$(13) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial v} = C_2 \mathfrak{X}_2 - B_2 X, \\[2mm] \dfrac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial v} = A_2 X - C_2 \mathfrak{X}_1, \\[2mm] \dfrac{\partial X}{\partial v} = B_2 \mathfrak{X}_1 - A_2 \mathfrak{X}_2, \end{cases}$$

Die Coefficienten A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 sind dabei Functionen der Grössen (8). Auch wissen wir, dass die Formeln (12) und (13) richtig bleiben, wenn $\mathfrak{X}$ und X durch $\mathfrak{Y}$ und Y oder durch $\mathfrak{Z}$ und Z ersetzt werden.

Aus (12) und (13) lässt sich nun die zweite Ableitung

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{X}_1}{\partial u \, \partial v}$$

in zwei Weisen berechnen. Da beide Werte übereinstimmen müssen, so finden wir, dass

$$\frac{\partial}{\partial v}(C_1 \mathfrak{X}_2 - B_1 X) = \frac{\partial}{\partial u}(C_2 \mathfrak{X}_2 - B_2 X)$$

oder:

$$C_1 \frac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial v} - B_1 \frac{\partial X}{\partial v} + \mathfrak{X}_2 \frac{\partial C_1}{\partial v} - X \frac{\partial B_1}{\partial v} =$$

$$= C_2 \frac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial u} - B_2 \frac{\partial X}{\partial u} + \mathfrak{X}_2 \frac{\partial C_2}{\partial u} - X \frac{\partial B_2}{\partial u}$$

ist. Setzen wir hierin für die Ableitungen von $\mathfrak{X}_2$ und X ihre Werte aus (12) und (13) ein, so kommt:

$$(14)\quad \left(C_1 A_2 - C_2 A_1 - \frac{\partial B_1}{\partial v} + \frac{\partial B_2}{\partial u}\right) X + \left(B_1 A_2 - B_2 A_1 + \frac{\partial C_1}{\partial v} - \frac{\partial C_2}{\partial u}\right) \mathfrak{X}_2 = 0.$$

Ebenso ergiebt sich je eine Bedingung, wenn wir

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{X}_2}{\partial u \, \partial v} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^2 X}{\partial u \, \partial v}$$

aus (12) und (13) berechnen. Diese Bedingungen gehen schneller aus (14) hervor, wenn wir hierin $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, X, ferner A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 cyklisch vertauschen. Wir kommen so zu insgesamt drei Gleichungen. Man bemerkt aber sofort, dass sich die sechs Coefficienten der drei Bedingungen durch die folgenden drei Grössen ausdrücken:

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} \alpha &= \frac{\partial A_1}{\partial v} - \frac{\partial A_2}{\partial u} - (B_1 C_2 - C_1 B_2), \\ \beta &= \frac{\partial B_1}{\partial v} - \frac{\partial B_2}{\partial u} - (C_1 A_2 - A_1 C_2), \\ \gamma &= \frac{\partial C_1}{\partial v} - \frac{\partial C_2}{\partial u} - (A_1 B_2 - B_1 A_2). \end{aligned} \right.$$

Die Bedingungen sind nämlich diese:

$$\begin{aligned} \beta X - \gamma \mathfrak{X}_2 &= 0, \\ \gamma \mathfrak{X}_1 - \alpha X &= 0, \\ \alpha \mathfrak{X}_2 - \beta \mathfrak{X}_1 &= 0. \end{aligned}$$

Sind nun α, β, γ nicht alle drei gleich Null, so sagen diese Gleichungen aus, dass sich $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, X wie α, β, γ zu einander verhalten. Dasselbe würde aber für $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Y}_2$, Y und für $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$, Z folgen, was in Widerspruch mit der Gleichung (7) ist. Also ist

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Also erfüllen die Coefficienten, die in (12) und (13) auftreten,

wegen der in (15) angegebenen Bedeutung von α, β, γ die Bedingungen:

$$(16)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial A_1}{\partial v} - \dfrac{\partial A_2}{\partial u} - (B_1 C_2 - C_1 B_2) = 0, \\ \dfrac{\partial B_1}{\partial v} - \dfrac{\partial B_2}{\partial u} - (C_1 A_2 - A_1 C_2) = 0, \\ \dfrac{\partial C_1}{\partial v} - \dfrac{\partial C_2}{\partial u} - (A_1 B_2 - B_1 A_2) = 0. \end{cases}$$

Es hat sich insgesamt Folgendes ergeben:

Satz 21: Liegt eine Fläche vor, die keine Tangentenfläche einer Minimalcurve ist, etwa die Fläche:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

und wählt man im Flächenpunkte (u, v) eine Tangente dadurch aus, dass man ihre Richtung $(k = dv : du)$ als eine Function k von u und v beliebig wählt, so kann man aus dieser Tangente, der zu ihr senkrechten Tangente und der Flächennormale ein rechtwinkliges begleitendes Dreikant des Flächenpunktes (u, v) herstellen, dessen Kanten wie die Coordinatenaxen gegen einander orientiert sind. Die Richtungscosinus $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$; $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y}_2$, $\mathfrak{Z}_2$; X, Y, Z der drei Kanten erfüllen alsdann Gleichungen von der Form:

$$\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial u} = C_1 \mathfrak{X}_2 - B_1 X, \qquad \frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial v} = C_2 \mathfrak{X}_2 - B_2 X,$$

$$\frac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial u} = A_1 X - C_1 \mathfrak{X}_1, \qquad \frac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial v} = A_2 X - C_2 \mathfrak{X}_1,$$

$$\frac{\partial X}{\partial u} = B_1 \mathfrak{X}_1 - A_1 \mathfrak{X}_2, \qquad \frac{\partial X}{\partial v} = B_2 \mathfrak{X}_1 - A_2 \mathfrak{X}_2$$

sowie diejenigen Gleichungen, die hieraus hervorgehen, wenn $\mathfrak{X}$ und X durch $\mathfrak{Y}$ und Y oder durch $\mathfrak{Z}$ und Z ersetzt werden. Die sechs Coefficienten

$$A_1, B_1, C_1 \quad \text{und} \quad A_2, B_2, C_2$$

sind dabei Functionen von den Fundamentalgrössen E, F, G, L, M, N, von den ersten Ableitungen von E, F, G und von k, k_u und k_v. Die aus der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial v}$$

und den analogen Gleichungen für die übrigen acht Rich-

tungscosinus hervorgehenden Bedingungen reducieren sich sämtlich auf die drei Bedingungen:

$$\frac{\partial A_1}{\partial v} - \frac{\partial A_2}{\partial u} - (B_1 C_2 - C_1 B_2) = 0,$$

$$\frac{\partial B_1}{\partial v} - \frac{\partial B_2}{\partial u} - (C_1 A_2 - A_1 C_2) = 0,$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial v} - \frac{\partial C_2}{\partial u} - (A_1 B_2 - B_1 A_2) = 0,$$

denen die Coefficienten A, B, C für alle Werte von u und v genügen.

Wir merken hier noch Folgendes an:

Die in unserem Satze angegebenen Gleichungen für die partiellen Ableitungen von $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ und X und ebenso diejenigen Gleichungen, die aus ihnen hervorgehen, wenn $\mathfrak{X}$ und X durch $\mathfrak{Y}$ und Y oder durch $\mathfrak{Z}$ und Z ersetzt werden, sind partielle Differentialgleichungen erster Ordnung für die Richtungscosinus. Die Gleichungen (16) geben die Bedingungen dafür an, dass infolge der partiellen Differentialgleichungen auch die Relationen

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial v}$$

u. s. w. bestehen. Man nennt diese Bedingungen (16) die Integrabilitätsbedingungen jenes Systems von partiellen Differentialgleichungen. Unser Satz sagt aus, dass sich die Integrabilitätsbedingungen auf drei Gleichungen reducieren, die nur die Fundamentalgrössen, die Ableitungen der Fundamentalgrössen und die Grössen k, k_u, k_v, k_{uu}, k_{uv}, k_{vv} enthalten.

Aber wir können noch mehr erkennen, nämlich dass diese drei Bedingungen (16) von k unabhängig sind. Dies sehen wir so ein:

Bei unseren Betrachtungen trat die willkürliche Function $k(u, v)$ als Wert von $dv:du$ für die Tangentenrichtung $(\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{Y}_1 : \mathfrak{Z}_1)$ auf, wodurch das begleitende Dreikant vollständig definiert wird. Es ist leicht, von diesem Dreikant zu einem beliebigen anderen begleitenden Dreikant überzugehen. Denn wir brauchen ja zu dem Zwecke nur den rechten Winkel der beiden Tangenten $(\mathfrak{X}_1 : \mathfrak{Y}_1 : \mathfrak{Z}_1)$ und $(\mathfrak{X}_2 : \mathfrak{Y}_2 : \mathfrak{Z}_2)$ um irgend einen Winkel α zu drehen, der eine beliebige Function von u und v sein kann. Dann treten an die Stelle von $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{Y}_2$, $\mathfrak{Z}_2$ andere Richtungscosinus, die wir mit $\bar{\mathfrak{X}}_1$, $\bar{\mathfrak{Y}}_1$, $\bar{\mathfrak{Z}}_1$ und $\bar{\mathfrak{X}}_2$, $\bar{\mathfrak{Y}}_2$, $\bar{\mathfrak{Z}}_2$ bezeichnen wollen, die sich linear und homogen durch die alten und durch $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ ausdrücken.

Denn die Cosinus der Winkel der ursprünglichen ersten Tangente mit den beiden neuen Tangenten sind $\cos\alpha$ und $-\sin\alpha$ und die der ursprünglichen zweiten Tangente mit den neuen sind $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$, sodass

$$(17)\quad \begin{cases} \bar{\mathfrak{X}}_1 = \mathfrak{X}_1\cos\alpha + \mathfrak{X}_2\sin\alpha, & \bar{\mathfrak{Y}}_1 = \mathfrak{Y}_1\cos\alpha + \mathfrak{Y}_2\sin\alpha, \\ \bar{\mathfrak{X}}_2 = -\mathfrak{X}_1\sin\alpha + \mathfrak{X}_2\cos\alpha, & \bar{\mathfrak{Y}}_2 = -\mathfrak{Y}_1\sin\alpha + \mathfrak{Y}_2\cos\alpha, \\ \bar{\mathfrak{Z}}_1 = \mathfrak{Z}_1\cos\alpha + \mathfrak{Z}_2\sin\alpha, & \\ \bar{\mathfrak{Z}}_2 = -\mathfrak{Z}_1\sin\alpha + \mathfrak{Z}_2\cos\alpha & \end{cases}$$

ist. Daher ist

$$\frac{\partial\bar{\mathfrak{X}}_1}{\partial u} = \cos\alpha\frac{\partial\mathfrak{X}_1}{\partial u} + \sin\alpha\frac{\partial\mathfrak{X}_2}{\partial u} - \mathfrak{X}_1\sin\alpha\cdot\alpha_u + \mathfrak{X}_2\cos\alpha\cdot\alpha_u$$

oder nach (12)

$$(18)\quad \frac{\partial\bar{\mathfrak{X}}_1}{\partial u} = \cos\alpha\,(C_1\mathfrak{X}_2 - B_1X) + \sin\alpha\,(A_1X - C_1\mathfrak{X}_1) - \\ - \mathfrak{X}_1\sin\alpha\cdot\alpha_u + \mathfrak{X}_2\cos\alpha\cdot\alpha_u.$$

Nun müssen aber für die neuen Richtungscosinus partielle Differentialgleichungen analog den alten Gleichungen (12) und (13) bestehen. Wir wollen in ihnen die an die Stelle von A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 tretenden Grössen mit überstrichenen Buchstaben bezeichnen, sodass zunächst analog der ersten Gleichung (12):

$$\frac{\partial\bar{\mathfrak{X}}_1}{\partial u} = \bar{C}_1\bar{\mathfrak{X}}_2 - \bar{B}_1X$$

oder nach (17)

$$\frac{\partial\bar{\mathfrak{X}}_1}{\partial u} = \bar{C}_1(-\mathfrak{X}_1\sin\alpha + \mathfrak{X}_2\cos\alpha) - \bar{B}_1X$$

ist. Vergleichen wir dies mit (18), so folgt, dass

$$\bar{B} = -A_1\sin\alpha + B_1\cos\alpha, \qquad \bar{C}_1 = C_1 + \alpha_u$$

ist. So ergiebt sich überhaupt, dass für die überstrichenen Richtungscosinus solche Gleichungen analog den Gleichungen (12) und (13) bestehen, in denen die Coefficienten durch die folgenden ersetzt sind:

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 &= A_1\cos\alpha + B_1\sin\alpha, & \bar{A}_2 &= A_2\cos\alpha + B_2\sin\alpha, \\ \bar{B}_1 &= -A_1\sin\alpha + B_1\cos\alpha, & \bar{B}_2 &= -A_2\sin\alpha + B_2\cos\alpha, \\ \bar{C}_1 &= C_1 + \alpha_u \qquad, & \bar{C}_2 &= C_2 + \alpha_v. \end{aligned}$$

Für diese Grössen müssen Gleichungen von derselben Form wie die Gleichungen (16) bestehen. Bilden wir sie, so finden wir aber, dass sie sich auf die von α freien Gleichungen (16) reducieren

Also folgt: Die Integrabilitätsbedingungen (16) sind stets dieselben, wie auch das begleitende Dreikant gewählt sein mag.

Mithin enthalten sie die willkürliche Function k und ihre Ableitungen nur scheinbar. Sie sind also Gleichungen zwischen den Fundamentalgrössen und ihren Ableitungen allein. Die Vermutung liegt daher nahe, dass diese drei Gleichungen nichts anderes als die drei Fundamentalgleichungen der Flächentheorie sind (vgl. S. 271). Das ist in der That der Fall.

Um dies zu zeigen, genügt es nach dem Vorhergehenden, sie für ein specielles begleitendes Dreikant aufzustellen und mit den drei Fundamentalgleichungen zu vergleichen. Indem wir dies thun, benutzen wir gleich die Gelegenheit, für ein specielles begleitendes Dreikant die Formeln des Satzes 21 vollständig ausgeführt anzugeben, sodass sie zum Gebrauch geeignet sind.[1]

Wir wählen $k = 0$, also nach (4) und (6):

$$(19)\begin{cases} \mathfrak{X}_1 = \dfrac{x_u}{\sqrt{E}}, & \mathfrak{Y}_1 = \dfrac{y_u}{\sqrt{E}}, & \mathfrak{Z}_1 = \dfrac{z_u}{\sqrt{E}}; \\ \mathfrak{X}_2 = \dfrac{-Fx_u + Ex_v}{D\sqrt{E}}, & \mathfrak{Y}_2 = \dfrac{-Fy_u + Ey_v}{D\sqrt{E}}, & \mathfrak{Z}_2 = \dfrac{-Fz_u + Ez_v}{D\sqrt{E}}. \end{cases}$$

Differenzieren wir jetzt diese Grössen nach u und nach v, indem wir, wie es oben auseinandergesetzt wurde, für die zweiten Ableitungen von x, y, z die Werte aus (7), S. 268, einführen und dann die ersten Ableitungen von x, y, z mittels der aus (19) folgenden Formeln:

$$(20)\begin{cases} x_u = \sqrt{E}\,\mathfrak{X}_1, & y_u = \sqrt{E}\,\mathfrak{Y}_1, & z_u = \sqrt{E}\,\mathfrak{Z}_1, \\ x_v = \dfrac{F\mathfrak{X}_1 + D\mathfrak{X}_2}{\sqrt{E}}, & y_v = \dfrac{F\mathfrak{Y}_1 + D\mathfrak{Y}_2}{\sqrt{E}}, & z_v = \dfrac{F\mathfrak{Z}_1 + D\mathfrak{Z}_2}{\sqrt{E}} \end{cases}$$

---

[1] In seinen „Vorlesungen über Differentialgeometrie“, deutsch von LUKAT, Leipzig 1899, hat BIANCHI bei der allerdings knappen Behandlung desselben Problems, das wir in den gegenwärtigen Paragraphen im Auge haben, ein anderes specielles Dreikant benutzt, nämlich dasjenige, dessen beide ersten Seiten die Hauptkrümmungstangenten sind. Der Leser kann daher die Seiten 94–97 des Werkes von BIANCHI zur Ergänzung heranziehen.

entfernen, so erhalten wir als Gleichungen (12), (13) hier diese:

$$(21)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial u} = \dfrac{-E_u F - E_v E + 2F_u E}{2DE}\mathfrak{X}_2 + \dfrac{L}{\sqrt{E}}X, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial u} = \dfrac{EM - FL}{D\sqrt{E}}X - \dfrac{-E_u F - E_v E + 2F_u E}{2DE}\mathfrak{X}_1, \\ \dfrac{\partial X}{\partial u} = -\dfrac{L}{\sqrt{E}}\mathfrak{X}_1 - \dfrac{EM - FL}{D\sqrt{E}}\mathfrak{X}_2 \end{cases}$$

und

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial v} = \dfrac{-E_v F + G_u E}{2DE}\mathfrak{X}_2 + \dfrac{M}{\sqrt{E}}X, \\ \dfrac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial v} = \dfrac{EN - FM}{D\sqrt{E}}X - \dfrac{-E_v F + G_u E}{2DE}\mathfrak{X}_1, \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} = -\dfrac{M}{\sqrt{E}}\mathfrak{X}_1 - \dfrac{EN - FM}{D\sqrt{E}}\mathfrak{X}_2. \end{cases}$$

Hier ist also:

$$(23)\quad \begin{cases} A_1 = \dfrac{EM - FL}{D\sqrt{E}}, \quad B_1 = -\dfrac{L}{\sqrt{E}}, \quad C_1 = \dfrac{-E_u F - E_v E + 2F_u E}{2DE}, \\ A_2 = \dfrac{EN - FM}{D\sqrt{E}}, \quad B_2 = -\dfrac{M}{\sqrt{E}}, \quad C_2 = \dfrac{-E_v F + G_u E}{2DE}. \end{cases}$$

Bildet man jetzt mit diesen Grössen die Integrabilitätsbedingungen (16), was keine Schwierigkeit macht, so erkennt man, dass die drei hervorgehenden Gleichungen nur eine andere Form der drei Fundamentalgleichungen (9), (10) und (11), S. 270, 271, sind. Die beiden ersten nämlich sind aus den beiden Fundamentalgleichungen (9) und (11) zusammengesetzt, während die dritte die Fundamentalgleichung (10) liefert, und zwar ergiebt sich diese Gleichung, die ja das Krümmungsmaass ausdrückt (vgl. S. 272), in der bequemen Form:

$$(24)\quad \frac{LN - M^2}{D} = \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{-E_u F - E_v E + 2F_u E}{2DE} - \frac{\partial}{\partial u}\,\frac{-E_v F + G_u E}{2DE}.$$

Zu Satz 21 können wir demnach hinzufügen:

Satz 22: Die in Satz 21 angegebenen drei Bedingungen, denen die Functionen A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 genügen, sind die drei Fundamentalgleichungen.

Endlich heben wir noch einen wichtigen Umstand hervor: In (20) liegen x_u, x_v; y_u, y_v; z_u, z_v ausgedrückt durch $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$; $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$; $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ vor. Dabei müssen die Bedingungen:

$$(25)\qquad \frac{\partial}{\partial v} x_u = \frac{\partial}{\partial u} x_v, \quad \frac{\partial}{\partial v} y_u = \frac{\partial}{\partial u} y_v, \quad \frac{\partial}{\partial v} z_u = \frac{\partial}{\partial u} z_v$$

erfüllt sein. Bilden wir sie, indem wir also die Formeln (20) differenzieren und dann für die Ableitungen von $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$; $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$; $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ die Werte aus (21) und (22) einsetzen, so ergeben sich thatsächlich Identitäten. Also: Sobald die Gleichungen (21) und (22) erfüllt sind, genügen die durch (20) gegebenen Werte von x_u, x_v; y_u, y_v; z_u, z_v den drei Bedingungen (25). Dieser Umstand wird später verwertet werden.

§ 8. Unbeschränkt integrabele totale Differentialgleichungen.[1]

Die Betrachtungen des vorigen Paragraphen dienen zur Vorbereitung für die Erledigung eines Problems, das wir jetzt in Angriff nehmen und das wir im nächsten Paragraphen weiter erörtern werden.

Wir fragen uns nämlich, ob oder inwiefern eine Fläche durch Angabe ihrer sechs Fundamentalgrössen E, F, G, L, M, N bestimmt ist. Wir nehmen also an, von einer Fläche sei uns nichts bekannt ausser den Werten der sechs Fundamentalgrössen als Functionen der Parameter u und v.

Zunächst gehen wir darauf aus, die Richtungscosinus eines begleitenden Dreikants der Fläche als Functionen von u und v zu bestimmen. Zu diesem Zwecke wählen wir wie im vorigen Paragraphen eine Function k von u und v irgend wie aus. Alsdann geben uns die Gleichungen (4) und (6), S. 311, die Richtungscosinus $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Z}_2$ der beiden ersten Kanten des begleitenden Dreikants, während die Richtungscosinus X, Y, Z der Flächennormale in XI (F) angegeben sind. Nun aber sind uns $x_u, x_v, y_u, y_v, z_u, z_v$ nicht als Functionen von u und v bekannt, also auch nicht die Richtungscosinus. Aber wir wissen, dass die Richtungscosinus die in Satz 21, S. 316, angegebenen Gleichungen erfüllen müssen. In diesen Gleichungen sind die Coefficienten A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 Functionen von Grössen, die wir sämtlich durch u und v ausdrücken können, nämlich von den Grössen:

$$E, F, G, L, M, N; \quad E_u, E_v, F_u, F_v, G_u, G_v; \quad k, k_u, k_v.$$

Wenn nun diese uns bekannten Functionen A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 von u und v die Integrabilitätsbedingungen (16), S. 316, nicht für alle

[1] Vgl. die Anm. zu S. 310.

Werte von u und v erfüllen, so widersprechen die Gleichungen für die Richtungscosinus einander nach S. 315, d. h. dann giebt es keine Fläche zu den gegebenen Fundamentalgrössen. Wir setzen daher voraus, dass die gegebenen Grössen E, F, G, L, M, N die Gleichungen (16) für alle Werte von u und v erfüllen. Da diese Gleichungen nach Satz 22, S. 320, die drei Fundamentalgleichungen der Flächentheorie sind, so setzen wir also voraus, dass die sechs Fundamentalgrössen den drei Fundamentalgleichungen für alle Werte von u und v genügen.

Insbesondere bestehen die sechs im Satze 21 explicite angegebenen Gleichungen für die partiellen Ableitungen von $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ und X. Da aber nach I (D)

$$\mathfrak{X}_1^2 + \mathfrak{X}_2^2 + X^2 = 1$$

sein muss, so lassen sich die drei Grössen $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, X$ durch nur zwei allerdings ebenfalls unbekannte Functionen ξ und η von u und v ausdrücken. Wir verfahren dabei genau so wie in I S. 212, indem wir

$$(1)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{\mathfrak{X}_1 + i\mathfrak{X}_2}{1 - X} = \dfrac{1 + X}{\mathfrak{X}_1 - i\mathfrak{X}_2}, \\[2ex] \eta = -\dfrac{\mathfrak{X}_1 + i\mathfrak{X}_2}{1 + X} = -\dfrac{1 - X}{\mathfrak{X}_1 - i\mathfrak{X}_2} \end{cases}$$

setzen. Dann ist umgekehrt — vgl. (14), I S. 212, —

$$(2)\qquad \mathfrak{X}_1 = \frac{1 - \xi\eta}{\xi - \eta}, \qquad \mathfrak{X}_2 = i\frac{1 + \xi\eta}{\xi - \eta}, \qquad X = \frac{\xi + \eta}{\xi - \eta}.$$

Wir gehen nun darauf aus, statt $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, X$ zunächst ξ und η zu bestimmen. Sind ξ und η als Functionen von u und v bekannt, so sind es nach (2) auch $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, X$.

Nun ist nach (1):

$$\xi_u = \frac{1}{1 - X}\left(\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial u} + i\frac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial u}\right) + \frac{\xi}{1 - X}\frac{\partial X}{\partial u}.$$

Setzen wir hierin die Ableitungen von $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ und X aus Satz 21, S. 316, ein und berücksichtigen wir dabei (2), so kommt:

$$\xi_u = -\frac{i}{2}(A_1 + iB_1) - iC_1\xi + \frac{i}{2}(A_1 - iB_1)\xi^2.$$

Dieselbe Rechnungweise liefert:

$$\xi_v = -\frac{i}{2}(A_2 + iB_2) - iC_2\xi + \frac{i}{2}(A_2 - iB_2)\xi^2.$$

Wenn wir ebenso η_u und η_v ausrechnen, so finden wir, dass sich η_u und η_v gerade so durch η ausdrücken, wie sich hiernach ξ_u und ξ_v durch ξ ausdrücken. Anders ausgesprochen:

Es giebt zwei Bedingungen für eine Function σ von u und v, nämlich:

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \sigma}{\partial u} = -\dfrac{i}{2}(A_1 + iB_1) - iC_1\sigma + \dfrac{i}{2}(A_1 - iB_1)\sigma^2, \\[2ex] \dfrac{\partial \sigma}{\partial v} = -\dfrac{i}{2}(A_2 + iB_2) - iC_2\sigma + \dfrac{i}{2}(A_2 - iB_2)\sigma^2, \end{cases}$$

die sowohl von $\sigma = \xi$ als auch von $\sigma = \eta$ erfüllt werden.

Umgekehrt: Wenn diese Gleichungen (3) sowohl für $\sigma = \xi$ als auch für $\sigma = \eta$ bestehen, so erfüllen auch die durch (2) angegebenen Richtungscosinus $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, X die in Satz 21, S. 316, aufgestellten Gleichungen. Wir brauchen dies nur für $\mathfrak{X}_1$ zu zeigen, da der Nachweis für $\mathfrak{X}_2$ und X entsprechend zu führen ist. Nach (2) ist:

$$\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial u} = \frac{\xi_u(\eta^2 - 1) - \eta_u(\xi^2 - 1)}{(\xi - \eta)^2}.$$

Wenn nun ξ und η die Gleichungen (3) für σ erfüllen, so ist:

$$\xi_u = -\frac{i}{2}(A_1 + iB_1) - iC_1\xi + \frac{i}{2}(A_1 - iB_1)\xi^2,$$

$$\eta_u = -\frac{i}{2}(A_1 + iB_1) - iC_1\eta + \frac{i}{2}(A_1 - iB_1)\eta^2,$$

sodass die Substitution dieser Werte liefert:

$$\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial u} = iC_1\frac{1 + \xi\eta}{\xi - \eta} - B_1\frac{\xi + \eta}{\xi - \eta}$$

oder nach (2):

$$\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial u} = C_1\mathfrak{X}_2 - B_1 X.$$

Analog ergiebt sich natürlich

$$\frac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial v} = C_2\mathfrak{X}_2 - B_2 X.$$

Dies aber sind die beiden obersten unter den Gleichungen des Satzes 21.

Wir kennen demnach die allgemeinsten Functionen $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, X von u und v, die den Gleichungen des Satzes 21, S. 316, Genüge leisten, sobald wir die allgemeinste Function σ von u und v kennen, die den beiden Gleichungen (3) Genüge leistet. Denn wir brauchen dann nur für ξ und η zwei

allgemeine Werte von σ zu wählen und haben in (2) unmittelbar die gesuchten Functionen $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}$.

Unsere Aufgabe ist hiernach die: Die allgemeinste Function σ von u und v zu finden, die den beiden Gleichungen (3) genügt. Dabei sind die in (3) auftretenden Coefficienten A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 bekannte Functionen von u und v und zwar solche, die die in Satz 22, S. 320, erwähnten drei Integrabilitätsbedingungen für alle Werte von u und v befriedigen.

Die beiden Gleichungen (3) lassen sich in eine einzige zusammenfassen:

$$(4)\quad \begin{cases} d\sigma = \left[-\frac{i}{2}(A_1 + iB_1) - iC_1\sigma + \frac{i}{2}(A_1 - iB_1)\sigma^2\right]du + \\ \quad + \left[-\frac{i}{2}(A_2 + iB_2) - iC_2\sigma + \frac{i}{2}(A_2 - iB_2)\sigma^2\right]dv. \end{cases}$$

Eine derartige Gleichung, die das totale Differential $d\sigma$ einer unbekannten Function σ von u und v durch bekannte Functionen und durch σ selbst ausdrückt, heisst eine totale Differentialgleichung für σ. Insbesondere tritt σ rechts quadratisch auf. Deshalb nennt man eine totale Differentialgleichung von der Form (4) insbesondere eine totale Riccati'sche Differentialgleichung, indem man eine Bezeichnung aus der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen verallgemeinert. Vgl. hierzu I S. 213, 214. Ganz allgemein heisst eine totale Differentialgleichung für σ eine Riccati'sche, wenn sie die charakteristische Form hat:

$$d\sigma = (\alpha_1 + \beta_1\sigma + \gamma_1\sigma^2)\,du + (\alpha_2 + \beta_2\sigma + \gamma_2\sigma^2)\,dv,$$

wo α_1, β_1, γ_1 und α_2, β_2, γ_2 irgend welche gegebene Functionen von u und v bedeuten. Die Gleichung (4) ordnet sich dieser Form unter.

Die Gleichung (4) fasst die beiden Gleichungen (3) in eine zusammen. Nun kann man σ_{uv} aus der ersten Gleichung (3) durch Differentiation nach v und aus der zweiten Gleichung (3) durch Differentiation nach u berechnen. Beide Werte müssen übereinstimmen. Dies aber giebt die Gleichung:

$$-\tfrac{1}{2}\frac{\partial(A_1 + iB_1)}{\partial v} - \frac{\partial C_1}{\partial v}\sigma + \tfrac{1}{2}\frac{\partial(A_1 - iB_1)}{\partial v}\sigma^2 - C_1\frac{\partial\sigma}{\partial v} + (A_1 - iB_1)\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial v} =$$
$$= -\tfrac{1}{2}\frac{\partial(A_2 + iB_2)}{\partial u} - \frac{\partial C_2}{\partial u}\sigma + \tfrac{1}{2}\frac{\partial(A_2 - iB_2)}{\partial u}\sigma^2 - C_2\frac{\partial\sigma}{\partial u} + (A_2 - iB_2)\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial u}.$$

Setzen wir hierin die Werte von $\frac{\partial\sigma}{\partial u}$ und $\frac{\partial\sigma}{\partial v}$ aus den Gleichungen (3)

selbst ein, so geht eine Gleichung hervor, die vom zweiten Grade in σ ist, da die Coefficienten von σ^3 rechts und links einander aufheben. Die Coefficienten von σ^2 und σ sowie das von σ freie Glied setzen sich, wie die einfache Ausrechnung zeigt, linear aus je zweien derjenigen Ausdrücke zusammen, die in den in Satz 21, S. 317 oben, angegebenen Bedingungen links stehen. Da wir oben ausdrücklich vorausgesetzt haben, dass diese Fundamentalgleichungen für alle Werte von u und v erfüllt seien, so ist auch die soeben aufgestellte Bedingung erfüllt. —

Es fragt sich jetzt, wie wir die allgemeinste Lösung σ der totalen Riccati'schen Differentialgleichung (4) finden können. Weil die Gleichung (4) ziemlich umständlich ist, ist es klarer, wenn wir die Frage verallgemeinern, wenn wir also nach denjenigen Functionen σ fragen, die eine allgemeine totale Differentialgleichung erfüllen.

Eine solche allgemeine totale Differentialgleichung für σ hat die Form:

$$d\sigma = \Phi(u, v, \sigma)\,du + \Psi(u, v, \sigma)\,dv, \tag{5}$$

worin die rechts auftretenden Functionen Φ und Ψ gegebene Functionen von u, v und σ bedeuten sollen. Der Leser kann sich, wenn er will, unter Φ und Ψ abkürzende Bezeichnungen für die in (4) in den eckigen Klammern stehenden Functionen von u, v und σ vorstellen.

Auch unter Zugrundelegung der totalen Differentialgleichung (5) lässt sich σ_{uv} auf zwei Weisen berechnen, denn statt (5) können wir einzeln schreiben:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} = \Phi(u, v, \sigma), \qquad \frac{\partial\sigma}{\partial v} = \Psi(u, v, \sigma).$$

Aus der ersten Gleichung folgt:

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial u\,\partial v} = \Phi_v + \Phi_\sigma \frac{\partial\sigma}{\partial v},$$

aus der zweiten:

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial u\,\partial v} = \Psi_u + \Psi_\sigma \frac{\partial\sigma}{\partial u}.$$

Setzen wir rechts die Werte Φ und Ψ für σ_u und σ_v wieder ein, so giebt Gleichsetzen beider Ausdrücke die Gleichung:

$$\Phi_v + \Phi_\sigma \Psi = \Psi_u + \Psi_\sigma \Phi. \tag{6}$$

Man nennt sie die Integrabilitätsbedingung der totalen Differentialgleichung (5).

Wir sahen vorhin, dass die entsprechende Rechnung für unsere totale RICCATI'sche Differentialgleichung (4) eine Gleichung lieferte, die nach Voraussetzung erfüllt war für alle Werte von u, v und σ.

Daher können wir uns auf solche totale Differentialgleichungen (5) beschränken, deren Integrabilitätsbedingung (6) ebenfalls für alle Werte von u, v und σ erfüllt ist. Eine solche Differentialgleichung heisst eine unbeschränkt integrabele totale Differentialgleichung.

Wir schalten demnach hier in unsere flächentheoretischen Untersuchungen eine Betrachtung der unbeschränkt integrabelen totalen Differentialgleichungen mit zwei unabhängigen Veränderlichen u und v ein. Wir werden erkennen, dass ihre vollständige Integration, d. h. die Bestimmung aller Lösungen σ (u, v), die in (5) links und rechts eingesetzt eine identische Gleichung liefern, auf die Integration zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung zurückgeführt werden kann.[1] —

Betrachten wir die rechte Seite von (5) allein. Käme σ nicht in Φ und Ψ vor, so wäre die rechte Seite ein Differential in u und v. Aber ein solches Differential — wie in I S. 91 das Differential $X dy - Y dx$ — kann man durch Multiplication mit einem gewissen Factor μ zu einem vollständigen Differential machen. Dies wollen wir thun, indem wir uns zunächst unter σ in Φ und Ψ irgend eine Constante vorstellen. Jenen Factor finden wir alsdann dadurch, dass wir die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in u und v:

$$\Phi du + \Psi dv = 0 \tag{7}$$

integrieren. Ist nämlich ω ein Integral und μ der zugehörige Multiplicator, so ist:

$$\omega_u = \mu \Phi, \quad \omega_v = \mu \Psi, \tag{8}$$

während μ nach Satz 60, I S. 92, worin x, y durch u, v und X, Y durch $-\Psi$, Φ zu ersetzen sind, die Bedingung erfüllt:

$$-\Psi \mu_u + \Phi \mu_v = (\Psi_u - \Phi_v)\mu. \tag{9}$$

Da die Differentialgleichung (7) in Φ und Ψ noch die als

[1] Dies zeigte zuerst LAGRANGE, „Méthode générale pour intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre, lorsque ces différences ne sont que linéaires“, Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin 1785. Siehe auch Oeuvres t. 5.

Constante aufgefasste Grösse σ enthält, so werden auch ω und μ ausser u und v noch σ enthalten.

Wir erkennen also: **Durch die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung kann man zwei solche Functionen** $\omega(u, v, \sigma)$ **und** $\mu(u, v, \sigma)$ **finden, die den Gleichungen** (8) **und** (9) **für alle Werte von** u, v, σ **genügen.** Darin bedeuten ω_u, ω_v, μ_u, μ_v die partiellen Ableitungen von ω und μ, die sich ergeben, wenn man σ als eine Constante auffasst.

Nun aber ist die gesuchte Function σ *keine* Constante. Daher ist der *vollständige* Differentialquotient von ω nicht einfach $\omega_u du + \omega_v dv$, sondern:

$$d\omega = \omega_u du + \omega_v dv + \omega_\sigma(\sigma_u du + \sigma_v dv)$$

oder:

$$d\omega = \omega_u du + \omega_v dv + \omega_\sigma d\sigma,$$

sodass sich, wenn wir hierin die Werte (8) einsetzen, ergiebt:

$$d\omega = \mu(\Phi du + \Psi dv) + \omega_\sigma d\sigma,$$

und zwar ist dies für alle Werte von u und v und für *alle* Functionen σ von u und v richtig.

Nach (5) aber soll $d\sigma$ den Wert $\Phi du + \Psi dv$ haben. Die Forderung (5) lässt sich deshalb so schreiben:

$$d\omega = (\mu + \omega_\sigma) d\sigma. \tag{10}$$

σ ist eine uns allerdings noch unbekannte Function von u und v. Setzen wir ihren Wert in ω und $\mu + \omega_\sigma$ für σ ein, so werden ω und $\mu + \omega_\sigma$ Functionen von u und v. Dann also sind ω und σ solche Functionen von u und v, die, wie (10) aussagt, einander proportionale vollständige Differentiale $d\omega$ und $d\sigma$ haben, sodass die Functionaldeterminante von ω und σ hinsichtlich u und v gleich Null ist, d. h. ω eine Function von σ ist — nach Satz 54, I S. 82. Soll es also eine Function $\sigma(u, v)$ geben, die der Forderung (5) oder (10) genügt, so muss ω, nachdem darin für die Function σ ihr Wert in u und v eingesetzt worden ist, eine Function $\lambda(\sigma)$ von σ allein werden, die wir allerdings noch nicht kennen:

$$\omega(u, v, \sigma) = \lambda(\sigma).$$

Dann giebt (10) noch:

$$\lambda'(\sigma) = \mu + \omega_\sigma.$$

Also kommt unser ganzes Problem auf folgendes hinaus:

Es fragt sich, ob wir eine Function λ von σ allein so bestimmen können, dass die durch die Gleichung

$$\omega(u, v, \sigma) = \lambda(\sigma) \tag{11}$$

definierte Function σ von u und v auch die Gleichung

$$\mu + \omega_\sigma = \lambda'(\sigma) \tag{12}$$

erfüllt. Dies ist nun in der That möglich. Wenn wir nämlich zunächst unter $\lambda(\sigma)$ eine beliebige Function von σ allein verstehen und dann σ durch die Gleichung (11) — die wir uns nach σ aufgelöst denken — als Function von u und v definieren und diese Function alsdann in $\mu + \omega_\sigma$ einsetzen, so wird auch $\mu + \omega_\sigma$ eine Function von σ allein. Um dies zu beweisen, haben wir nur zu zeigen, dass die Functionaldeterminante von σ und $\mu + \omega_\sigma$ hinsichtlich u und v gleich Null ist. Sie lautet:

$$\begin{vmatrix} \sigma_u & \mu_u + \mu_\sigma \sigma_u + \omega_{u\sigma} + \omega_{\sigma\sigma}\sigma_u \\ \sigma_v & \mu_v + \mu_\sigma \sigma_v + \omega_{v\sigma} + \omega_{\sigma\sigma}\sigma_v \end{vmatrix}.$$

Es muss nämlich dabei beachtet werden, dass in μ und in ω_σ die Veränderlichen u und v auch in σ auftreten. Die Determinante reduciert sich zunächst auf:

$$\begin{vmatrix} \sigma_u & \mu_u + \omega_{u\sigma} \\ \sigma_v & \mu_v + \omega_{v\sigma} \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Nach (8) ist aber, da diese Gleichungen für alle Werte von u, v, σ richtig sind:

$$\omega_{u\sigma} = \mu_\sigma \Phi + \mu \Phi_\sigma, \qquad \omega_{v\sigma} = \mu_\sigma \Psi + \mu \Psi_\sigma \tag{14}$$

und nach (11):

$$\omega_u + \omega_\sigma \sigma_u = \lambda' \cdot \sigma_u, \qquad \omega_v + \omega_\sigma \sigma_v = \lambda' \cdot \sigma_v$$

oder:

$$\sigma_u = \frac{\omega_u}{\lambda' - \omega_\sigma}, \qquad \sigma_v = \frac{\omega_v}{\lambda' - \omega_\sigma}$$

oder nach (8):

$$\sigma_u = \frac{\mu \Phi}{\lambda' - \omega_\sigma}, \qquad \sigma_v = \frac{\mu \Psi}{\lambda' - \omega_\sigma}. \tag{15}$$

Setzen wir die Werte (14) und (15) in (13) ein, so geht aber eine Determinante hervor, die infolge von (6) und (9) gleich Null ist.

Wie also $\lambda(\sigma)$ als Function von σ gewählt sein mag, stets definiert die Gleichung (11) eine Function σ von u

und v derart, dass $\mu + \omega_\sigma$ ebenfalls eine Function von σ allein wird.

Wenn wir nun die Gleichung (11) nach u auflösen, so stellt sich u als Function von v, σ und $\lambda(\sigma)$ dar. Setzen wir diesen Wert in $\mu + \omega_\sigma$ für u ein, so wird hiernach $\mu + \omega_\sigma$ nur noch σ enthalten, d. h. also auch von v frei sein, sodass sich etwa ergiebt:

$$\mu + \omega_\sigma = \Omega(\sigma, \lambda(\sigma)).$$

Die Bedingung (12) lautet dann so:

$$\Omega(\sigma, \lambda(\sigma)) = \lambda'(\sigma).$$

Dies aber ist nichts anderes als eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für die noch zu bestimmende Function λ von σ, denn wir können die Bedingung ja auch so schreiben:

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = \Omega(\sigma, \lambda).$$

Haben wir sie integriert, also λ aus ihr als Function von σ und einer willkürlichen Constante c bestimmt, so giebt die Gleichung (11) durch Auflösung nach σ für σ eine Function von u, v und c, und diese Function erfüllt die vorgelegte unbeschränkt integrabele totale Differentialgleichung (5).

Wir sind also zu dem Ergebnis gelangt:

Satz 23: Wenn die totale Differentialgleichung für die unbekannte Function σ von u und v:

$$d\sigma = \Phi(u, v, \sigma)\,du + \Psi(u, v, \sigma)\,dv$$

unbeschränkt integrabel ist, d. h. wenn für alle Werte von u, v und σ

$$\Phi_v + \Phi_\sigma \Psi = \Psi_u + \Psi_\sigma \Phi$$

ist, so findet man den allgemeinsten Wert von σ so: Man bestimmt ein Integral ω der Gleichung:

$$\Phi(u, v, \sigma)\,du + \Psi(u, v, \sigma)\,dv = 0,$$

die man als eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung in u und v auffasst, indem dabei σ die Rolle einer willkürlichen Constanten spielt, sodass ω eine Function von u, v und σ wird, zu der ein Multiplicator $\mu(u, v, \sigma)$ gehört derart, dass für alle Werte von u, v und σ

$$\omega_u = \mu\,\Phi, \qquad \omega_v = \mu\,\Psi$$

ist. Alsdann setzt man den aus

$$\omega(u, v, \sigma) = \lambda$$

durch Auflösen nach u hervorgehenden Wert von u in die Function $\mu + \omega_\sigma$ für u ein, wodurch sie in eine von v freie Function von σ und λ übergeht:

$$\mu + \omega_\sigma = \Omega(\sigma, \lambda).$$

Darauf bildet man die gewöhnliche Differentialgleichung in σ und λ:

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = \Omega(\sigma, \lambda)$$

und berechnet ihre allgemeinste Lösung λ, die eine Function von σ und einer willkürlichen Constanten c ist. Durch Auflösen der Gleichung:

$$\omega(u, v, \sigma) = \lambda(\sigma, c)$$

nach σ ergiebt sich dann die allgemeinste Lösung der vorgelegten totalen Differentialgleichung. Diese Lösung ist bis auf die in ihr auftretende willkürliche Contante c völlig bestimmt.

Nach dieser notwendigen Einschaltung kehren wir zu der unbeschränkt integrabelen totalen Riccati'schen Gleichung (4) für σ zurück. Unser Satz lehrt, dass man die allgemeinste Lösung σ dieser Gleichung durch successive Integration zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung in je zwei Veränderlichen und zwei Eliminationen bestimmen kann. Diese Lösung enthält eine willkürliche Constante c. Da aber die Gleichung (4) rechts in σ quadratisch ist, so kann man leicht sehen, dass die Lösung linear gebrochen in c ist — genau so, wie wir dies bei einer gewöhnlichen Riccati'schen Differentialgleichung in Satz 24, I S. 215, erkannten. Wie in I S. 214 verstehen wir nämlich unter P, Q, R irgend drei specielle Lösungen der totalen Differentialgleichung (4) und betrachten das dort in (18) mit τ bezeichnete Doppelverhältnis aus σ, P, Q und R. Wenn wir es logarithmisch nach u oder v differenzieren und dann σ_u, P_u, Q_u, R_u oder σ_v, P_v, Q_v, R_v mittels der Gleichung (4), der ja σ, P, Q und R genügen, ausdrücken, so finden wir gerade so wie damals, dass τ eine Constante ist, woraus alles Übrige folgt. Also:

Satz 24: Die allgemeine Lösung σ einer unbeschränkt integrabelen totalen Riccati'schen Differentialgleichung

mit den unabhängigen Veränderlichen u und v hat die Form:

$$\sigma = \frac{p(u,v)c + q(u,v)}{\pi(u,v)c + \varkappa(u,v)}$$

mit der willkürlichen Constanten c.

§ 9. Endliche Gleichungen einer Fläche mit gegebenen Fundamentalgrössen.[1]

Wir haben im vorigen Paragraphen erkannt, dass unser Problem, aus gegebenen Fundamentalgrössen die Fläche zu bestimmen, zunächst die Integration einer unbeschränkt integrabelen totalen Riccati'schen Differentialgleichung (4), S. 324, verlangt. Wir fanden, dass diese Integration durch successive Integration zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung und zwei Eliminationen geleistet werden kann. Jetzt wollen wir annehmen, diese Integration sei erledigt. Nach unserem letzten Satze heisst dies, dass wir annehmen, wir hätten gefunden, dass die allgemeine Lösung σ jener Gleichung diese ist:

$$\sigma = \frac{p(u,v)c + q(u,v)}{\pi(u,v)c + \varkappa(u,v)}, \tag{1}$$

worin p, q, π, $\varkappa$ nunmehr bekannte Functionen von u und v seien und c eine willkürliche Constante bedeute.

Um nun $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ und X zu berechnen, brauchen wir zwei Lösungen ξ und η der Riccati'schen Gleichung. Wir geben daher der Constanten c in (1) zwei Werte a und b und setzen an:

$$\xi = \frac{pa + q}{\pi a + \varkappa}, \qquad \eta = \frac{pb + q}{\pi b + \varkappa}.$$

Alsdann setzen wir diese Werte in die Formeln (2), S. 322, ein. Wie wir schon auf S. 323 zeigten, sind wir dann sicher, dass die so hervorgehenden Functionen $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, X von u, v und den beiden Constanten a, b die in Satz 21, S. 316, für $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, X aufgestellten Gleichungen erfüllen.

Nun aber gelten die soeben erwähnten Gleichungen auch für $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Y}_2$, Y und $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$, Z, wenn diese statt $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$, X gesetzt werden. Wir brauchen daher nicht nur ein Constantenpaar a, b, sondern deren drei: a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 und setzen an:

---

[1] Vgl. die Anm. zu S. 310.

(2) $$\xi_i = \frac{p\,a_i + q}{\pi\,a_i + \varkappa}, \qquad \eta_i = \frac{p\,b_i + q}{\pi\,b_i + \varkappa}\ (i = 1, 2, 3);$$

diese Werte sind dann nach (2), S. 322, in die Formeln einzutragen:

(3) $$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{X}_1 &= \frac{1-\xi_1\eta_1}{\xi_1-\eta_1}, & \mathfrak{X}_2 &= i\,\frac{1+\xi_1\eta_1}{\xi_1-\eta_1}, & X &= \frac{\xi_1+\eta_1}{\xi_1-\eta_1}; \\ \mathfrak{Y}_1 &= \frac{1-\xi_2\eta_2}{\xi_2-\eta_2}, & \mathfrak{Y}_2 &= i\,\frac{1+\xi_2\eta_2}{\xi_2-\eta_2}, & Y &= \frac{\xi_2+\eta_2}{\xi_2-\eta_2}; \\ \mathfrak{Z}_1 &= \frac{1-\xi_3\eta_3}{\xi_3-\eta_3}, & \mathfrak{Z}_2 &= i\,\frac{1+\xi_3\eta_3}{\xi_3-\eta_3}, & Z &= \frac{\xi_3+\eta_3}{\xi_3-\eta_3}. \end{aligned}\right.$$

Alsdann sind die neun Richtungscosinus als Functionen von u, v und von je zwei willkürlichen Constanten a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 bestimmt.

Aber diese Constanten dürfen nicht ganz beliebig gewählt werden. Die neun Richtungscosinus müssen ja die Bedingungen der Orthogonalität erfüllen. Sind die Cosinus die dreier zu einander senkrechter Richtungen, so können wir die drei Richtungen als neue Axen wählen. Alsdann hat die alte x-Axe in diesem neuen System die Richtungscosinus $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, X$, die alte y-Axe die Cosinus $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, Y$ und die alte z-Axe die Cosinus $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, Z$. Es muss also erstens

$$\mathfrak{X}_1^2 + \mathfrak{X}_2^2 + X^2 = 1, \quad \mathfrak{Y}_1^2 + \mathfrak{Y}_2^2 + Y^2 = 1, \quad \mathfrak{Z}_1^2 + \mathfrak{Z}_2^2 + Z = 1$$

sein. Dies ist aber nach (3) der Fall. Zweitens müssen, da die alten Axen auf einander paarweis senkrecht stehen, die Orthogonalitätsbedingungen für je zwei erfüllt sein. So muss zunächst

$$\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Y}_2\mathfrak{Z}_2 + YZ = 0$$

sein. Dies führt, wie in I S. 217 die Bedingung $\beta\gamma + mn + \mu\nu = 0$, zu der Forderung:

$$\frac{\xi_2-\xi_3}{\xi_2-\eta_3} : \frac{\eta_2-\xi_3}{\eta_2-\eta_3} = -1 \qquad \text{oder:} \qquad \frac{a_2-a_3}{a_2-b_3} : \frac{b_2-a_3}{b_2-b_3} = -1,$$

die aussagt, dass die Wertepaare ξ_2, η_2 und ξ_3, η_3 oder a_2, b_2 und a_3, b_3 einander h a r m o n i s c h t r e n n e n müssen. Entsprechendes geben die Forderungen:

$$\mathfrak{Z}_1\mathfrak{X}_1 + \mathfrak{Z}_2\mathfrak{X}_2 + ZX = 0, \quad \mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1 + \mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_2 + XY = 0.$$

Mithin müssen wir die drei Constantenpaare

$$a_1, b_1; \qquad a_2, b_2; \qquad a_3, b_3$$

so wählen, dass jedes Paar jedes andere harmonisch trennt. Als-

dann sind, da die Beziehung zwischen dem alten Axenkreuz und dem neuen Dreikant umkehrbar ist, alle Orthogonalitätsbedingungen erfüllt.

Aber auch jene Bedingung ist zu erfüllen, die aussagt, dass die Kanten des Dreikants so zu einander orientiert sind wie die Coordiatenaxen — vgl. (7), S. 311. Wenn wir in (3) die Werte (2) einsetzen, so kommt

$$(4)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_1 = \dfrac{(\pi^2 - p^2) a_1 b_1 + (\pi\varkappa - pq)(a_1 + b_1) + (\varkappa^2 - q^2)}{(p\varkappa - q\pi)(a_1 - b_1)}, \\ \mathfrak{X}_2 = i\,\dfrac{(\pi^2 + p^2) a_1 b_1 + (\pi\varkappa + pq)(a_1 + b_1) + (\varkappa^2 + q^2)}{(p\varkappa - q\pi)(a_1 - b_1)}, \\ X = \dfrac{2\pi p a_1 b_1 + (p\varkappa + q\pi)(a_1 + b_1) + 2\varkappa q}{(p\varkappa - q\pi)(a_1 - b_1)}. \end{cases}$$

und die Werte für $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Y}_2$, Y bez. $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$, Z gehen hieraus durch Ersetzen des Index 1 durch 2 bez. 3 hervor. Bilden wir jetzt die Determinante der Richtungscosinus, so sondert sich nach dem Multiplicationsgesetz der Determinanten eine Determinante ab, die nur p, q, π, $\varkappa$ enthält und, wie ihre Ausrechnung lehrt, eine Constante ist. Es kommt so:

$$(5)\quad \begin{vmatrix} \mathfrak{X}_1 & \mathfrak{X}_2 & X \\ \mathfrak{Y}_1 & \mathfrak{Y}_2 & Y \\ \mathfrak{Z}_1 & \mathfrak{Z}_2 & Z \end{vmatrix} = \frac{-2i}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)} \begin{vmatrix} 1 & a_1 + b_1 & a_1 b_1 \\ 1 & a_2 + b_2 & a_2 b_2 \\ 1 & a_3 + b_3 & a_3 b_3 \end{vmatrix}.$$

Da die drei Richtungen auf einander senkrecht stehen, so ist dieser Ausdruck sicher gleich ± 1, vgl. I S. 146. Wir wissen also, dass der Ausdruck

$$\frac{1}{(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)} \begin{vmatrix} 1 & a_1 + b_1 & a_1 b_1 \\ 1 & a_2 + b_2 & a_2 b_2 \\ 1 & a_3 + b_3 & a_3 b_3 \end{vmatrix}$$

gleich $\pm 2i$ ist, sobald die Constantenpaare a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 so gewählt sind, dass sie einander harmonisch trennen. Es ist nun zu beachten, dass der in (5) explicite auftretende Factor i schon in der Riccati'schen totalen Differentialgleichung vorkommt, also nicht durch $-i$ ersetzt werden darf. Wohl aber können wir bei der Auswahl der Constanten, die ja von der Riccati'schen Gleichung völlig unabhängig ist, die Grösse i durch $-i$ ersetzen, wenn es nötig wäre.

Wir können also immer erreichen, dass die Determinante (5) gerade den gewünschten Wert $+1$ erhält.[1]

Wir haben jetzt die Richtungscosinus $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1$; $\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Z}_2$; X, Y, Z in allgemeinster Weise so als Functionen von u und v bestimmt, dass sie erstens den in Satz 21, S. 316, aufgestellten Gleichungen genügen und zweitens die Cosinus solcher dreier zu einander senkrechter Richtungen sind, die gerade so wie die Coordinatenaxen gegen einander orientiert sind.

Ehe wir nun den letzten Schritt thun, nämlich auch die Coordinaten x, y, z selbst als Functionen von u und v bestimmen, wollen wir zur thatsächlichen Berechnung brauchbare Formeln angeben, indem wir wieder wie auf S. 319 das begleitende Dreikant speciell wählen — was wir ja stets thun dürfen —. Wie dort nehmen wir $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Z}_2$ in der Form (19) an, sodass A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 die Werte (23), S. 320, haben. Danach und nach (4), S. 324, lautet die zu integrierende unbeschränkt integrabele Riccati'sche totale Differentialgleichung jetzt so:

$$(6)\quad \begin{cases} d\sigma = \left[-\dfrac{(D-iF)L+iEM}{2D\sqrt{E}} + i\dfrac{E_uF+E_vE-2F_uE}{2DE}\,\sigma - \dfrac{(D+iF)L-iEM}{2D\sqrt{E}}\,\sigma^2 \right] du + \\ \quad + \left[-\dfrac{(D-iF)M+iEN}{2D\sqrt{E}} + i\dfrac{E_vF-G_uE}{2DE}\,\sigma - \dfrac{(D+iF)M-iEN}{2D\sqrt{E}}\,\sigma^2 \right] dv. \end{cases}$$

Ist nun wie oben in (1):

$$\sigma = \frac{p(u,v)\,c + q(u,v)}{\pi(u,v)\,c + \varkappa(u,v)}$$

die allgemeine Lösung dieser Riccati'schen Gleichung (6), und bestimmt man die Constantenpaare a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 so, wie es oben auseinandergesetzt wurde, so liegen in (4) die allgemeinsten Werte der Richtungscosinus $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, X$ vor, die den Gleichungen (21) und (22), S. 320, genügen, und $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, Y$ sowie $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, Z$ gehen aus (4) dadurch hervor, dass man a_1, b_1 darin durch a_2, b_2 bez. a_3, b_3 ersetzt.

Um nun x, y, z selbst zu finden, müssen wir die Gleichungen (20) auf S. 319 benutzen. Die beiden links stehenden lauten:

$$x_u = \sqrt{E}\,\mathfrak{X}_1, \qquad x_v = \frac{F\mathfrak{X}_1 + D\mathfrak{X}_2}{\sqrt{E}}.$$

---

[1] Eine entsprechende Bemerkung wäre zu den Gleichungen (5), I S. 216, zu machen. Sie ist damals vergessen worden.

und geben durch eine Quadratur:

$$x = \int \left(\sqrt{E}\, \mathfrak{X}_1\, du + \frac{F\mathfrak{X}_1 + D\mathfrak{X}_2}{\sqrt{E}}\, dv \right). \tag{7}$$

Der unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck ist nämlich ein vollständiges Differential, weil wir auf S. 321 oben sahen, dass die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial v} x_u = \frac{\partial}{\partial u} x_v$$

infolge des Bestehens der Gleichungen (21), (22) auf S. 320 erfüllt ist, diese Gleichungen aber durch die gefundenen Werte von $\mathfrak{X}_1$, $\mathfrak{X}_2$ und X befriedigt werden.

Analog bestimmen sich y und z.

Hieraus erhellt also, dass es thatsächlich Flächen giebt, deren Fundamentalgrössen die vorgeschriebenen Werte E, F, G, L, M, N haben; denn dass die gefundene Fläche diese Fundamentalgrössen hat, ist leicht zu erkennen: Wir wissen, dass die Coordinaten x, y, z den Gleichungen (20), S. 319, genügen. Nach (20) ist aber:

$$\mathbf{S}\, x_u^2 = E(\mathfrak{X}_1^2 + \mathfrak{Y}_1^2 + \mathfrak{Z}_1^2) = E,$$

also ist nach XI (A) die erste Fundamentalgrösse erster Ordnung wirklich gleich E. Ebenso beweist man, dass F und G Fundamentalgrössen sind. Ferner ist nach (20) und (21), S. 321:

$$\mathbf{S}\, X_u x_u = -L(\mathfrak{X}_1^2 + \mathfrak{Y}_1^2 + \mathfrak{Z}_1^2) - \frac{EM - FL}{D}(\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_2 + \mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_2 + \mathfrak{Z}_1\mathfrak{Z}_2).$$

Die erste Klammer ist gleich Eins, die zweite gleich Null. Daher kommt:

$$\mathbf{S}\, X_u x_u = -L,$$

sodass L nach XII (C) wirklich die erste Fundamentalgrösse zweiter Ordnung ist. Entsprechend ist der Nachweis für M und N.

Da in den für die Richtungscosinus gefundenen Werten noch die Constanten $a_1, b_1;\ a_2, b_2;\ a_3, b_3$ auftreten, so giebt es unendlich viele Flächen mit den gegebenen Fundamentalgrössen. Wir können nachweisen, dass sie alle mit einander congruent sind.

Denn wir können die in (4) angegebenen Werte von $\mathfrak{X}_1$ und $\mathfrak{X}_2$ sowie die entsprechend zu bildenden Werte von $\mathfrak{Y}_1$ und $\mathfrak{Y}_2$ und die von $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ noch etwas anders schreiben. Setzen wir nämlich:

$$(8)\quad \begin{cases} \dfrac{1-a_1 b_1}{a_1-b_1}=\alpha_1, & i\dfrac{1+a_1 b_1}{a_1-b_1}=\alpha_2, & \dfrac{a_1+b_1}{a_1-b_1}=\alpha_3, \\ \dfrac{1-a_2 b_2}{a_2-b_2}=\beta_1, & i\dfrac{1+a_2 b_2}{a_2-b_2}=\beta_2, & \dfrac{a_2+b_2}{a_2-b_2}=\beta_3, \\ \dfrac{1-a_3 b_3}{a_3-b_3}=\gamma_1, & i\dfrac{1+a_3 b_3}{a_3-b_3}=\gamma_2, & \dfrac{a_3+b_3}{a_3-b_3}=\gamma_3, \end{cases}$$

so kommt:

$$(9)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_1 = \dfrac{p^2-\pi^2-q^2+\varkappa^2}{2(p\varkappa-q\pi)}\alpha_1 + \dfrac{i(p^2-\pi^2+q^2-\varkappa^2)}{2(p\varkappa-q\pi)}\alpha_2 + \dfrac{\pi\varkappa-qp}{p\varkappa-q\pi}\alpha_3, \\ \mathfrak{X}_2 = \dfrac{-i(p^2+\pi^2-q^2-\varkappa^2)}{2(p\varkappa-q\pi)}\alpha_1 + \dfrac{p^2+\pi^2+q^2+\varkappa^2}{2(p\varkappa-q\pi)}\alpha_2 + \dfrac{i(\pi\varkappa+qp)}{p\varkappa-q\pi}\alpha_3. \end{cases}$$

Ersetzen wir die α durch die β oder durch die γ, so gehen die Werte von $\mathfrak{Y}_1$ und $\mathfrak{Y}_2$ bez. $\mathfrak{Z}_1$ und $\mathfrak{Z}_2$ hervor.

Nun wissen wir, dass die Wertepaare a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 einander harmonisch trennen. Dies ist aber nichts anderes als der Ausdruck dafür, dass zwischen den neuen Constanten α, β, γ die Relationen bestehen:

$$\beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0, \quad \gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3=0,$$
$$\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0.$$

Ferner ist nach (8):

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1, \quad \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1, \quad \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1.$$

Ausserdem ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 1$$

nach dem Früheren (vgl. (5)). Mithin folgt: Die neun Constanten α, β, γ sind nichts anderes als die Richtungscosinus dreier zu einander senkrechter Richtungen, die ebenso wie die Coordinatenaxen gegen einander orientiert sind. Umgekehrt: Wählen wir als Werte der Grössen α, β, γ die Richtungscosinus solcher dreier Richtungen beliebig, so heisst dies nach (8), dass wir die Constanten a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 so gewählt haben, dass die Paare einander harmonisch trennen. Insbesondere erhalten wir also eine specielle Lösung unseres Problems, wenn wir die drei Richtungen als die der Coordinatenaxen wählen, also $\alpha_1=\beta_2=\gamma_3=1$ und alle anderen α, β, γ gleich Null setzen. Dann kommt nach (9) und den entsprechenden Formeln für $\mathfrak{Y}_1$, $\mathfrak{Y}_2$ und $\mathfrak{Z}_1$, $\mathfrak{Z}_2$ einfacher,

wenn wir bei dieser speciellen Wahl überstrichene Buchstaben benutzen:

$$(10)\quad \begin{cases} \bar{\mathfrak{X}}_1 = \dfrac{p^2 - \pi^2 - q^2 + \varkappa^2}{2(p\varkappa - q\pi)}, & \bar{\mathfrak{X}}_2 = -\dfrac{i(p^2 + \pi^2 - q^2 - \varkappa^2)}{2(p\varkappa - q\pi)}; \\ \bar{\mathfrak{Y}}_1 = \dfrac{i(p^2 - \pi^2 + q^2 - \varkappa^2)}{2(p\varkappa - q\pi)}, & \bar{\mathfrak{Y}}_2 = \dfrac{p^2 + \pi^2 + q^2 + \varkappa^2}{2(p\varkappa - q\pi)}; \\ \bar{\mathfrak{Z}}_1 = \dfrac{\pi\varkappa - qp}{p\varkappa - q\pi}, & \bar{\mathfrak{Z}}_2 = \dfrac{i(\pi\varkappa + qp)}{p\varkappa - q\pi}. \end{cases}$$

Nach (7) stellen dann die mit diesen Grössen gebildeten Gleichungen:

$$(11)\quad \begin{cases} \bar{x} = \displaystyle\int \frac{E\bar{\mathfrak{X}}_1\,du + (F\bar{\mathfrak{X}}_1 + D\bar{\mathfrak{X}}_2)\,dv}{\sqrt{E}}, \\ \bar{y} = \displaystyle\int \frac{E\bar{\mathfrak{Y}}_1\,du + (F\bar{\mathfrak{Y}}_1 + D\bar{\mathfrak{Y}}_2)\,dv}{\sqrt{E}}, \\ \bar{z} = \displaystyle\int \frac{E\bar{\mathfrak{Z}}_1\,du + (F\bar{\mathfrak{Z}}_1 + D\bar{\mathfrak{Z}}_2)\,dv}{\sqrt{E}} \end{cases}$$

in den laufenden Coordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ die Gleichungen einer speciellen Fläche mit den gegebenen Fundamentalgrössen dar.

Da sich nun die allgemeinen Werte der Richtungscosinus nach (9) und den entsprechenden Gleichungen für $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2$ und $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2$ aus den speciellen Werten (10) linear mit den Coefficienten α, β, γ zusammensetzen, so findet man nach (7), dass sich die laufenden Coordinaten der allgemeinsten Fläche mit den gegebenen Fundamentalgrössen ebenso aus $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ zusammensetzen, nämlich so:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1\bar{x} + \alpha_2\bar{y} + \alpha_3\bar{z} + \text{Const.}, \\ y &= \beta_1\bar{x} + \beta_2\bar{y} + \beta_3\bar{z} + \text{Const.}, \\ z &= \gamma_1\bar{x} + \gamma_2\bar{y} + \gamma_3\bar{z} + \text{Const.} \end{aligned}$$

Nach Tafel I heisst dies aber nichts anderes, als dass die Fläche der Punkte (x, y, z) aus der Fläche (11) durch eine Bewegung hervorgeht; oder: Die allgemeinste Fläche, die zu den gegebenen Fundamentalgrössen gehört, ist mit der speciellen Fläche (11) congruent.

Das Umgekehrte haben wir schon früher erkannt, vgl. Satz 6, S. 16, und Satz 5, S. 107, nämlich: Wenn zwei Flächen congruent sind und homologe Punkte zu denselben Parameterwerten gehören, so haben beide Flächen dieselben Fundamentalgrössen.

Erinnern wir uns jetzt daran, dass wir von den gegebenen Fundamentalgrössen nur das Eine voraussetzten, dass sie den drei Fundamentalgleichungen genügen (vgl. S. 322), so gelangen wir zu dem

Satz 25:[1] Sind E, F, G, L, M, N solche Functionen von zwei Parametern u und v, die den drei Fundamentalgleichungen genügen, so giebt es unendlich viele Flächen, die diese Functionen zu Fundamentalgrössen haben. Alle diese Flächen sind mit einander congruent; aus einer von ihnen findet man alle übrigen, wenn man alle Bewegungen des Raumes auf sie ausübt.

Ferner folgt:

Satz 26: Sechs Functionen E, F, G, L, M, N von zwei Veränderlichen u und v sind dann und nur dann die Fundamentalgrössen einer Fläche, wenn sie die drei Fundamentalgleichungen erfüllen.

Nach S. 309 unten können wir auch sagen:

Satz 27: Stimmen zwei Flächen, die keine Tangentenflächen von Minimalcurven sind, in ihren Differentialinvarianten gegenüber allen Bewegungen überein, so sind sie congruent.

Was nämlich die Tangentenflächen von Minimalcurven anbetrifft, so sind sie hier ausgeschlossen, da ihnen keine Fundamentalgrössen zweiter Ordnung zukommen (S. 107) und wir ihre Differentialinvarianten nicht untersucht haben. Zwei solche Flächen sind übrigens offenbar dann und nur dann congruent, wenn es ihre beiden Minimalcurven sind. Aber da wir die Theorie der Differentialinvarianten der Minimalcurven nicht entwickelt haben (vgl. I S. 346), so können wir unseren Satz auch nicht auf diese ausdehnen.

Die Art der Bestimmung der Flächen mit vorgeschriebenen Fundamentalgrössen mag hier noch kurz in einem Satze zusammengefasst werden:

Satz 28: Um alle Flächen zu bestimmen, die solche vorgeschriebene Fundamentalgrössen E, F, G, L, M, N haben, die den drei Fundamentalgleichungen genügen, kann man so verfahren: Man integriert zunächst die unbeschränkt integrabele totale Riccati'sche Gleichung für σ:

$$d\sigma = \left[-\frac{(D-iF)L+iEM}{2D\sqrt{E}} + i\frac{E_u F + E_v E - 2F_u E}{2DE}\sigma - \frac{(D+iF)L-iEM}{2D\sqrt{E}}\sigma^2\right]du +$$
$$+ \left[-\frac{(D-iF)M+iEN}{2D\sqrt{E}} + i\frac{E_v F - G_u E}{2DE}\sigma - \frac{(D+iF)M-iEN}{2D\sqrt{E}}\sigma^2\right]dv.$$

[1] Satz von Bonnet, „Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée", Journ. de l'École polyt., cah. 42 (1867).

was durch successive Integration zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung in je zwei Veränderlichen und zwei Eliminationen gelingt. Ihre allgemeine Lösung σ enthält eine willkürliche Constante c in dieser Art:

$$\sigma = \frac{p(u,v)\,c + q(u,v)}{\pi(u,v)\,c + \varkappa(u,v)}.$$

Nunmehr berechnet man:

$$\mathfrak{X}_1 = \frac{p^2 - \pi^2 - q^2 + \varkappa^2}{2(p\varkappa - q\pi)}, \qquad \mathfrak{X}_2 = -\frac{i(p^2 + \pi^2 - q^2 - \varkappa^2)}{2(p\varkappa - q\pi)};$$

$$\mathfrak{Y}_1 = \frac{i(p^2 - \pi^2 + q^2 - \varkappa^2)}{2(p\varkappa - q\pi)}, \qquad \mathfrak{Y}_2 = \frac{p^2 + \pi^2 + q^2 + \varkappa^2}{2(p\varkappa - q\pi)};$$

$$\mathfrak{Z}_1 = \frac{\pi\varkappa - qp}{p\varkappa - q\pi}, \qquad \mathfrak{Z}_2 = \frac{i(\pi\varkappa + qp)}{p\varkappa - q\varkappa}.$$

Alsdann geben die Quadraturen:

$$x = \int \frac{E\mathfrak{X}_1\,du + (F\mathfrak{X}_1 + D\mathfrak{X}_2)\,dv}{\sqrt{E}},$$

$$y = \int \frac{E\mathfrak{Y}_1\,du + (F\mathfrak{Y}_1 + D\mathfrak{Y}_2)\,dv}{\sqrt{E}},$$

$$z = \int \frac{E\mathfrak{Z}_1\,du + (F\mathfrak{Z}_1 + D\mathfrak{Z}_2)\,dv}{\sqrt{E}}$$

die Gleichungen einer Fläche der verlangten Art. Alle übrigen erhält man, wenn man diese Fläche den Bewegungen des Raumes unterwirft.

Man wird bemerken, dass die Formeln dieses Satzes in dreierlei Hinsicht nicht vollkommen sind:

Erstens sind sie nicht symmetrisch hinsichtlich u und v. Dies hat seinen Grund darin, dass wir das begleitende Dreikant nicht symmetrisch hinsichtlich der Parameterlinien gewählt haben. Symmetrische Formeln würden sich z. B. ergeben, wenn wir als die beiden ersten Kanten des begleitenden Dreikants diejenigen Tangenten des Flächenpunktes (u, v) wählten, von denen die Winkel der Parameterlinien halbiert werden. Aber dadurch ergeben sich noch umständlichere Formeln. Die unsrigen sind schon compliciert genug. Die Aufstellung symmetrischer Formeln in der angedeuteten Weise ist eine gute Übung für den Leser.

Zweitens lehrt der Satz auch die Bestimmung von reellen Flächen nur auf dem Umweg durch das Imaginäre, da in der Riccati'schen Gleichung und weiterhin i auftritt. Dies ist jedoch

unvermeidlich, wenn man das Problem auf die Integration einer RICCATI'schen Gleichung zurückführen will, was hier nicht weiter begründet werden kann.

Drittens endlich versagen die Formeln, wenn $E = 0$ ist, d. h. wenn die Parameterlinien (v) die Bogenlänge Null haben und also Minimalcurven sind; denn E tritt überall im Nenner auf. D tritt allerdings auch im Nenner auf, aber es ist $D \neq 0$ nach Satz 9, S. 29. Im Falle $E = 0$, $G \neq 0$ kann man aber doch zu brauchbaren Formeln gelangen, wenn man einfach u mit v vertauscht.

Wenn dagegen $E = G = 0$ ist, sodass also die Parameterlinien (u) und (v) Minimalcurven sind, hilft dies nichts. Man kann alsdann entweder z. B. $u + v$ und u als neue Parameter benutzen, was keine grossen Schwierigkeiten macht, oder aber man wählt dann ein anderes begleitendes Dreikant. Wir wollen die nötigen Formeln für diesen Fall

$$E = G = 0$$

kurz angeben: Aus (4) und (6), S. 311, ziehen wir in diesem Fall, indem wir $k = 1$ annehmen:

$$(12)\quad \begin{cases} \mathfrak{X}_1 = \dfrac{x_u + x_v}{\sqrt{2F}}, & \mathfrak{Y}_1 = \dfrac{y_u + y_v}{\sqrt{2F}}, & \mathfrak{Z}_1 = \dfrac{z_u + z_v}{\sqrt{2F}}, \\ \mathfrak{X}_2 = i\dfrac{x_u - x_v}{\sqrt{2F}}, & \mathfrak{Y}_2 = i\dfrac{y_u - y_v}{\sqrt{2F}}, & \mathfrak{Z}_2 = i\dfrac{z_u - z_v}{\sqrt{2F}}, \end{cases}$$

sodass

$$(13)\qquad x_u = \tfrac{1}{2}\sqrt{2F}(\mathfrak{X}_1 - i\mathfrak{X}_2), \quad x_v = \tfrac{1}{2}\sqrt{2F}(\mathfrak{X}_1 + i\mathfrak{X}_2)$$

u. s. w. ist. Bilden wir jetzt, wie auf S. 312 auseinandergesetzt wurde, die Ableitungen der Richtungscosinus, indem wir dabei die einfacheren Formeln (2) und (3) auf S. 266 benutzen, so kommt:

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial u} = -i\dfrac{F_u}{2F}\mathfrak{X}_2 + \dfrac{L+M}{\sqrt{2F}}X, & \dfrac{\partial \mathfrak{X}_1}{\partial v} = i\dfrac{F_v}{2F}\mathfrak{X}_2 + \dfrac{M+N}{\sqrt{2F}}X; \\ \dfrac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial u} = i\dfrac{L-M}{\sqrt{2F}}X + i\dfrac{F_u}{2F}\mathfrak{X}_1, & \dfrac{\partial \mathfrak{X}_2}{\partial v} = i\dfrac{M-N}{\sqrt{2F}}X - i\dfrac{F_v}{2F}\mathfrak{X}_1; \\ \dfrac{\partial X}{\partial u} = -\dfrac{L+M}{\sqrt{2F}}\mathfrak{X}_1 - i\dfrac{L-M}{\sqrt{2F}}\mathfrak{X}_2, & \dfrac{\partial X}{\partial v} = -\dfrac{M+N}{\sqrt{2F}}\mathfrak{X}_1 - i\dfrac{M-N}{\sqrt{2F}}\mathfrak{X}_2. \end{cases}$$

Die RICCATI'sche Gleichung (4), S. 324, lautet demnach so:

$$(15)\quad \begin{cases} d\sigma = \left[-\dfrac{M}{\sqrt{2F}} - \dfrac{F_u}{2F}\sigma - \dfrac{L}{\sqrt{2F}}\sigma^2\right]du + \\ \qquad + \left[-\dfrac{N}{\sqrt{2F}} + \dfrac{F_v}{2F}\sigma - \dfrac{M}{\sqrt{2F}}\sigma^2\right]dv. \end{cases}$$

Ist:

$$\sigma = \frac{p c + q}{\pi c + \varkappa}$$

ihre allgemeine Lösung, so gelten wieder die obigen Formeln (10) für die Richtungscosinus, während sich nach (13) für die Fläche statt (11) ergiebt:

$$(16) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2}\int \sqrt{2F}\,[(\mathfrak{X}_1 - i\mathfrak{X}_2)\,du + (\mathfrak{X}_1 + i\mathfrak{X}_2)\,dv], \\ y = \frac{1}{2}\int \sqrt{2F}\,[(\mathfrak{Y}_1 - i\mathfrak{Y}_2)\,du + (\mathfrak{Y}_1 + i\mathfrak{Y}_2)\,dv], \\ z = \frac{1}{2}\int \sqrt{2F}\,[(\mathfrak{Z}_1 - i\mathfrak{Z}_2)\,du + (\mathfrak{Z}_1 + i\mathfrak{Z}_2)\,dv]. \end{cases}$$

Man sieht, dass hier wegen der symmetrischen Wahl des begleitenden Dreikants die Formeln symmetrisch ausgefallen sind.

Schliesslich wollen wir noch einmal an ein früheres Ergebnis, S. 325, erinnern:

Satz 29: Die Integrabilitätsbedingungen derjenigen totalen Riccati'schen Gleichung, die bei dem Problem auftritt, alle Flächen mit gegebenen Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung zu bestimmen, sind die drei Fundamentalgleichungen.

§ 10. **Merkmale für die Congruenz zweier Flächen.**

Die Frage, wie man entscheidet, ob zwei gegebene Flächen einander congruent sind, ist durch die bisherigen Betrachtungen noch keineswegs vollständig erledigt worden; denn wir wissen bis jetzt nur folgendes:

Man muss untersuchen, ob man auf der einen Fläche in der Art neue Parameter einführen kann, dass alsdann ihre Fundamentalgrössen, gebildet für die neue Parameterdarstellung, mit denen der anderen Fläche übereinstimmen. (Vgl. Satz 25, S. 338.) Giebt es solche neue Parameter, so sind die Flächen einander congruent, sonst nicht.[1]

Es bleibt also noch die Schwierigkeit, wie man erkennt, ob es möglich ist, neue Parameter in der gewünschten Weise einzuführen. Diese Frage soll jetzt erledigt werden.

---

[1] Eine erschöpfende Theorie der Congruenz zweier Flächen hat erst Lie gegeben: „Zur Invariantentheorie der Gruppe der Bewegungen", Leipziger Berichte 1896.

Der innere Grund jener Schwierigkeit ist der, dass die Fundamentalgrössen zwar ungeändert bleiben, wenn man die Fläche einer Bewegung unterwirft (nach Satz 19, S. 307), dass sie sich aber ändern, wenn man auf der Fläche neue Parameter einführt. Die Sachlage wird deshalb erheblich vereinfacht, sobald man solche Grössen benutzt, die nicht nur bei allen Bewegungen, sodern auch dann ungeändert bleiben, wenn man neue Parameter auf der Fläche einführt. Man könnte solche Grössen Differentialinvarianten der Fläche hinsichtlich aller Bewegungen und hinsichtlich der Einführung neuer Parameter nennen. Jede derartige Differentialinvariante würde eine Grösse vorstellen, die mit dem betrachteten Flächenpunkt ganz unabhängig von der zufälligen Lage der Fläche und von ihrer zufälligen analytischen Darstellung geometrisch zusammenhinge und daher in noch höherem Maasse als die in § 6 betrachteten Differentialinvarianten für die starr gedachte, aber beliebig gelegene Fläche charakteristisch wäre.

In der That giebt es solche Grössen. Wir brauchen ja nur an das Krümmungsmaass K zu erinnern, das erstens bei allen Bewegungen ungeändert bleibt und zweitens, da es als der reciproke Wert des Productes der Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 definiert werden kann, auch von der analytischen Darstellung der Fläche unabhängig ist. Eine solche Grösse ist ferner auch die mittlere Krümmung H. H und K sind Functionen von R_1 und R_2. Wir können statt H und K auch R_1 und R_2 selbst als Beispiele nennen.

Es ist leicht, noch einige derartige Grössen aufzustellen:

Lassen wir nämlich den Punkt (u, v) der Fläche

$$(1) \qquad x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v)$$

um eine unendlich kleine Strecke ds auf einer seiner beiden Krümmungscurven weiter wandern, so werden sich R_1 und R_2 um unendlich kleine Grössen dR_1 und dR_2 ändern. Dabei sind aber die Verhältnisse

$$\frac{dR_1}{ds}, \quad \frac{dR_2}{ds}$$

von der Länge des unendlich kleinen Weges ds unabhängig. Denn wenn E, F, G, L, M, N die Fundamentalgrössen der Fläche sind, so ist allgemein:

$$ds = \sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

und also:

$$\frac{dR_1}{ds} = \frac{\frac{\partial R_1}{\partial u}du + \frac{\partial R_1}{\partial v}dv}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}}$$

oder, wenn $dv:du = k$ gesetzt wird:

$$\frac{dR_1}{ds} = \frac{\frac{\partial R_1}{\partial u} + \frac{\partial R_1}{\partial v}k}{\sqrt{E + 2Fk + Gk^2}}.$$

Man sieht, dass dies Verhältnis nur vom Punkte (u, v) selbst und von der Fortschreitungsrichtung k längs der Krümmungscurve abhängt. Nach der Differentialgleichung XII (U) der Krümmungscurven ist k bestimmt durch die quadratische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} k^2 & E & L \\ -k & F & M \\ 1 & G & N \end{vmatrix} = 0,$$

die zwei Werte k_1 und k_2 liefert, ausgedrückt durch die Fundamentalgrössen. Es gehen demnach zwei Grössen hervor:

$$\frac{\frac{\partial R_1}{\partial u} + \frac{\partial R_1}{\partial v}k_1}{\sqrt{E + 2Fk_1 + Gk_1^2}}, \quad \frac{\frac{\partial R_1}{\partial u} + \frac{\partial R_1}{\partial v}k_2}{\sqrt{E + 2Fk_2 + Gk_2^2}}.$$

Ebenso liefert R_2 zwei Grössen:

$$\frac{\frac{\partial R_2}{\partial u} + \frac{\partial R_2}{\partial v}k_1}{\sqrt{E + 2Fk_2 + Gk_2^2}}, \quad \frac{\frac{\partial R_2}{\partial u} + \frac{\partial R_2}{\partial v}k_2}{\sqrt{E + 2Fk_2 + Gk_2^2}}.$$

Da sich R_1 und R_2 selbst durch die Fundamentalgrössen ausdrücken lassen, vgl. XII (I), so sind also diese vier Grössen solche **Functionen der Fundamentalgrössen und ihrer ersten Ableitungen**, die vollständig bestimmt sind, sobald man auf der gegebenen Fläche den Punkt (u, v) angenommen und festgesetzt hat, nach welcher Krümmungscurve man fortschreiten will. Wir wollen mit $d_1 s$ und $d_2 s$ die Bogenelemente längs der einen und längs der anderen Krümmungscurve des Punktes (u, v) bezeichnen, um für jene vier Functionen die bequemen Darstellungen zu gewinnen:

$$\frac{\partial R_1}{\partial_1 s}, \quad \frac{\partial R_1}{\partial_2 s}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial_1 s}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial_2 s}.$$

Wir wenden hier Zeichen der partiellen Differentiation an, weil ja die Differentialquotienten wesentlich von den Richtungen abhängen, nach denen differenziert wird.

Da R_1, R_2 und die Hauptkrümmungsrichtungen des Flächenpunktes rein geometrische, d. h. von der zufälligen analytischen

Darstellung der Fläche unabhängige Grössen sind, so ist es klar, dass die vier gefundenen Grössen ebenso wie R_1 und R_2 solche Ausdrücke sind, die ungeändert bleiben, wenn man neue Parameter auf der Fläche einführt. Ebenso bleiben sie ungeändert, wenn man die Fläche irgend einer Bewegung unterwirft, was sowohl geometrisch als auch nach Satz 19, S. 307, einleuchtet.

Da R_1 und R_2 selbst derartige Grössen sind, so haben wir jetzt insgesamt sechs Grössen, die Differentialinvarianten hinsichtlich der Bewegungen und der Einführung neuer Parameter sind.

Allerdings gilt dies nur mit einer Einschränkung, die wir bisher absichtlich nicht erwähnt haben: Die Vorzeichen der sechs Grössen hängen einerseits wesentlich davon ab, wie auf der Fläche die positive Normalenrichtung definiert worden ist, und sind andererseits auch dann noch nicht völlig bestimmt, da ja z. B. in

$$\frac{\partial R_1}{\partial_1 s}$$

eine Quadratwurzel im Nenner auftritt. Wir können also nur so sagen: Die sechs betrachteten Grössen können sich bei Einführung neuer Parameter nur im Vorzeichen ändern.

Da wir die Congruenzmerkmale in aller Schärfe, ohne Zweideutigkeiten im Vorzeichen, entwickeln wollen, weil wir sonst auch die nicht congruenten, sondern nur symmetrischen Flächen in den Bereich der Betrachtung ziehen würden, so erscheint es uns hier angebracht, uns auf reelle Flächen in reeller Parameterdarstellung zu beschränken. In diesem Falle ist die positive Richtung der Normalen auf S. 27 festgesetzt worden.

Auch wird es gut sein, wenn wir zunächst unsere Betrachtungen auf solche Parameterdarstellungen beschränken, bei denen sie besonders einfach werden, nämlich auf den Fall, dass die Parameterlinien die Krümmungscurven sind, die ja nach S. 174 reell sind. Wir werden nachher zur allgemeinen Parameterdarstellung zurückkehren.

Es seien also die Parametercurven (u), (v) der in reeller Darstellung vorliegenden reellen Fläche (1) die Krümmungscurven. Nach Satz 63, S. 182, ist in diesem Falle:

$$F = M = 0.$$

Auch geben dann $k = 0$ und $k = \infty$ die beiden Richtungen der Krümmungscurven (v) und (u) an, sodass nach XII (D):

$$R_1 = \frac{E}{L}, \quad R_2 = \frac{G}{N} \tag{2}$$

ist. Da

$$d_1 s = \sqrt{E}\, du, \quad d_2 s = \sqrt{G}\, dv$$

die Bogenelemente der Krümmungscurven (v) und (u) sind, so haben die vier Grössen

$$\frac{\partial R_1}{\partial_1 s}, \quad \frac{\partial R_1}{\partial_2 s}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial_1 s}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial_2 s}$$

jetzt diese analytische Darstellung:

$$\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial R_1}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial R_1}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial R_2}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial R_2}{\partial v}, \tag{3}$$

worin die Werte (2) einzutragen sind. Dabei setzen wir fest, dass $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ positiv genommen werden sollen.

Es liege nun eine zweite reelle Fläche vor:

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{y} = \bar{\chi}(\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{z} = \bar{\psi}(\bar{u}, \bar{v}), \tag{4}$$

geschrieben in den laufenden Coordinaten $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ mittels der reellen Parameter $\bar{u}, \bar{v}$. Auch auf dieser Fläche sollen die Parametercurven die Krümmungscurven sein. Die auf die zweite Fläche bezüglichen Grössen sollen wie die auf die erste bezüglichen, aber mit einem Querstrich, geschrieben werden, sodass $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ ihre Hauptkrümmungsradien sind und den Grössen (3) die Grössen:

$$\frac{1}{\sqrt{\bar{E}}} \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{u}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\bar{G}}} \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{v}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\bar{E}}} \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{u}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\bar{G}}} \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{v}} \tag{5}$$

entsprechen.

Wenn nun die beiden Flächen (1) und (4) einander congruent sind, so müssen die Krümmungscurven der einen denen der andern congruent sein. Dabei sind zwei Fälle denkbar: Entweder entsprechen den Curven (u) die Curven ($\bar{u}$) und den Curven (v) die Curven ($\bar{v}$) oder es entsprechen den Curven (u) die Curven ($\bar{v}$) und den Curven (v) die Curven ($\bar{u}$). Wir wollen zunächst nur den ersten Fall ins Auge fassen, da der zweite durch Vertauschen der Bezeichnungen $\bar{u}$ und $\bar{v}$ auf ihn zurückgeführt werden kann.

Es mögen also die Curven (u) und ($\bar{u}$) und ebenso die Curven (v) und ($\bar{v}$) homologe Curven auf beiden Flächen sein. Alsdann entspricht jedem Punkt (u, v) der Fläche (1) ein Punkt ($\bar{u}, \bar{v}$) der Fläche (4). Da R_1 die mit Vorzeichen genommene Strecke ist, die auf der Normalen des Punktes (u, v) von einer solchen unendlich benachbarten Normalen abgeschnitten wird, deren Fusspunkt auf der durch den Punkt (u, v) gebenden Krümmungscurve (v) liegt, und das Entsprechende auf der zweiten Fläche von $\bar{R}_1$ gilt, so müssen in homo-

logen Punkten (u, v) und $(\bar{u}, \bar{v})$ die Werte von R_1 und $\bar{R}_1$ übereinstimmen und ebenso die Werte von R_2 und $\bar{R}_2$, aber nicht notwendig auch im Vorzeichen. Auf diesen Umstand kommen wir sogleich zurück. Vorher bemerken wir noch, dass nach unseren früheren Auseinandersetzungen über den invarianten Charakter der Grössen (3) auch alle diese Grössen in homologen Punkten mit den entsprechenden vier Grössen (5), abgesehen vom Vorzeichen, übereinstimmen müssen.

Die Vorzeichen der Hauptkrümmungsradien hängen nach S. 104 wesentlich von der Bestimmung der positiven Richtungen der Normalen ab. Diese haben wir so gewählt, dass auf der Fläche (1) im Punkte (u, v) die positive Richtung der Curve (v), die positive Richtung der Curve (u) und die positive Richtung der Normale so gegen einander orientiert sind, wie die positiven Axen, vgl. S. 30, 31. Wenn also auf beiden Flächen in homologen Punkten die positiven Richtungen der Parametercurven übereinstimmen, so muss dann auch $R_1 = \bar{R}_1$ und $R_2 = \bar{R}_2$ sein. Ist aber die Richtung der Curve $(\bar{v})$ der der homologen Curve (v) entgegengesetzt, während die Richtungen der homologen Curven (u) und $(\bar{u})$ übereinstimmen, so ist die Normale entgegengesetzt, also $R_1 = -\bar{R}_1$ und $R_2 = -\bar{R}_2$, u. s. w. Wenn beide Parametercurven auf der zweiten Fläche entgegengesetzten Sinn haben, so ist dagegen wieder Übereinstimmung in den positiven Normalenrichtungen vorhanden, also $R_1 = \bar{R}_1$ und $R_2 = \bar{R}_2$. Da wir ferner in (3) und (5) die Quadratwurzeln positiv gewählt haben, so hängen die Vorzeichen dieser Grössen sonst nur noch von den positiven Richtungen auf den Parametercurven ab, da die Differentiale ∂u, ∂v, $\partial \bar{u}$, $\partial \bar{v}$ sowohl als auch die im Zähler auftretenden Grössen R_1, R_2, $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$ bei anderer Wahl jener Richtungen ihre Zeichen ändern.

Um alle Möglichkeiten zu umfassen, verstehen wir unter α eine der beiden Zahlen ± 1 und unter β auch eine der Zahlen ± 1. Dabei sei $\alpha = +1$ oder -1, je nachdem die Curven (v) und $(\bar{v})$ im Sinne übereinstimmen oder nicht, und $\beta = +1$ oder -1, je nachdem die Curven (u) und $(\bar{u})$ im Sinne übereinstimmen oder nicht. Alsdann muss in homologen Punkten (u, v) und $(\bar{u}, \bar{v})$ der beiden Flächen offenbar sein:

$$
(6)\quad \begin{cases}
R_1 = \alpha\beta \bar{R}_1, & R_2 = \alpha\beta \bar{R}_2, \\[4pt]
\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial R_1}{\partial u} = \beta \dfrac{1}{\sqrt{\bar{E}}}\dfrac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{u}}, & \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial R_1}{\partial v} = \alpha \dfrac{1}{\sqrt{\bar{G}}}\dfrac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{v}}, \\[4pt]
\dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial R_2}{\partial u} = \beta \dfrac{1}{\sqrt{\bar{E}}}\dfrac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{u}}, & \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial R_2}{\partial v} = \alpha \dfrac{1}{\sqrt{\bar{G}}}\dfrac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{v}}.
\end{cases}
$$

Es sind dies insgesamt sechs Gleichungen. Ihre linken Seiten sind Functionen von u, v, ihre rechten Seiten Functionen von $\bar{u}, \bar{v}$. Jedem Punkt (u, v) der Fläche (1) entspricht ein Punkt $(\bar{u}, \bar{v})$ der Fläche (4) und umgekehrt, sodass $\bar{u}, \bar{v}$ zwei von einander unabhängige, allerdings noch unbekannte Functionen von u, v sein müssen. Setzt man diese Functionen für $\bar{u}$ und $\bar{v}$ in (6) rechts ein, so müssen sich also sechs Identitäten ergeben, sobald eine gewisse unter den vier Annahmen:

$$\alpha = 1, \beta = 1; \quad \alpha = -1, \beta = 1; \quad \alpha = 1, \beta = -1; \quad \alpha = -1, \beta = -1$$

gemacht wird.

Nun werden wir das Umgekehrte beweisen: Wir setzen voraus, dass zwei reelle Flächen (1) und (4) in reellen Parameterdarstellungen vorliegen und dass die Curven (u), (v) und die Curven $(\bar{u})$, $(\bar{v})$ ihre Krümmungscurven seien. Wenn wir dann die in (6) auftretenden Functionen von u, v bez. $\bar{u}, \bar{v}$ berechnen und in (6) einsetzen, so ergeben sich sechs Gleichungen zwischen u, v und $\bar{u}, \bar{v}$. Wenn diese sechs Gleichungen bei einer gewissen Annahme von $\alpha = \pm 1$, $\beta = \pm 1$ einander nicht widersprechen, wenn es vielmehr zwei Functionen $\bar{u}$ und $\bar{v}$ von u und v giebt, die — in (6) rechts eingesetzt — alle diese Gleichungen für alle Werte von u und v befriedigen, so sind die beiden Flächen, wie wir zeigen werden, congruent. Allerdings tritt noch eine Beschränkung hinzu, die sich sogleich von selbst ergeben wird.

Zunächst folgt, wenn wir $\bar{u}, \bar{v}$ als die nach Voraussetzung durch (6) definierten Functionen von u, v auffassen und bei dieser Auffassung die beiden ersten Gleichungen (6) nach u differenzieren, was ja erlaubt ist:

$$\frac{\partial R_1}{\partial u} = \alpha\beta\left(\frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{v}}\frac{\partial \bar{v}}{\partial u}\right),$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial u} = \alpha\beta\left(\frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} + \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{v}}\frac{\partial \bar{v}}{\partial u}\right).$$

Setzen wir hierin für die linken Seiten die aus (6) folgenden Werte

$$\frac{\partial R_1}{\partial u} = \beta\sqrt{\frac{E}{\bar{E}}}\frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{u}}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial u} = \beta\sqrt{\frac{E}{\bar{E}}}\frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{u}}$$

ein, so kommt:

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} - \alpha\sqrt{\frac{E}{\bar{E}}}\right)\frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}\frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{v}} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} - \alpha\sqrt{\frac{E}{\bar{E}}}\right)\frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}\frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{v}} = 0.$$

Es sind dies zwei hinsichtlich

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} - \alpha \sqrt{\frac{E}{\bar{E}}}, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial u}$$

lineare und homogene Gleichungen mit der Determinante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{v}} \\ \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{u}} & \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{v}} \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante ist die Functionaldeterminante von $\bar{R}_1$ und $\bar{R}_2$ (vgl. I S. 81). Sobald $\bar{R}_1$ und $\bar{R}_2$ zwei von einander unabhängige Functionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ sind, ist sie von Null verschieden (vgl. I S. 82, 83), und diese Voraussetzung wollen wir machen. Alsdann folgt aus jenen linearen Gleichungen:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} = \alpha \sqrt{\frac{E}{\bar{E}}}, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} = 0.$$

Ganz ebenso ergiebt sich, wenn die beiden ersten Gleichungen (6) nach v differenziert werden:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} = \beta \sqrt{\frac{G}{\bar{G}}}.$$

Mithin ist $\bar{u}$ eine Function von u allein und $\bar{v}$ eine Function von v allein:

$$\bar{u} = \lambda(u), \quad \bar{v} = \mu(v), \tag{7}$$

wobei

$$\lambda' = \alpha \sqrt{\frac{E}{\bar{E}}}, \quad \mu' = \beta \sqrt{\frac{G}{\bar{G}}} \tag{8}$$

ist. Da die Quadratwurzeln in (8) positiv sind, so sieht man auch, dass $\lambda' \gtreqless 0$ ist, je nachdem $\alpha = \pm 1$ ist, und dass $\mu' \gtreqless 0$ ist, je nachdem $\beta = \pm 1$ ist.

Wenn wir jetzt die durch (7) definierten neuen Parameter $\bar{u}$, $\bar{v}$ auf der ersten Fläche (1) einführen und die zugehörigen Fundamentalgrössen berechnen, so werden wir sehen, dass sie gerade gleich den entsprechenden Fundamentalgrössen der zweiten Fläche werden. Die neuen Fundamentalgrössen der ersten Fläche seien nämlich zunächst mit E', F', G', L', M', N' bezeichnet. Da $\bar{u}$ nur von u und $\bar{v}$ nur von v abhängt, so sind die neuen Parameterlinien $(\bar{u})$, $(\bar{v})$ der Fläche (1) immer noch die Krümmungscurven, sodass auch jetzt:

$$F' = M' = 0$$

ist. Ferner ist, da x, y, z Functionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ werden, nach (7):

$$x_u = \lambda' \frac{\partial x}{\partial \bar{u}}, \quad x_v = \mu' \frac{\partial x}{\partial \bar{v}},$$

sodass aus XI (A) folgt:

$$E = \mathsf{S}\, x_u^2 = \lambda'^2 \mathsf{S} \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{u}}\right)^2 = \lambda'^2 E'$$

oder wegen (8):

$$E' = \frac{E}{\lambda'^2} = \bar{E}.$$

Ebenso kommt:

$$G' = \bar{G}.$$

Durch die Einführung der neuen Parameter (7) wird die Schar der Parameterlinien (v), wie gesagt, nicht geändert, wohl aber ändert sich ihr Sinn, wenn $d\bar{u} : du$ oder $\lambda' < 0$ ist. Da, wie wir sahen, $\lambda' \gtrless 0$ ist, je nachdem $\alpha = \pm 1$ ist, so ändert sich also der Sinn der einen Schar von Parameterlinien, wenn $\alpha = -1$ ist; entsprechend ändert sich der Sinn der andern, wenn $\beta = -1$ ist. Die Flächennormale ändert ihren Sinn nur dann, wenn nur eine dieser beiden Scharen ihren Sinn ändert, d. h. wenn $\alpha\beta = -1$ ist. Alsdann ändert auch R_1 das Vorzeichen. Mithin geht R_1 jetzt in $\alpha\beta R_1$ über. Analog (2) ist also jetzt:

$$\alpha\beta R_1 = \frac{E'}{L'} = \frac{\bar{E}}{L'} \quad \text{oder:} \quad R_1 = \alpha\beta \frac{\bar{E}}{L'},$$

während

$$\bar{R}_1 = \frac{\bar{E}}{\bar{L}}$$

ist. Aus der ersten Gleichung (6) folgt daher:

$$\frac{\bar{E}}{L'} = \frac{\bar{E}}{\bar{L}}$$

oder $L' = \bar{L}$. Ebenso ergiebt sich $M' = \bar{M}$. In den neuen Parametern $\bar{u}, \bar{v}$ hat mithin die Fläche (1) genau dieselben Fundamentalgrössen wie die Fläche (4). Daher sind beide Flächen nach Satz 25, S. 338, einander congruent.

Im Beweise haben wir uns genötigt gesehen, die Voraussetzung zu treffen, dass $\bar{R}_1$ und $\bar{R}_2$ zwei von einander unabhängige Functionen der Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ seien. Wegen der beiden ersten Gleichungen (6) und auch aus rein geometrischen Gründen leuchtet ein, dass alsdann auch für die andere Fläche die analoge Voraussetzung zu treffen ist, d. h. also, wir setzen voraus, dass auf keiner der beiden Flächen der eine Hauptkrümmungsradius eine Function des andern sei, oder

auch, dass auf keiner der beiden Flächen eine Relation zwischen den beiden Hauptkrümmungsradien bestehe.

Die Bedingungen (6) können wir alsdann auch etwas anders ausdrücken. Es sind nämlich

$$R_1, \quad R_2, \quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial R_1}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial R_1}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial R_2}{\partial u}, \quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial R_2}{\partial v}$$

Functionen von u und v. Da nun R_1 und R_2 von einander unabhängige Functionen von u und v sind und deshalb auch umgekehrt u und v als Functionen von R_1 und R_2 aufgefasst werden können, so werden sich die übrigen vier angegebenen Grössen als Functionen von R_1 und R_2 darstellen lassen. Anders ausgesprochen: Durch Elimination von u und v aus den sechs Gleichungen, die die angegebenen sechs Grössen als Functionen von u, v darstellen, ergeben sich vier Gleichungen von der Form:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial R_1}{\partial u} = \Phi_1(R_1, R_2), & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial R_1}{\partial v} = \Psi_1(R_1, R_2), \\ \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial R_2}{\partial u} = \Phi_2(R_1, R_2), & \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial R_2}{\partial v} = \Psi_2(R_1, R_2). \end{cases}$$

Alsdann folgt aus (6):

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\beta}{\sqrt{\bar{E}}}\frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{u}} = \Phi_1(\alpha\beta\bar{R}_1, \alpha\beta\bar{R}_2), & \frac{\alpha}{\sqrt{\bar{G}}}\frac{\partial \bar{R}_1}{\partial \bar{v}} = \Psi_1(\alpha\beta\bar{R}_1, \alpha\beta\bar{R}_2), \\ \frac{\beta}{\sqrt{\bar{E}}}\frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{u}} = \Phi_2(\alpha\beta\bar{R}_1, \alpha\beta\bar{R}_2), & \frac{\alpha}{\sqrt{\bar{G}}}\frac{\partial \bar{R}_2}{\partial \bar{v}} = \Psi_2(\alpha\beta\bar{R}_1, \alpha\beta\bar{R}_2). \end{cases}$$

Die Congruenz-Bedingung, die darin besteht, dass die sechs Gleichungen (6) zwischen u, v und $\bar{u}, \bar{v}$ einander nicht widersprechen sollen, kann jetzt so ausgedrückt werden: Auf der ersten Fläche bestehen sicher vier Relationen von der Form (9). Die Fläche ist der zweiten Fläche dann und nur dann congruent, wenn alsdann auf der zweiten Fläche für eine gewisse Annahme von $\alpha = \pm 1$ und $\beta = \pm 1$ die vier Relationen (10) bestehen.

In der That, ist dies der Fall und setzen wir fest, dass zwischen u, v und $\bar{u}, \bar{v}$ die beiden von einander unabhängigen Gleichungen bestehen sollen:

$$(11) \qquad R_1 = \alpha\beta\bar{R}_1, \qquad R_2 = \alpha\beta\bar{R}_2,$$

so folgen hieraus und aus (9) und (10) rückwärts die Gleichungen (6). Die beiden Gleichungen (11) dienen nur dazu, die einander homologen Stellen (u, v) und $(\bar{u}, \bar{v})$ beider Flächen zu bestimmen, während

dagegen die von Parametern freien Gleichungen (9) oder (10) charakteristisch für eine Familie congruenter Flächen sind.

Die Rückkehr zu allgemeinen Parametern ist nun sehr leicht, weil die in (9) und (10) auftretenden Grössen bei Parameteränderungen abgesehen vom Vorzeichen ungeändert bleiben. Weil wir Vorzeichenänderungen schon durch die Factoren α und β berücksichtigt haben, so kommen wir von den Gleichungen (9) und (10) zu ganz analogen Gleichungen, in denen nur die links stehenden Grössen durch

$$\frac{\partial R_1}{\partial_1 s}, \quad \frac{\partial R_1}{\partial_2 s}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial_1 s}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial_2 s}$$

bez.

$$\frac{\partial \bar{R}_1}{\partial_1 \bar{s}}, \quad \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial_2 \bar{s}}, \quad \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial_1 \bar{s}}, \quad \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial_2 \bar{s}}$$

zu ersetzen sind, während die Gleichungen (11) die alten bleiben. Ausserdem darf nicht ausser acht gelassen werden, dass wir bisher nur den Fall betrachtet hatten, dass die Curven (u) den Curven ($\bar{u}$) und nicht etwa den Curven ($\bar{v}$) entsprechen. Indem wir dies berücksichtigen, erkennen wir, dass sich das Ergebnis so darstellen lässt:[1]

Satz 30: Liegen zwei reelle Flächen in reeller Parameterdarstellung vor:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

und

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{y} = \bar{\chi}(\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{z} = \bar{\psi}(\bar{u}, \bar{v})$$

und besteht auf keiner der beiden Flächen eine Relation zwischen den Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 bez. $\bar{R}_1$ und $\bar{R}_2$, so wird die Frage, ob die Flächen einander congruent sind, so entschieden: Bedeuten $d_1 s$ und $d_2 s$ die Bogenelemente auf der durch einen Punkt der ersten Fläche gehenden Krümmungscurven, so bildet man diejenigen Differentialquotienten der Hauptkrümmungsradien, die sich beim Fortschreiten nach diesen Elementen ergeben. Man setzt nämlich, wenn E, F, G, L, M, N die Fundamentalgrössen der ersten Fläche bedeuten, in

$$\frac{\frac{\partial R_1}{\partial u} + \frac{\partial R_1}{\partial v} k}{\sqrt{E + 2Fk + Gk^2}}, \quad \frac{\frac{\partial R_2}{\partial u} + \frac{\partial R_2}{\partial v} k}{\sqrt{E + 2Fk + Gk^2}}$$

[1] Dieses Merkmal der Congruenz hat Lie angegeben, vgl. die Anm. zu S. 341; doch ist er auf die Vorzeichenbestimmung nicht eingegangen, sodass bei ihm zwischen Congruenz und Symmetrie nicht unterschieden wird, ein Umstand, auf den er übrigens selbst hingewiesen hat.

für k die beiden reellen Werte ein, die sich aus der quadratischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} k^2 & E & L \\ -k & F & M \\ 1 & G & N \end{vmatrix} = 0,$$

ergeben, indem man die Quadratwurzeln, die soeben auftraten, positiv wählt. Zwischen den dadurch hervorgehenden vier Functionen von u und v:

$$\frac{\partial R_1}{\partial_1 s}, \quad \frac{\partial R_1}{\partial_2 s}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial_1 s}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial_2 s}$$

und den beiden von einander unabhängigen Functionen von u und v:

$$R_1, \quad R_2$$

bestehen alsdann vier Gleichungen von der Form:

$$\frac{\partial R_1}{\partial_1 s} = \Phi_1(R_1, R_2), \quad \frac{\partial R_1}{\partial_2 s} = \Psi_1(R_1, R_2),$$

$$\frac{\partial R_2}{\partial_1 s} = \Phi_2(R_1, R_2), \quad \frac{\partial R_2}{\partial_2 s} = \Psi_2(R_1, R_2).$$

Bildet man die entsprechenden Grössen für die zweite Fläche:

$$\frac{\partial \bar{R}_1}{\partial_1 \bar{s}}, \quad \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial_2 \bar{s}}, \quad \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial_1 \bar{s}}, \quad \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial_2 \bar{s}},$$

so sind beide Flächen einander dann und nur dann congruent, wenn für die zweite Fläche bei passender Wahl von $\alpha = \pm 1$ und $\beta = \pm 1$ entweder die Gleichungen:

$$\beta \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial_1 \bar{s}} = \Phi_1(\alpha\beta \bar{R}_1, \alpha\beta \bar{R}_2), \quad \alpha \frac{\partial \bar{R}_1}{\partial_2 \bar{s}} = \Psi_1(\alpha\beta \bar{R}_1, \alpha\beta \bar{R}_2),$$

$$\beta \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial_1 \bar{s}} = \Phi_2(\alpha\beta \bar{R}_1, \alpha\beta \bar{R}_2), \quad \alpha \frac{\partial \bar{R}_2}{\partial_2 \bar{s}} = \Psi_2(\alpha\beta \bar{R}_1, \alpha\beta \bar{R}_2)$$

oder diejenigen Gleichungen bestehen, die hieraus hervorgehen, wenn man die Indices 1 und 2 vertauscht. — Alsdann sind diejenigen Punkte (u, v) und $(\bar{u}, \bar{v})$ beider Flächen homolog, deren Parameter im ersten Falle den beiden Gleichungen

$$R_1 = \alpha\beta \bar{R}_1, \quad R_2 = \alpha\beta \bar{R}_2,$$

im zweiten Falle den beiden Gleichungen

$$R_1 = \alpha\beta \bar{R}_2, \quad R_2 = \alpha\beta \bar{R}_1$$

genügen.

Hiernach ist es angebracht, die Gleichungen:

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial R_1}{\partial_1 s} = \Phi_1(R_1, R_2), & \dfrac{\partial R_1}{\partial_2 s} = \Psi_1(R_1, R_2), \\ \dfrac{\partial R_2}{\partial_1 s} = \Phi_2(R_1, R_2), & \dfrac{\partial R_2}{\partial_2 s} = \Psi_2(R_1, R_2) \end{cases}$$

die natürlichen Gleichungen der Fläche (1) zu nennen,[1] da sie die Fläche ohne Rücksicht auf ihre zufällige Lage und ohne Rücksicht auf ihre zufällige Parameterdarstellung vollkommen charakterisieren. Man vergleiche die analoge Bezeichnung bei den Curven in I S. 210. Damals entzogen sich gewisse Curven der allgemeinen Form (1) der natürlichen Gleichungen einer Curve, I S. 208, nämlich diejenigen, als deren natürliche Gleichungen die Gleichungen (4) und (5), I S. 210, zu benutzen waren. Hierzu haben wir in der Flächentheorie etwas Entsprechendes: Eine Ausnahme bilden hier diejenigen Flächen, auf denen eine Relation zwischen den beiden Hauptkrümmungsradien besteht. Diese Flächen sollen im nächsten Paragraphen betrachtet werden.

Oben sprachen wir einleitend von denjenigen Differentialinvarianten der Flächen, die nicht nur bei Ausführung aller Bewegungen ungeändert bleiben, sondern — abgesehen vom Vorzeichen — auch bei Einführung irgend welcher neuer Parameter. Insbesondere fanden wir, dass

$$(13)\qquad R_1, \quad R_2, \quad \frac{\partial R_1}{\partial_1 s}, \quad \frac{\partial R_1}{\partial_2 s}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial_1 s}, \quad \frac{\partial R_2}{\partial_2 s}$$

solche Grössen sind. Da nun eine Fläche, abgesehen von ihrer Lage im Raume und ihrer analytischen Darstellung, durch ihre natürlichen Gleichungen (12) völlig charakterisiert ist, so kann man daraus schliessen, dass alle übrigen Differentialinvarianten der erwähnten Art aus den sechs angegebenen durch einfache Differentiationsprocesse hervorgehen. Wir wollen dies hiermit nur angedeutet haben und gehen nicht weiter darauf ein, weil wir, wie

[1] Obgleich verschiedene Autoren von den natürlichen Gleichungen einer Curve sprechen, scheint doch nirgends von den natürlichen Gleichungen einer Fläche die Rede zu sein, selbst nicht in CESÀRO's „Vorlesungen über natürliche Geometrie", deutsch von KOWALEWSKI, Leipzig 1901, in denen man noch am ehesten diese Bezeichnung zu finden erwartet. Wir citieren dies Werk hier, um unsere litterarischen Nachweise zur Theorie der natürlichen Gleichungen von Curven im 1. Bande dadurch zu vervollständigen. Man findet in diesem Buche zahlreiche Beispiele im Sinne der von uns in I S. 68—71 gegebenen.

unsere Ergebnisse lehren, thatsächlich mit den sechs betrachteten Grössen (13) ausreichen. Nochmals erinnern wir aber daran, dass in (13) die Differentiationen zwar nach den Bogenelementen der Krümmungscurven auszuführen sind, dass wir aber doch die Grössen (13) stets bei beliebig vorgelegten Flächengleichungen:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

durch Differentiationen allein berechnen können, und dass die Aufstellung der natürlichen Gleichungen (12) also nur Differentiationen und Eliminationen verlangt.

Wir deuten nur noch Eines an: Legt man auf die obigen Vorzeichenbestimmungen keinen Wert, so kann man zu den Merkmalen kommen, die nicht nur den Fall der Congruenz, sondern auch den der Symmetrie umfassen, und dann steht nichts im Wege, das Ergebnis auch auf imaginäre Flächen oder auf reelle Flächen mit imaginärer Parameterdarstellung auszudehnen. Wir nennen deshalb die Gleichungen (12) auch in diesen Fällen die natürlichen Gleichungen der Fläche.

§ 11. Flächen, deren Hauptkrümmungsradien durch eine Relation verbunden sind.

Bei der im vorigen Paragraphen auseinandergesetzten Theorie der Congruenz sahen wir uns genötigt, diejenigen Flächen auszuschliessen, bei denen zwischen den beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 des allgemeinen Flächenpunktes (u, v) eine Gleichung besteht, oder also, bei denen sich R_2 als Function von R_1 allein ausdrücken lässt (vgl. S. 348). Diese Flächen lassen sich auch so charakterisieren: Bei ihnen besteht eine Gleichung zwischen der Krümmung K und der mittleren Krümmung H. Indem wir sie so definieren, umfassen wir zugleich diejenigen imaginären Flächen, die keine Hauptkrümmungsradien haben, nämlich die Flächen mit einer Schar von Minimalgeraden (vgl. S. 115). Denn nach Satz 106, S. 240, besteht ja bei diesen Flächen die Gleichung:

$$K = \tfrac{1}{4} H^2.$$

Aber zu den bisher ausgeschlossenen Flächen gehören noch viele andere, insbesondere reelle Flächen. So gehören hierher die Flächen constanter Krümmung, für die

$$K = \text{Const.}$$

ist, von denen wir in § 5 sprachen, ferner die **Minimalflächen**, für die

$$H = 0$$

ist und die wir in § 15 des 2. Abschnittes untersucht haben. Es gehören hierher auch die **Flächen constanter mittlerer Krümmung** überhaupt:

$$H = \text{Const.},$$

denen wir gelegentlich, auf S. 236, begegnet sind. Endlich sind hier auch die **Rotationsflächen** zu nennen, denn nach S. 122 sind Krümmung K und mittlere Krümmung H einer Rotationsfläche Functionen der Bogenlänge der Meridiancurve, sodass auch bei den Rotationsflächen eine Relation zwischen K und H besteht.

Zu den **Flächen** also, **bei denen eine Relation zwischen der Krümmung K und der mittleren Krümmung H vorhanden ist**, gehören ausgedehnte Familien von gerade besonders interessanten Flächen, und aus diesem Grunde wollen wir hier diese Flächen genauer untersuchen.[1]

Wir nehmen dabei die Krümmungscurven als Parameterlinien (u) und (v) an. **Durch diese Annahme** werden allerdings **diejenigen Flächen, die eine Schar von Minimalgeraden enthalten, ausgeschlossen** (nach S. 175), also diejenigen Flächen, die wir schon auf S. 227—229 kurz untersucht und analytisch dargestellt haben. Wenn wir von ihnen hier absehen, so haben die zu betrachtenden Flächen im allgemein gewählten Punkte (u, v) sicher Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2.

Wir benutzen diese Gelegenheit, um hier einmal diejenigen Formeln zusammenzustellen, die aus unseren allgemeinen Formeln hervorgehen, wenn es sich um eine **beliebige Fläche** handelt, **deren Parameterlinien die Krümmungscurven sind.** Nach Satz 63, S. 182, und naeh XI (C) ist in diesem Falle:

$$F = M = 0, \quad D^2 = EG. \tag{1}$$

[1] Auf die in vielfacher Hinsicht interessanten Flächen, deren Hauptkrümmungsradien durch eine Relation verbunden sind, hat zuerst Weingarten aufmerksam gemacht, dem man auch eine Reihe wichtiger Sätze über diese Flächen verdankt. Man nennt diese Flächen deshalb Weingarten'sche oder kürzer W-Flächen. Wir citieren Weingarten's Abhandlungen: „Über eine Classe auf einander abwickelbarer Flächen", Journal f. d. r. u. a. Math. 59. Bd. (1861), und „Über die Oberflächen, für welche einer der beiden Hauptkrümmungshalbmesser eine Function des anderen ist", ebenda 62. Bd. (1862).

Die drei Fundamentalgleichungen (9), (10), (11), S. 270, 271, nehmen daher die Form an:

$$(2)\quad \begin{cases} L_v = \frac{1}{2} E_v\left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right), \\ LN = -\frac{1}{2} E_{vv} - \frac{1}{2} G_{uu} + \frac{1}{4}\frac{E_v^2 + E_u G_u}{E} + \frac{1}{4}\frac{G_u^2 + E_v G_v}{G}, \\ N_u = \frac{1}{2} G_u\left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G}\right). \end{cases}$$

Nach XII (K) ist ferner, wenn R_1 denjenigen Hauptkrümmungsradius bezeichnet, der zur Tangente der Krümmungscurve (v) gehört:

$$(3)\qquad R_1 = \frac{E}{L}, \quad R_2 = \frac{G}{N},$$

vgl. XII (H), sodass die erste und dritte Fundamentalgleichung auch so geschrieben werden kann:

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{E}{R_1} = \frac{1}{2} E_v\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial u}\frac{G}{R_2} = \frac{1}{2} G_u\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

oder so:

$$(4)\qquad \frac{\partial}{\partial v}\log\frac{\sqrt{E}}{R_1} = \frac{1}{R_2 - R_1}\frac{\partial R_1}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial u}\log\frac{\sqrt{G}}{R_2} = \frac{1}{R_1 - R_2}\frac{\partial R_2}{\partial u}.$$

Hierin treten übrigens die Wurzelzeichen nur scheinbar auf, sodass wir über ihre Vorzeichen nichts festzusetzen brauchen. Die zweite Fundamentalgleichung (2) lässt sich wegen (3) so schreiben:

$$-\frac{\sqrt{EG}}{R_1 R_2} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{G_u}{2\sqrt{EG}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{E_v}{2\sqrt{EG}}$$

oder:

$$(5)\qquad -\frac{\sqrt{EG}}{R_1 R_2} = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right).$$

Auch hier treten die Wurzeln nur scheinbar auf.

Nach XII (R) kommt ferner wegen (1) und (3):

$$(6)\qquad \begin{cases} X_u = -\frac{x_u}{R_1}, \quad Y_u = -\frac{y_u}{R_1}, \quad Z_u = -\frac{z_u}{R_1}; \\ X_v = -\frac{x_v}{R_2}, \quad Y_v = -\frac{y_v}{R_2}, \quad Z_v = -\frac{z_v}{R_2}. \end{cases}$$

Die Formeln (1) bis (6) gelten für beliebige Flächen, vorausgesetzt, dass ihre Parameterlinien (u) und (v) die Krümmungscurven sind.

Wir wollten nun insbesondere diejenigen Flächen betrachten, auf denen eine Relation zwischen den beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 besteht:

$$\Omega(R_1, R_2) = 0.$$

Im besonderen kann diese Relation die specielle Form $R_1 = \text{Const.}$ oder $R_2 = \text{Const.}$ haben; es ist aber leicht, alle Flächen, auf denen einer der Hauptkrümmungsradien constant ist, anzugeben. Ist nämlich z. B.

$$R_1 = \text{Const.},$$

so lehren die drei ersten Formeln (6), dass die Ausdrücke:

$$x + R_1 X, \quad y + R_1 Y, \quad z + R_1 Z$$

frei von u sind. Es sind dies aber die Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ des Mittelpunktes des ersten Hauptkrümmungskreises im Flächenpunkte (u, v). Sie hängen also nur von v ab, d. h. die Mittelpunkte der ersten Hauptkrümmungskreise erfüllen eine gewisse Curve $\mathfrak{c}$, keine Fläche, indem zu allen Punkten einer Krümmungscurve (v) derselbe Mittelpunkt gehört. Aber noch mehr, aus:

$$\mathfrak{x}(v) = x + R_1 X, \quad \mathfrak{y}(v) = y + R_1 Y, \quad \mathfrak{z}(v) = z + R_1 Z$$

folgt noch längs der Curve $\mathfrak{c}$:

$$\mathfrak{x}' = x_v + R_1 X_v, \quad \mathfrak{y}' = y_v + R_1 Y_v, \quad \mathfrak{z}' = z_v + R_1 Z_v.$$

Also ist:

$$\mathbf{S}\,\mathfrak{x}'(x - \mathfrak{x}) = -R_1 \mathbf{S}(x_v + R_1 X_v) X = -R_1 \mathbf{S} X x_v - R_1^2 \mathbf{S} X X_v.$$

Nach XI (H) und XI (I) gilt also die in x, y, z lineare Gleichung:

$$\mathbf{S}\,\mathfrak{x}'(x - \mathfrak{x}) = 0.$$

Da $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ nur von v abhängen, so heisst dies: Jede Curve (v) liegt in einer Ebene, die durch den zugehörigen Mittelpunkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ geht und deren Normale Richtungscosinus proportional $\mathfrak{x}', \mathfrak{y}', \mathfrak{z}'$ hat und deshalb der Tangente der Mittelpunktscurve $\mathfrak{c}$ im Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ parallel ist. Da alle Punkte (x, y, z) der Curve (v) vom zugehörigen Mittelpunkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ denselben Abstand R_1 haben, so ist daher jede Curve (v) ein Kreis vom constanten Radius R_1, dessen Mittelpunkt $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ auf einer Curve $\mathfrak{c}$ liegt und dessen Ebene zur Tangente von $\mathfrak{c}$ in diesem Mittelpunkt senkrecht ist. Also ist die Fläche eine Röhrenfläche (vgl. das 2. Beispiel und Fig. 63, S. 181).

Stillschweigend haben wir hierbei vorausgesetzt, dass die constante Grösse R_1 endlich sei. Ist $R_1 = \infty$, so ist $L = 0$ nach (3),

d. h. wegen (1) auch $LN - M^2 = 0$. Die Fläche ist dann abwickelbar, nach Satz 19, S. 132. Umgekehrt leuchtet ein, dass auf jeder abwickelbaren Fläche der eine Hauptkrümmungsradius unendlich gross ist, denn die Krümmungscurven der einen Schar sind hier die Erzeugenden, nach S. 177, und die Normalen der Fläche längs einer Erzeugenden sind einander parallel, nach Satz 7, I S. 277, treffen sich also erst im Unendlichen.

Sollen beide Hauptkrümmungsradien einer Fläche constant sein, so sind verschiedene Fälle denkbar: Wären zunächst R_1 und R_2 beide endlich, aber verschieden, so würde aus (4) folgen, dass E nur von u und G nur von v abhinge, sodass das Quadrat des Bogenelementes wäre:

$$ds^2 = E(u)\,du^2 + G(v)\,dv^2.$$

Indem man $\int \sqrt{E}\,du$ und $\int \sqrt{G}\,dv$ als neue Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ einführt, bringt man es alsdann auf die Form:

$$ds^2 = d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2.$$

Dies aber ist das Quadrat des Bogenelementes in der Ebene mit den rechtwinkligen Coordinaten $\bar{u}$, $\bar{v}$, sodass die Fläche abwickelbar wäre: nach I S. 279 u. f. Dann aber ist ein Hauptkrümmungsradius unendlich gross, sodass sich ein Widerspruch ergiebt. Daher ist, wenn R_1 und R_2 constant und endlich sein sollen, nur der Fall $R_1 = R_2$ möglich, in dem die Fläche nach Satz 12, S. 120, eine Kugel ist.

Ist R_1 constant und endlich, aber $R_2 = \infty$, so ist die Fläche einerseits eine Röhrenfläche mit ∞^1 congruenten Kreisen (v) und andererseits abwickelbar. Dabei müssen die Geraden der Fläche, als Krümmungscurven (u), jene Kreise senkrecht schneiden. Aber die Tangenten der Curven (u) sind nach S. 181 den Tangenten der Mittelpunktscurve c parallel. Also ist der Ort der Kreismitten eine Gerade, die Fläche daher ein Rotationscylinder.

Sind endlich R_1 und R_2 beide unendlich gross, so artet der Cylinder in die Ebene aus. Daher:

Satz 31: Ist einer der Hauptkrümmungsradien einer Fläche constant und endlich, so ist die Fläche eine Röhrenfläche; ist er unendlich gross, so ist sie insbesondere eine abwickelbare Fläche. Sind beide Hauptkrümmungsradien constant, aber endlich, so müssen sie einander gleich sein, und die Fläche ist dann eine Kugel. Ist der eine endlich und constant, der andere unendlich gross, so ist die Fläche ein Rotationscylinder. Sind beide unendlich gross, so ist die Fläche eine Ebene.

Da wir somit die Flächen kennen, auf denen wenigstens ein Hauptkrümmungsradius constant ist, können wir von jetzt ab von ihnen absehen. Wir wollen also jetzt diejenigen **Flächen untersuchen, auf denen eine Relation zwischen den beiden Hauptkrümmungsradien** R_1 **und** R_2 **besteht:**

$$\Omega(R_1, R_2) = 0, \tag{7}$$

die sich aber nicht auf $R_1 = \text{Const.}$ oder $R_2 = \text{Const.}$ reducieren soll, ebenso nicht auf $R_1 = R_2$, da sich dann nach Satz 12, S. 120, wieder die Kugeln ergeben würden.

Infolge dieser Relation (7) ist R_1 als Function von R_2 oder umgekehrt R_2 als Function von R_1 aufzufassen. Aus (4) folgt dann, dass von den Functionen:

$$\log\frac{\sqrt{E}}{R_1} - \int\frac{d\,R_1}{R_2 - R_1}, \quad \log\frac{\sqrt{G}}{R_2} - \int\frac{d\,R_1}{R_1 - R_2}$$

die erste eine Function von u allein und die zweite eine Function von v allein ist, sodass kommt:

$$E = R_1^2\,U(u)\,e^{2\int\frac{d\,R_1}{R_2 - R_1}}, \quad G = R_2^2\,V(v)\,e^{2\int\frac{d\,R_2}{R_1 - R_2}}, \tag{8}$$

wo U nur von u und V nur von v abhängt. Unter dem ersten Integral ist natürlich für R_2 die aus (7) folgende Function von R_1 zu setzen, unter dem zweiten dagegen für R_1 die aus (7) folgende Function von R_2. Es ist weder U noch V gleich Null, weil sonst $D = 0$, die Fläche also die Tangentenfläche einer Minimalcurve wäre.

Wenn wir jetzt neue Parameter

$$\bar{u} = \int\sqrt{U}\,d\,u, \quad \bar{v} = \int\sqrt{V}\,d\,v$$

auf der Fläche einführen, wobei die Krümmungscurven nach wie vor die Parameterlinien bleiben, da $\bar{u}$ nur von u und $\bar{v}$ nur von v abhängt, so werden die Coordinaten x, y, z Functionen von $\bar{u}, \bar{v}$, und zwar ist:

$$x_{\bar{u}}\sqrt{U} = x_u, \quad x_{\bar{v}}\sqrt{V} = x_v$$

u. s. w., sodass nach XI (A) für die neuen Fundamentalgrössen $\bar{E}$, $\bar{G}$ kommt:

$$\bar{E} = \mathbf{S}\,\bar{x}_u^2 = \mathbf{S}\,\frac{x_u^2}{U} = \frac{E}{U}, \quad \bar{G} = \frac{G}{V},$$

also nach (8):

$$\bar{E} = R_1^2 e^{2\int\frac{d\,R_1}{R_2 - R_1}}, \quad \bar{G} = R_2^2 e^{2\int\frac{d\,R_2}{R_1 - R_2}}.$$

Bei der Aufstellung der Formeln (1) bis (6) hatten wir nur das Eine vorausgesetzt, dass die Parameterlinien (u) und (v) die Krümmungscurven seien. Da dasselbe von den neuen Parameterlinien ($\bar{u}$) und ($\bar{v}$) gilt, so dürfen wir annehmen, wir hätten schon vor der Aufstellung der Formeln (1) bis (6) gerade diese neuen Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ statt u und v benutzt, d. h. wir dürfen annehmen, dass in den Formeln (1) bis (6) die Grössen E und G die soeben gefundenen Werte $\bar{E}$, $\bar{G}$ haben, also:

$$(9) \qquad E = R_1^2 e^{2\int \frac{dR_1}{R_2 - R_1}}, \qquad G = R_2^2 e^{2\int \frac{dR_2}{R_1 - R_2}}$$

sei. Weil $R_1 - R_2$ nach Voraussetzung nicht gleich Null ist, so sind die Integrale endlich.

Bisher haben wir in der ersten Formel (9) die Grösse R_2 als Function von R_1 und in der zweiten Formel (9) die Grösse R_1 als Function von R_2 aufgefasst, definiert durch die Relation (7). Wir können natürlich auch R_1 und R_2 beide als Functionen einer dritten Grösse, einer Hülfsveränderlichen w auffassen, z. B. so: Die Function

$$(10) \qquad w = e^{\int \frac{dR_1}{R_1 - R_2}}$$

ist sicher nicht constant, weil $1:(R_1 - R_2)$ nicht gleich Null ist. Wenn wir aus (7) die Grösse R_2 als Function von R_1 berechnen und in diesen Ausdruck w einsetzen, so wird w eine Function von R_1 allein, die keine Constante ist. Umgekehrt ist dann auch R_1 eine Function von w, etwa:

$$(11) \qquad R_1 = \vartheta(w).$$

Wegen (10) ist alsdann

$$\frac{1}{R_1 - R_2} \frac{dR_1}{dw} = \frac{1}{w}$$

oder:

$$\frac{\vartheta'}{\vartheta - R_2} = \frac{1}{w},$$

woraus folgt:

$$(12) \qquad R_2 = \vartheta - w\vartheta'.$$

Wenn wir unter $\vartheta(w)$ irgend eine Function der Hülfsveränderlichen w verstehen und darauf R_1 und R_2 durch die Formeln (11) und (12) als Functionen von w definieren, so wird die Elimination von w aus (11) und (12) eine Relation zwischen R_1 und R_2 geben.

Man erkennt also, dass man die eine Relation (7) stets bei Einführung einer Hülfsgrösse w durch die beiden Gleichungen (11)

und (12) ersetzen kann, und umgekehrt: Ist $\vartheta(w)$ irgend eine Function von w, so ist durch (11) und (12) eine Relation (7) zwischen R_1 und R_2 hergestellt.

Auf der Fläche sind R_1 und R_2 zwei infolge von (7) von einander abhängige Functionen von u und v. Daher ist nach (11) auch die Hülfsgrösse w eine gewisse Function von u und v.

Wenn wir nun die Werte (11) und (12) in (9) einführen, wobei infolge von (11) und (12):

$$dR_1 = \vartheta' dw, \quad dR_2 = -w\vartheta'' dw$$

ist, so kommt, weil dann auch (10) besteht:

$$(13) \qquad E = \frac{\vartheta^2}{w^2},$$

während

$$G = (\vartheta - w\vartheta')^2 e^{-2\int \frac{\vartheta''}{\vartheta'} dw}$$

oder:

$$(14) \qquad G = a\left(\frac{\vartheta - w\vartheta'}{\vartheta'}\right)^2 \qquad (a = \text{Const.})$$

wird. Wenn wir statt v einen neuen Parameter $\bar{v} = cv$ einführen, wobei c eine Constante bedeute, so sind x, y, z Functionen der neuen Parameter:

$$\bar{u} = u, \quad \bar{v} = cv$$

und dabei ist:

$$x_{\bar{u}} = x_u, \quad x_{\bar{v}} = \frac{1}{c} x_v$$

u. s. w., sodass die neuen Fundamentalgrössen $\bar{E}$ und $\bar{G}$ nach XI (A) diese werden:

$$\bar{E} = \mathbf{S}\,\bar{x}_u^2 = \mathbf{S}\,x_u^2 = E, \quad \bar{G} = \mathbf{S}\,\bar{x}_v^2 = \frac{1}{c^2}\mathbf{S}\,x_v^2 = \frac{G}{c^2}.$$

Wählen wir jetzt $c = \sqrt{a}$, so kommt also nach (13) und (14)

$$\bar{E} = \frac{\vartheta^2}{w^2}, \quad \bar{G} = \left(\frac{\vartheta - w\vartheta'}{\vartheta'}\right)^2.$$

Da wir bei Einführung der neuen Parameter wiederum die Krümmungscurven als Parameterlinien haben, so dürfen wir — wie oben — annehmen, wir hätten von vornherein, vor Aufstellung der Formeln von (1) an, schon diese besonderen Parameter benutzt, d. h. wir dürfen setzen:

$$(15) \qquad E = \frac{\vartheta^2}{w^2}, \quad G = \left(\frac{\vartheta - w\vartheta'}{\vartheta'}\right)^2.$$

Die Formeln (10), (11), (12) ändern sich dabei nicht, weil in ihnen weder u noch v als Argument auftritt, vielmehr u und v nur in R_1, R_2 und w vorkommen. Nach (3), (11), (12) und (15) kommt noch:

$$L = \frac{E}{R_1} = \frac{\vartheta}{w^2}, \quad N = \frac{G}{R_2} = \frac{\vartheta - w\vartheta'}{\vartheta'^2}.$$

Also hat sich ergeben:

Satz 32: Besteht auf einer Fläche, die keine Schar von Minimalgeraden enthält, eine Relation zwischen den beiden Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2, ist aber weder R_1 noch R_2 constant, so kann man die Fundamentalgrössen der Fläche auf die Form bringen:

$$E = \frac{\vartheta^2}{w^2}, \quad F = 0, \quad G = \left(\frac{\vartheta - w\vartheta'}{\vartheta'}\right)^2,$$

$$L = \frac{\vartheta}{w^2}, \quad M = 0, \quad N = \frac{\vartheta - w\vartheta'}{\vartheta'^2},$$

während:

$$R_1 = \vartheta, \quad R_2 = \vartheta - w\vartheta'$$

ist. Dabei bedeutet w eine Function der Parameter u, v der Fläche und ϑ eine Function von w allein.

Es fragt sich nun aber, ob man w irgendwie als Function von u, v und ϑ irgendwie als Function von w wählen darf. Wir wissen nach Satz 25, S. 338, dass zu gegebenen Fundamentalgrössen dann und nur dann Flächen vorhanden sind, wenn sie die Fundamentalgleichungen erfüllen. Wenn wir die im Satze 32 angegebenen Fundamentalgrössen benutzen, so reducieren sich die Fundamentalgleichungen wegen $F = M = 0$ auf die obigen Gleichungen (2). Ferner sind dann R_1 und R_2 durch (3) gegeben. Man überzeugt sich sofort, dass die im Satze angegebenen Werte von R_1 und R_2 die Gleichungen (3) erfüllen. Wir haben die Fundamentalgleichungen mittels (3) auf die Formen (4) und (5) gebracht. Die Gleichungen (4) werden augenscheinlich befriedigt, nicht so die Gleichung (5). Denn zunächst können wir für $\sqrt{E}$ und $\sqrt{G}$ nach dem Satze die Werte

$$\frac{\vartheta}{w}, \quad \frac{\vartheta - w\vartheta'}{\vartheta'}$$

nehmen, da das Vorzeichen der Wurzeln, wie schon bemerkt wurde, in (5) keine Rolle spielt. Alsdann aber kommen für

$$\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}$$

die Werte:

$$-\frac{\vartheta'' w w_u}{\vartheta'^2} \quad \text{und} \quad -\frac{\vartheta' w_v}{w^2},$$

sodass die Gleichung (5) — die einzige noch zu erfüllende Bedingung — die Form annimmt:

$$\frac{1}{w\vartheta'} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\vartheta'' w w_u}{\vartheta'^2} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\vartheta' w_v}{w^2}.$$

Wir finden also:

Satz 33: Nur dann, wenn man w so als Function von u und v und ϑ so als Function von w wählt, dass die Bedingung:

$$\frac{1}{w\vartheta'} = \frac{\partial}{\partial u}\frac{\vartheta'' w w_u}{\vartheta'^2} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{\vartheta' w_v}{w^2}$$

für alle Werte von u und v erfüllt wird, giebt es Flächen mit den in Satz 32 angegebenen Fundamentalgrössen.

Nehmen wir jetzt an, eine Fläche sei uns irgendwie durch ihre endlichen Gleichungen gegeben, ausgedrückt mittels zweier Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$:

$$(16) \qquad x = \varphi(\bar{u}, \bar{v}), \quad y = \chi(\bar{u}, \bar{v}), \quad z = \psi(\bar{u}, \bar{v}).$$

Wir können dann leicht entscheiden, ob sie zu den hier betrachteten Flächen gehört. Wir berechnen nämlich die Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 als Functionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ nach XII (K) und untersuchen, ob die Functionaldeterminante von R_1 und R_2 hinsichtlich $\bar{u}$ und $\bar{v}$ gleich Null ist. Ist dies der Fall, so besteht eine Relation zwischen R_1 und R_2, sonst nicht; nach Satz 54, I S. 82. Wenn eine Relation besteht, so ergiebt sich, indem man aus den gefundenen Werten von R_1 und R_2 etwa $\bar{u}$ eliminiert, wobei dann zugleich $\bar{v}$ von selbst verschwinden muss, die Relation zwischen R_1 und R_2.

Wir wollen nun annehmen, bei der Fläche (16) sei wirklich eine solche Relation vorhanden, die nach R_2 aufgelöst etwa ergebe:

$$(17) \qquad R_2 = \varrho(R_1),$$

indem wir den Fall $R_1 = \text{Const.}$ beiseite lassen, und wollen uns fragen, wie man alsdann die in Satz 32 benutzten Parameter u und v findet, die vorläufig ja noch unbekannte Functionen der in (16) auftretenden Parameter $\bar{u}, \bar{v}$ sind. Es wird eine noch unbekannte Function w von u, v und eine noch unbekannte Function ϑ von w geben, sodass in Gemässheit des Satzes:

$$R_1 = \vartheta, \quad R_2 = \vartheta - w\vartheta'$$

wird. Natürlich kann w auch als Function der Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ aufgefasst werden. Als solche aber kann sie und zugleich ϑ leicht berechnet werden, denn nach (17) ist zu fordern:

$$\vartheta - w\,\vartheta' = \varrho(\vartheta)$$

oder, da ϑ nur von w abhängt:

$$\frac{d\,\vartheta}{\vartheta - \varrho(\vartheta)} = \frac{d\,w}{w},$$

woraus durch eine Quadratur hervorgeht:

$$\int \frac{d\,\vartheta}{\vartheta - \varrho(\vartheta)} = \log w + \text{Const.}$$

Ist die Quadratur ausgeführt, so giebt die Auflösung dieser Gleichung nach ϑ die gesuchte Function ϑ von w, wobei noch eine willkürliche Constante auftritt. Nun folgt, da R_1 als Function von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ bekannt ist, aus

$$R_1 = \vartheta(w)$$

durch Auflösung nach w auch der Wert von w als Function der ursprünglichen Parameter $\bar{u}$, $\bar{v}$.

Jetzt gehen wir daran, die neuen Parameter u und v als Functionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ zu finden. Sind

$$u = \lambda(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = \mu(\bar{u}, \bar{v}) \tag{18}$$

diese unbekannten Functionen, so ist längs der Krümmungscurven (u) und (v) der Fläche $d\,u = 0$ bez. $d\,v = 0$, d. h. entweder

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}}\,d\bar{u} + \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}\,d\bar{v} = 0 \tag{19}$$

oder

$$\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}\,d\bar{u} + \frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}}\,d\bar{v} = 0. \tag{20}$$

Nun aber lautet die Differentialgleichung der Krümmungscurven in den ursprünglichen Parametern $\bar{u}$, $\bar{v}$, wenn $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$, $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$ die zugehörigen als Functionen von $\bar{u}$, $\bar{v}$ bekannten Fundamentalgrössen bedeuten, nach XII (U) so:

$$\begin{vmatrix} d\bar{v}^2 & \bar{E} & \bar{L} \\ -\,d\bar{u}\,d\bar{v} & \bar{F} & \bar{M} \\ d\bar{u}^2 & \bar{G} & \bar{N} \end{vmatrix} = 0.$$

Es ist dies eine quadratische Gleichung für $d\bar{v} : d\bar{u}$, die sich in

zwei lineare Gleichungen zerspalten lässt. Es ergeben sich dabei etwa die Gleichungen

$$\frac{d\bar{v}}{d\bar{u}} = \alpha(\bar{u}, \bar{v}), \qquad \frac{d\bar{v}}{d\bar{u}} = \beta(\bar{u}, \bar{v})$$

als die Differentialgleichungen der Krümmungslinien. α und β sind bekannte Functionen von $\bar{u}$, $\bar{v}$. Dann muss (19) durch den einen, (20) durch den anderen Wert von $d\bar{v}:d\bar{u}$ befriedigt werden, d. h. es muss sein:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\bar{u}} + \frac{\partial\lambda}{\partial\bar{v}}\alpha = 0, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial\bar{u}} + \frac{\partial\mu}{\partial\bar{v}}\beta = 0.$$

Dies sind zwei Bedingungen für die unbekannten Functionen λ und μ von $\bar{u}$ und $\bar{v}$, aus denen folgt:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\bar{u}} = -\alpha\frac{\partial\lambda}{\partial\bar{v}}, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial\bar{u}} = -\beta\frac{\partial\mu}{\partial\bar{v}}. \tag{21}$$

Ausserdem wissen wir, dass die noch unbekannten auf u und v bezüglichen Fundamentalgrössen E, F, G den in (11), S. 17, aufgestellten Bedingungen genügen, die sich infolge von (21), da ja $F = 0$ sein muss, reduciren auf:

$$\left\{\begin{aligned} \bar{E} &= \alpha^2 E\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\bar{v}}\right)^2 + \beta^2 G\left(\frac{\partial\mu}{\partial\bar{v}}\right)^2, \\ \bar{F} &= -\alpha E\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\bar{v}}\right)^2 - \beta\, G\left(\frac{\partial\mu}{\partial\bar{v}}\right)^2, \\ \bar{G} &= E\left(\frac{\partial\lambda}{\partial\bar{v}}\right)^2 + G\left(\frac{\partial\mu}{\partial\bar{v}}\right)^2. \end{aligned}\right. \tag{22}$$

Nun sind uns zwar $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ als Functionen von u und v unbekannt, aber wir können sie als Functionen von $\bar{u}$, $\bar{v}$ darstellen. Denn sie müssen die in Satz 32 angegebenen Werte haben, und darin sind uns ϑ und w, wie wir sahen, als Functionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ bekannt, sodass wir also $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ als Functionen von $\bar{u}$, $\bar{v}$ kennen, wobei allerdings noch eine willkürliche Constante auftritt. In den Gleichungen (22) sind also nur

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\bar{v}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\mu}{\partial\bar{v}}$$

unbekannte, alle anderen Grössen dagegen bekannte Functionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$, und ausserdem tritt eine noch nicht näher bestimmte Constante auf. Da $\alpha \neq \beta$ ist, weil sonst die beiden Scharen von Krümmungscurven zusammenfallen würden, was ja oben ausgeschlossen

worden ist, so ergeben schon zwei der drei Gleichungen (22) durch Auflösen nach

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}}$$

diese Grössen als bekannte Functionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$. Es kann sein, dass dabei die noch auftretende Constante beliebig bleiben darf oder aber bestimmt gewählt werden muss, damit die drei Gleichungen (22) einander nicht widersprechen. Aus (21) ergeben sich weiterhin auch

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}}$$

als Functionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$. Entweder tritt in den Ausdrücken für diese vier partiellen Differentialquotienten noch eine willkürliche Constante auf oder nicht. Da es jedenfalls Functionen λ und μ geben muss, weil der Satz 32 gilt, so werden jedenfalls für einen bestimmten Wert der Constanten die gefundenen Ausdrücke den Bedingungen:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{v}} \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}}, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{v}} \frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial}{\partial \bar{u}} \frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}}$$

für alle Werte von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ Genüge leisten, sodass sich durch je eine Quadratur auch λ und μ selbst als Functionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ bestimmen lassen. Da wir somit die Gleichungen (18) zwischen den ursprünglichen Parametern $\bar{u}$, $\bar{v}$ und den neuen Parametern u, v kennen, so macht die Reduction der Flächengleichungen (16) auf diejenige Form, die in Satz 32 benutzt worden ist, keine Schwierigkeiten mehr. Zugleich haben wir die endlichen Gleichungen

$$\lambda(\bar{u}, \bar{v}) = \text{Const.}, \qquad \mu(\bar{u}, \bar{v}) = \text{Const.}$$

der Krümmungscurven gefunden. Daher hat sich noch ergeben:

Satz 34: Besteht auf einer Fläche eine Relation zwischen ihren beiden Hauptkrümmungsradien, so verlangt die Bestimmung ihrer Krümmungscurven nur Eliminationen und Quadraturen.[1]

In dem besonderen Fall einer Röhrenfläche haben wir dies schon auf S. 181 erkannt.

[1] Siehe Lie, „Über Flächen, deren Krümmungsradien durch eine Relation verknüpft sind", Archiv for Math. og Naturv. Bd. IV (1880), oder die Übersetzung dieser Abhandlung: „Sur les surfaces dont les rayons de courbure ont entre eux une relation", Bulletin des sciences math. 2. série, t. IV (1880). Insbesondere für die Minimalflächen, die ja zu den Flächen des Satzes 34 gehören, ist der Satz schon früher von Roberts bewiesen worden. Vgl. seine Arbeit: „Sur la surface dont les rayons de courbure sont égaux, mais dirigés en sens opposés", Journ. de Math. p. et appl. 1. série, t. XI. (1846).

Die Formeln des Satzes 32 zeigen, dass man auf den hier betrachteten Flächen solche Parameter einführen kann, dass die zugehörigen Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung sämtlich Functionen von nur einer Function $w(u, v)$ werden. Diese Eigenschaft ist nun charakteristisch: Wenn man nämlich auf irgend einer Fläche solche Parameter u, v einführen kann, dass die Fundamentalgrössen sämtlich nur von einer Function w von u und v abhängen, so folgt aus XII (K), dass auch ihre Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 Functionen von w allein werden und daher zwischen ihnen eine Relation besteht. Also können wir sagen:

Satz 35: Auf einer Fläche lassen sich dann und nur dann solche Parameter einführen, für die alle sechs Fundamentalgrössen von einander abhängige Functionen werden, wenn zwischen der Krümmung und mittleren Krümmung der Fläche eine Relation besteht.

Im vorigen Paragraphen haben wir das Congruenzproblem allgemein behandelt. Wir liessen dabei eine Lücke, indem wir eben die jetzt betrachteten Flächen ausschlossen. Wir wollen eine Art, wie man diese Lücke ausfüllen kann, nur kurz andeuten:

Liegen zwei Flächen vor und besteht auf der einen eine Relation zwischen R_1 und R_2, so kann diese Fläche der anderen nur dann congruent sein, wenn bei der zweiten Fläche dieselbe Relation zwischen R_1 und R_2 besteht. Um dann über ihre Congruenz zu entscheiden, kann man auf beiden Flächen nach der oben auseinandergesetzten Methode mittels Eliminationen und Quadraturen solche neue Parameter u, v bez. $\bar{u}, \bar{v}$ einführen,[1] dass die zugehörigen Fundamentalgrössen die in Satz 32 angegebenen Formen erhalten, also auf der einen Fläche:

$$E = \frac{\vartheta^2}{w^2}, \quad F = 0, \quad G = \left(\frac{\vartheta - w\vartheta'}{\vartheta'}\right)^2,$$

$$L = \frac{\vartheta}{w^2}, \quad M = 0, \quad N = \frac{\vartheta - w\vartheta'}{\vartheta'^2},$$

und auf der anderen Fläche:

$$\bar{E} = \frac{\bar{\vartheta}^2}{\bar{w}^2}, \quad \bar{F} = 0, \quad \bar{G} = \left(\frac{\bar{\vartheta} - \bar{w}\bar{\vartheta}'}{\bar{\vartheta}'}\right)^2,$$

$$\bar{L} = \frac{\bar{\vartheta}}{\bar{w}^2}, \quad \bar{M} = 0, \quad \bar{N} = \frac{\bar{\vartheta} - \bar{w}\bar{\vartheta}'}{\bar{\vartheta}'^2}$$

[1] Man kann die Congruenztheorie auch ohne vorherige Quadraturen durchführen, vgl. die in der Anm. zu S. 341 genannte Abhandlung von Lie. Es würde uns aber zu weit führen, darauf näher einzugehen.

wird. Dabei ist w eine Function von u, v, ferner $\bar{w}$ eine Function von $\bar{u}$, $\bar{v}$ und ϑ eine Function von w allein, $\bar{\vartheta}$ eine Function von $\bar{w}$ allein. Da ausserdem die Parametercurven die Krümmungscurven sind, so können die Flächen nur in der Art einander congruent sein, dass den Parameterlinien der einen Fläche die der anderen entsprechen. Mithin wird man nach S. 17 und nach Satz 25, S. 338, so verfahren: Man führt etwa auf der ersten Fläche neue Parameter ein vermöge zweier Gleichungen von der Form:

$$\bar{u} = \lambda(u), \quad \bar{v} = \mu(v)$$

oder vermöge zweier Gleichungen von der Form:

$$\bar{u} = \mu(v), \quad \bar{v} = \lambda(u),$$

wobei wie auf S. 346 im reellen Fall zu beachten ist, dass die Flächennormale ihre positive Richtung und daher auch die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung ihr Vorzeichen ändern, wenn nur eine der beiden Grössen λ' und μ' negativ ist. Die Einführung der neuen Veränderlichen und die Berechnung der neuen Fundamentalgrössen E', F', G', L', M', N' ist mittels der Formeln XI (A) und XII (B) leicht ausgeführt. Es kommt z. B. im ersten Fall:

$$E' = \frac{1}{\lambda'^2} E, \quad F' = 0, \quad G' = \frac{1}{\mu'^2} G,$$

$$L' = \frac{\alpha\beta}{\lambda'^2} L, \quad M' = 0, \quad N' = \frac{\alpha\beta}{\mu'^2} N,$$

wo $\alpha = \pm 1$ ist, je nachdem $\lambda' \gtreqless 0$ ist, und $\beta = \pm 1$ ist, je nachdem $\mu' \gtreqless 0$ ist. Nun hat man zu untersuchen, ob sich die Functionen λ und μ so wählen lassen, dass E', G' und L', N' die obigen Werte $\bar{E}$, $\bar{G}$, $\bar{L}$, $\bar{N}$ annehmen.

Diese Untersuchung bietet keinerlei Schwierigkeiten dar. Man findet sehr leicht, dass $w : \bar{w}$ eine Constante sein muss, darauf, dass λ' und μ' Constanten sein müssen u. s. w. Wir überlassen die Rechnung und die Aufstellung des Ergebnisses dem Leser.

Wenn auf der einen Fläche ein Hauptkrümmungsradius constant ist, so muss dasselbe auf der anderen Fläche gelten. In diesem Falle ist die Erledigung des Congruenzproblems noch einfacher. Denn nach Satz 31 sind dann folgende Möglichkeiten vorhanden:

Beide Flächen sind Röhrenflächen: Man wird die Gleichungen des Ortes $\mathfrak{c}$ der Kreismitten bestimmen und untersuchen, ob diese beiden Curven einander congruent sind, nach Satz 25, I S. 219.

Beide Flächen sind **abwickelbar**: Man untersucht, ob ihre Gratlinien einander congruent sind.

Beide Flächen sind **Kugeln** oder beide Flächen sind **Rotationscylinder**: In diesen Fällen ist die Untersuchung augenscheinlich noch einfacher.

Wie schon bemerkt wurde, gehören zu den in diesem Paragraphen betrachteten Flächen insbesondere die **Flächen constanter mittlerer Krümmung**

$$H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Für diese ergiebt Satz 32, wenn die Werte von R_1 und R_2 eingesetzt werden, die Bedingungsgleichung für ϑ:

$$\frac{1}{\vartheta} + \frac{1}{\vartheta - w\vartheta'} = H,$$

aus der folgt:

$$\frac{(H\vartheta - 1)\,d\vartheta}{(H\vartheta - 2)\,\vartheta} = \frac{dw}{w}.$$

Integrieren wir beiderseits, so kommt:

$$\tfrac{1}{2}\log(H\vartheta - 2)\,\vartheta = \log w + \text{Const.} \tag{23}$$

oder:

$$\vartheta = \frac{1 + \sqrt{1 + c w^2}}{H} \qquad (c = \text{Const.}).$$

Jetzt ist nach Satz 32:

$$\frac{E}{G} = \frac{\vartheta^2 (H\vartheta - 2)^2}{w^4} = c^2,$$

also constant. Nach Satz 23, S. 56, folgt hieraus, da die Parameterlinien die Krümmungscurven sind:

Satz 36: Auf den Flächen constanter mittlerer Krümmung bilden die Krümmungscurven ein Isothermensystem.[1]

Ferner lautet hier die Differentialgleichung XI(O) der Minimalcurven, da überdies $F = 0$ ist, so:

$$c^2 du^2 + dv^2 = 0$$

oder:

$$c\,du \pm dv = 0,$$

sodass

$$cu \pm v = \text{Const.}$$

---

[1] Siehe Bonnet, „Note sur la théorie générale des surfaces", Comptes Rendus t. XXXVII (1853), und die in der ersten Anm. auf S. 216 erwähnte Abhandlung.

die endlichen Gleichungen der Minimalcurven sind. Da die Einführung der Parameter u, v nach dem Obigen nur Eliminationen und Quadraturen erforderte, so folgt:

Satz 37:[1] Auf den Flächen constanter mittlerer Krümmung lassen sich die Minimalcurven durch Quadratur bestimmen.

Insbesondere gehören die Minimalflächen zu den Flächen constanter mittlerer Krümmung, denn es sind dies die Flächen, für die $H = 0$ ist. In diesem Fall aber folgt aus (23) anderes wie oben, nämlich:

$$\vartheta = c w^2 \qquad (c = \text{Const.}),$$

sodass nach Satz 32

$$\frac{E}{G} = 4 c^2, \tag{24}$$

d. h. auch jetzt constant ist. Der Satz 36 mag für diesen Fall besonders formuliert werden:

Satz 38: Auf den Minimalflächen bilden die Krümmungscurven ein Isothermensystem.

Hier lassen sich also die Krümmungscurven so anordnen, dass sie unendlich kleine Quadrate bilden, deren Diagonalcurven einerseits wieder ein Isothermennetz darstellen, weil das in I S. 125 Gesagte ja offenbar auch auf Flächen gilt, und andererseits nach S. 241 die Haupttangentencurven sind, sodass auch der Satz gilt:

Satz 39: Auf den Minimalflächen bilden die Haupttangentencurven ein Isothermensystem.

Aus (24) erhellt ferner, dass der Satz 37 auch für die Minimalflächen gilt, indem sich hier die endlichen Gleichungen für die Minimalcurven ergeben:

$$2 c u \pm i v = \text{Const.}$$

Ferner ist im Fall der Minimalflächen wegen $\vartheta = c w^2$ und nach Satz 32:

$$\frac{L}{N} = \frac{\vartheta \vartheta'^2}{w^2 (\vartheta - w \vartheta')} = -4 c^2,$$

also, da $M = 0$ ist, nach XII (X) die Differentialgleichung der Haupttangentencurven:

$$-4 c^2 d u^2 + d v^2 = 0$$

[1] Siehe die in der Anm. zu S. 366 genannten Arbeiten von Lie.

oder:

$$2c\,du \pm dv = 0,$$

woraus die endlichen Gleichungen der Haupttangentencurven hervorgehen:

$$2cu \pm v = \text{Const.}$$

Also folgt:

Satz 40: Auf den Minimalflächen lassen sich die Haupttangentencurven durch Quadratur bestimmen.[1]

Übrigens kann man dies bei der in Satz 114, S. 247, gegebenen Darstellung der Minimalflächen, die allerdings zur Voraussetzung hat, dass man die Minimalcurven der Fläche schon kennt, sofort bestätigen, denn dort ergaben sich in (5) für die Fundamentalgrössen L, M, N solche Werte, für die die Differentialgleichung der Haupttangentencurven nach XII (X) so lautet:

$$\sqrt{U}\,du \pm i\sqrt{V}\,dv = 0,$$

sodass

$$\int \sqrt{U}\,du \pm i\sqrt{V}\,dv = \text{Const.}$$

die endlichen Gleichungen der Haupttangentencurven sind.

Wir haben auf den Minimalflächen oben folgende einfache Darstellungen der charakteristischen Curven gefunden: Die Krümmungscurven sind gegeben durch:

$$u = \text{Const.}, \qquad v = \text{Const.},$$

die Minimalcurven durch:

$$2cu \pm iv = \text{Const.},$$

die Haupttangentencurven durch:

$$2cu \pm v = \text{Const.}$$

Hieraus folgt, dass auf der Minimalfläche die Krümmungscurven so angeordnet werden können, dass die Diagonalcurven ihres Netzes entweder die Minimalcurven oder aber die Haupttangentencurven werden. Vgl. I S. 138, 139. Man erkennt hieraus, dass der Satz 87, I S. 139, für den Fall dieser Curven auf den Minimalflächen durch unsere Ergebnisse bestätigt wird.[2]

---

[1] Dies wurde zuerst von Roberts gezeigt, vgl. die in der Anm. zu S. 366 genannte Abhandlung.

[2] Weitere Ausführungen hierzu findet man in dem Werke von Lie: „Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen“, bearb. v. Verf., Leipzig 1891, Kap. 9, § 4.

Auch die Flächen constanter Krümmung:

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}$$

gehören zu den Flächen des Satzes 32. Mittels Elimination und Quadraturen können wir also auch auf ihnen solche Parameter u, v einführen, dass die Formeln des Satzes 32 gelten. Alsdann folgt aber, wenn wir dem Satze die Werte von R_1 und R_2 entnehmen:

$$\vartheta(\vartheta - w\vartheta') = \frac{1}{K}$$

oder

$$\frac{1}{2}\frac{d(\vartheta^2)}{\vartheta^2 - \frac{1}{K}} = \frac{dw}{w},$$

woraus durch Integration folgt:

$$\frac{1}{2}\log\left(\vartheta^2 - \frac{1}{K}\right) = \log w + \text{Const.}$$

oder auch:

$$\vartheta^2 = \frac{1}{K} + c w^2 \qquad (c = \text{Const.}).$$

Nach Satz 32 ist nun:

$$L\vartheta' = \frac{\vartheta\vartheta'}{w^2} = \frac{c}{w}, \qquad M = 0, \qquad N\vartheta' = \frac{1}{Kcw}.$$

Die Differentialgleichung der Haupttangentencurven nimmt also nach XII (X) hier die einfache Gestalt an:

$$Kc^2 du^2 + dv^2 = 0$$

und liefert die beiden einzelnen Gleichungen:

$$\pm c\sqrt{K}\,du + dv = 0,$$

woraus folgt, dass

$$\pm c\sqrt{K}\;u + \;v = \text{Const.}$$

die endlichen Gleichungen der Haupttangentencurven sind. Hieraus und aus Satz 34 folgt also:

Satz 41: Die Krümmungscurven und Haupttangentencurven einer Fläche constanter Krümmung lassen sich durch Quadratur bestimmen.[1]

[1] Satz von Lie, „Zur Theorie der Flächen constanter Krümmung, I", Archiv for Math. og Naturv. Bd. IV (1879).

§ 12. Functionen des Ortes auf der Fläche.

Zum Schlusse dieses Abschnittes wollen wir noch eine Betrachtung anstellen, die die natürliche Verallgemeinerung der Betrachtung im 1. Bande, § 13 des ersten Abschnittes, ist. Wir stellen uns nämlich vor, es sei eine Fläche

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v) \tag{1}$$

und eine Function

$$f(u, v)$$

der Parameter u und v gegeben. Dabei beschränken wir uns — wie immer — auf eindeutige, endliche, stetige und differenzierbare Functionen (vgl. I S. 80).

Zu jedem Punkte (x, y, z) der Fläche gehört ein Wertepaar u, v der Parameter und zu diesem Wertepaar ein Wert der Function f. Jedem Punkte (u, v) der Fläche ist also ein Zahlenwert der Function f zugeordnet. Wenn man will, kann man der Function f eine physikalische Bedeutung unterlegen. Sie kann z. B. die Belegung der Fläche mit einer Masse zum Ausdruck bringen, indem f die Dichte der Masse an der Stelle (u, v) bedeutet, oder man kann sich vorstellen, die Fläche sei erwärmt worden und habe an der Stelle (u, v) die Temperatur $f(u, v)$ u. s. w.

Giebt man der Constanten c einen bestimmten Wert, so stellt die Gleichung

$$f(u, v) = c$$

eine Curve auf der Fläche dar (nach Satz 3, S. 11). So liegen auf der Fläche ∞^1 Curven

$$f(u, v) = \text{Const.},$$

auf deren jeder f einen constanten Wert hat. Durchwandert der Punkt (u, v) die Fläche (1) auf irgend einem Wege, so wird er diese Curvenschar durchsetzen, indem f nach und nach verschiedene Zahlenwerte annimmt. Dabei wird die Geschwindigkeit, mit der sich f ändert, auch wechseln.

Diese Geschwindigkeit können wir so definieren: Der Punkt (u, v) lege einen unendlich kleinen Weg ds zurück, indem seine Parameter u und v um unendlich kleine Grössen du und dv wachsen. Dabei geht der zum Punkte (u, v) gehörige Wert von $f(u, v)$ ebenfalls in einen unendlich wenig geänderten Wert über, denn f ändert sich um

$$df = f_u\,du + f_v\,dv. \tag{2}$$

Alsdann ist der Quotient

$$\frac{df}{ds}$$

das **Maass der Geschwindigkeit, mit der sich die Function** f **auf dem Wege** ds **ändert.** Wir können diesen Quotienten auch den **Differentialquotienten der Function** f **nach dem Wege** nennen.

Es muss aber gezeigt werden, dass dieser Differentialquotient einen bestimmten Wert hat: Sind E, F, G die Fundamentalgrössen erster Ordnung der Fläche (1), so ist

$$ds^2 = E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

also:

$$(3) \qquad \frac{df}{ds} = \frac{f_u\,du + f_v\,dv}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}}.$$

Die rechte Seite ist homogen von nullter Ordnung in Bezug auf du und dv, was auch dadurch zum Ausdruck gebracht werden kann, dass man den endlichen Quotienten:

$$dv : du = k$$

einführt, wodurch rechts die Differentiale fortfallen, sodass sich der endliche Wert ergiebt:

$$(4) \qquad \frac{df}{ds} = \frac{f_u + f_v\,k}{\sqrt{E + 2Fk + Gk^2}}.$$

Ist der Punkt (u, v) bestimmt gewählt worden, ebenso die Richtung $(k = dv : du)$ des Fortschreitens längs eines Elementes ds und hat man eine Festsetzung über das Vorzeichen der Quadratwurzel getroffen, so hat die rechte Seite im allgemeinen einen endlichen und bestimmten Wert.

Nachdem wir so den Differentialquotienten der Function f nach dem Wege definiert haben, können wir ihn noch anders bezeichnen: Die rechte Seite von (4) hängt von der Länge des Weges ds gar nicht ab, sondern nur von seiner Richtung, die durch k angegeben wird. Daher können wir den Ausdruck auch den **Differentialquotienten der Function** f **nach der Richtung** (k) nennen.

Wir sehen hierbei von solchen Stellen (u, v) der Fläche ab, an denen sowohl f_u als auch f_v gleich Null ist, weil dann das Increment von f nicht den Wert (2), sondern — vorausgesetzt, dass nicht alle zweiten partiellen Ableitungen von f ebenda gleich Null sind — den Wert:

$$\tfrac{1}{2} f_{uu}\,du^2 + f_{uv}\,du\,dv + \tfrac{1}{2} f_{vv}\,dv^2$$

hat. An einer allgemein gewählten Stelle (u, v) der Fläche sind f_u und f_v sicher nicht beide gleich Null, weil sonst f eine Constante wäre, was wir natürlich ausschliessen. Solche Stellen (u, v) der Fläche, an denen $f_u = f_v = 0$ ist, nennen wir singuläre Stellen der Function f (vgl. I S. 84).

Ferner wollen wir im Fall einer reellen Fläche (1) mit reeller Parameterdarstellung den Weg ds stets als positiv betrachten, sodass die Quadratwurzel in (3) alsdann positiv zu nehmen ist, woraus folgt, dass $df : ds$ postiv oder negativ ist, je nachdem der Zähler in (3), d. h.

$$f_u du + f_v dv$$

positiv oder negativ ist, d. h. je nachdem f auf der eingeschlagenen Richtung zu- oder abnimmt.

Die Formel (4) werden wir also im reellen Fall lieber so schreiben:

$$\frac{df}{ds} = \varepsilon \frac{f_u + f_v k}{\sqrt{E + 2Fk + Gk^2}}, \tag{5}$$

indem wir dann festsetzen, dass die Quadratwurzel positiv sein und $\varepsilon = \pm 1$ sein soll, je nachdem

$$f_u du + f_v dv \gtreqless 0$$

ist.

Um uns nun von der Art der Änderung der Function f ein anschauliches Bild zu machen, tragen wir den Wert (4) oder (5) als Strecke auf der Tangente des zugehörigen Weges ds vom Punkte (u, v) aus auf und zwar, wenn der Wert positiv ist, im Sinne vom Punkte (u, v) zum Punkte $(u + du,\ v + dv)$, andernfalls im umgekehrten Sinne, also rückwärts. Zu einer Tangente des Punktes (u, v) gehört zwar nur ein Wert von $k = dv : du$. Aber es ist auch

$$k = \frac{-dv}{-du}.$$

Ist der Differentialquotient $df : ds$ für du und dv etwa positiv, so ist er für $-du$ und $-dv$ negativ, vom selben absoluten Werte und umgekehrt. Daraus folgt, dass wir bei seiner graphischen Darstellung für beide Richtungen des Fortschreitens auf der Tangente (k) doch nur eine Strecke erhalten, was auch die Formeln nachher zeigen werden.

Es seien $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ die Richtungscosinus der Tangente (k) und zwar im Sinne des Fortschreitens vom Punkte (u, v) zum Punkte $(u + du,\ v + dv)$. Dann ist:

$$\mathfrak{X} : \mathfrak{Y} : \mathfrak{Z} = (x_u du + x_v dv) : (y_u du + y_v dv) : (z_u du + z_v dv),$$

also, da die Summe der Quadrate der rechtsstehenden Klammern nach XI (*A*) gleich

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

ist:

$$\mathfrak{X} = \frac{x_u\,du + x_v\,dv}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}} \tag{6}$$

u. s. w., wobei die Quadratwurzel im reellen Fall positiv zu wählen ist. Der Endpunkt der zugehörigen Strecke, die als Wert des Differentialquotienten $df:ds$ aufgetragen wird, hat dann die Coordinaten:

$$\mathfrak{x} = x + \mathfrak{X}\frac{df}{ds}, \quad \mathfrak{y} = y + \mathfrak{Y}\frac{df}{ds}, \quad \mathfrak{z} = z + \mathfrak{Z}\frac{df}{ds}$$

oder nach (3) und (6) die Coordinaten:

$$\mathfrak{x} = x + \frac{(x_u\,du + x_v\,dv)(f_u\,du + f_v\,dv)}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} \tag{7}$$

u. s. w. Das Fehlen von Quadratwurzeln und die Unveränderlichkeit dieser Ausdrücke beim Ersetzen von du und dv durch $-du$ und $-dv$ zeigt auch analytisch, dass wir auf der Tangente, die zu $k = dv:du$ gehört, nur eine Strecke erhalten, gleichgültig ob wir im einen oder anderen Sinne fortschreiten.

Wir können die Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ des Endpunktes des graphisch dargestellten Differentialquotienten auch so schreiben:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{x} &= x + \frac{f_u + f_v k}{E + 2Fk + Gk^2}\cdot(x_u + x_v k), \\ \mathfrak{y} &= y + \frac{f_u + f_v k}{E + 2Fk + Gk^2}\cdot(y_u + y_v k), \\ \mathfrak{z} &= z + \frac{f_u + f_v k}{E + 2Fk + Gk^2}\cdot(z_u + z_v k). \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Lassen wir k variieren, d. h. tragen wir auf allen Fortschreitungsrichtungen vom Punkte (u, v) aus die zugehörigen Werte des Differentialquotienten $df:ds$ graphisch auf, so ist der Ort der Endpunkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ eine Curve in der Tangentenebene des Punktes (u, v). Diese Curve ist durch (8) mittels des Parameters k dargestellt. Dabei sind mit u, v alle Grössen rechts ausser k bestimmte Zahlen.

In der Ebene ergab sich als die entsprechende Curve ein Kreis durch den Punkt (vgl. Satz 56, I S. 84). Dass dies auch jetzt der Fall ist, sieht man so: Wären a, b, c die rechtwinkligen

Coordinaten desjenigen Punktes des fraglichen Kreises, der dem Punkte (x, y, z) oder (u, v) gegenüberliegt, so wären

$$\tfrac{1}{2}(a + x), \quad \tfrac{1}{2}(b + y), \quad \tfrac{1}{2}(c + z)$$

die Coordinaten der Kreismitte und $\mathbf{S}(a - x)^2$ das Quadrat des Kreisdurchmessers, daher in den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Gleichung:

$$\mathbf{S}[\mathfrak{x} - \tfrac{1}{2}(a + x)]^2 = \tfrac{1}{4}\mathbf{S}(a - x)^2$$

die Gleichung der Kugel, die den Kreis zum grössten Kreis hätte. Es müsste also gezeigt werden, dass es drei von k unabhängige Coordinaten a, b, c giebt, die erstens diese Gleichung erfüllen und zweitens einen Punkt in der Tangentenebene des Punktes (x, y, z) festlegen. Die zweite Bedingung drückt sich, wenn X, Y, Z die Richtungscosinus der Flächennormale sind, so aus:

$$\mathbf{S}X(a - x) = 0, \tag{9}$$

während die erste zunächst so geschrieben werden kann:

$$\mathbf{S}[(\mathfrak{x} - x) - \tfrac{1}{2}(a - x)]^2 = \tfrac{1}{4}\mathbf{S}(a - x)^2$$

oder so:

$$\mathbf{S}(\mathfrak{x} - x)^2 - \mathbf{S}(\mathfrak{x} - x)(a - x) = 0.$$

Nach (8) und XI (A) ist aber:

$$\mathbf{S}(\mathfrak{x} - x)^2 = \frac{(f_u + f_v k)^2}{E + 2Fk + Gk^2},$$

$$\mathbf{S}(\mathfrak{x} - x)(a - x) = \frac{(f_u + f_v k)\,\mathbf{S}(x_u + x_v k)(a - x)}{E + 2Fk + Gk^2},$$

sodass die Bedingung, weil sich überdies der Factor $f_u + f_v k$ und der Nenner absondern lässt, so lautet:

$$f_u + f_v k - \mathbf{S}(x_u + x_v k)(a - x) = 0$$

oder:

$$[f_u - \mathbf{S}x_u(a - x)] + [(f_v - \mathbf{S}x_v(a - x)]k = 0.$$

Da die Bedingung für alle Werte von k bestehen soll, zerfällt sie in die beiden Forderungen:

$$\mathbf{S}x_u(a - x) = f_u, \qquad \mathbf{S}x_v(a - x) = f_v. \tag{10}$$

Es kommt also nur noch darauf an zu beweisen, dass es Werte a, b, c giebt, die den Gleichungen (9) und (10) genügen. Es sind dies aber drei in $a - x$, $b - y$, $c - z$ lineare Gleichungen, deren Determinante nach XI (L) von Null verschieden ist, sobald die Fläche nicht die Tangentenfläche einer Minimalcurve ist; von solchen

Flächen sehen wir ab. Also lassen sich $a-x$, $b-y$, $c-z$ und damit auch a, b, c aus (9) und (10) bestimmen. Folglich:

Satz 42: Trägt man auf allen Fortschreitungsrichtungen von einem Flächenpunkte (u, v) aus diejenigen Differentialquotienten

$$\frac{df}{ds} = \frac{f_u\,du + f_v\,dv}{\sqrt{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}}$$

einer Ortsfunction $f(u, v)$ graphisch als Strecken auf, die zu den betreffenden Richtungen $(dv:du)$ gehören, so ist der Ort der Endpunkte dieser Strecken ein Kreis in der Tangentenebene des Punktes (u, v); und dieser Kreis geht durch den Punkt (u, v) selbst. Vorausgesetzt ist dabei, dass die Fläche keine Tangentenfläche einer Minimalcurve sei. (Siehe Fig. 74.)

Unter allen Fortschreitungsrichtungen vom Punkte (u, v) aus giebt es also zwei hinsichtlich der Function f ausgezeichnete Richtungen, erstens die Richtung nach der Kreismitte hin und zweitens die dazu senkrechte, also die Tangentenrichtung des Kreises im Punkte (u, v). Die erste Richtung ist im reellen Fall diejenige, für die der Differentialquotient $df:ds$ sein Maximum hat, die zweite ist — auch im imaginären Falle — diejenige, für die der Differentialquotient gleich Null ist. Jene erste Richtung nennen wir kurz die Maximalrichtung. Sie ist im reellen Fall auch dem Sinne nach vollständig bestimmt, da sie zum Punkte (a, b, c) geht. Sind du, dv die Incremente von u und v nach dieser Richtung hin, so müssen sich die Differentiale

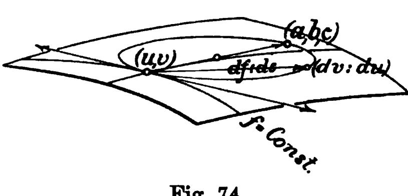


Fig. 74.

$$x_u\,du + x_v\,dv, \quad y_u\,du + y_v\,dv, \quad z_u\,du + z_v\,dv$$

so wie

$$a - x, \quad b - y, \quad c - z$$

zu einander verhalten, und beide Grössenreihen müssen überdies im reellen Fall in ihren Vorzeichen übereinstimmen. Da nun aus (10) die in $a-x$, $b-y$, $c-z$ homogene Gleichung folgt:

$$f_v\,\mathbf{S}\,x_u(a-x) - f_u\,\mathbf{S}\,x_v(a-x) = 0,$$

so ist für die gesuchten Differentiale

$$f_v\,\mathbf{S}\,x_u(x_u\,du + x_v\,dv) - f_u\,\mathbf{S}\,x_v(x_u\,du + x_v\,dv) = 0$$

oder wegen XI (A):

$$(Ef_v - Ff_u)\,du + (Ff_v - Gf_u)\,dv = 0,$$

sodass

$$du : dv = (Gf_u - Ff_v) : (Ef_v - Ff_u)$$

ist. Wir wissen aber noch nicht, ob die Grössen du und dv dieselben Vorzeichen wie die Klammern rechts oder die entgegengesetzten Vorzeichen haben. Es ist zu fordern, dass z. B. die Summe:

$$\mathbf{S}\, x_u (x_u\,du + x_v\,dv) \quad \text{oder} \quad E\,du + F\,dv$$

dasselbe Vorzeichen wie $\mathbf{S}\, x_u (a - x)$ oder — nach (10) — wie f_u habe. Wenn wir statt du und dv direct jene beiden Klammern setzen, so tritt statt $E\,du + F\,dv$ auf:

$$E(Gf_u - Ff_v) + F(Ef_v - Ff_u)$$

oder

$$(EG - F^2) f_u,$$

und dies ist im reellen Fall nach S. 18 wirklich von demselben Vorzeichen wie f_u. Also sehen wir:

Für die gesuchte Maximalrichtung sind du und dv proportional

$$Gf_u - Ff_v \quad \text{und} \quad Ef_v - Ff_u$$

und stimmen — im reellen Fall — auch im Vorzeichen mit diesen Grössen überein. Aus (3) folgt der zugehörige Wert des Differentialquotienten von f, wenn wir diese proportionalen Grössen einsetzen. Da nämlich

$$\begin{aligned}(11) \quad E(Gf_u - Ff_v)^2 + 2F(Gf_u - Ff_v)(Ef_v - Ff_u) + G(Ef_v - Ff_u)^2 = \\ = (EG - F^2)(Ef_v^2 - 2Ff_uf_v + Gf_u^2)\end{aligned}$$

ist, so kommt:

$$(12) \qquad \left(\frac{df}{ds}\right)_{\text{Max.}} = \frac{1}{D} \sqrt{Ef_v^2 - 2Ff_uf_v + Gf_u^2},$$

und zwar gilt hier im reellen Fall das positive Vorzeichen bei der Wurzel, deren Radicand im reellen Fall selbst positiv ist.

Denken wir uns jetzt die Fläche von den schon oben erwähnten ∞^1 Curven

$$f(u, v) = \text{Const.}$$

überzogen, so wird durch den betrachteten Punkt (u, v) eine gewisse Curve der Schar gehen. Längs ihrer ändert sich die Ortsfunction f nicht, längs ihrer Tangente im Punkte (u, v) ist daher $df : ds = 0$. Mithin berührt sie im Punkte (u, v) den in Satz 42

angegebenen Kreis. Die zu ihrer Tangente senkrechte Tangente giebt also die Maximalrichtung an; sie ist die Richtung der durch den Punkt (u, v) gehenden orthogonalen Trajectorie aller Curven $f =$ Const. Wir sagen deshalb:

Satz 43: Der Differentialquotient $df:ds$ der Ortsfunction $f(u, v)$ auf einer Fläche hat im Punkte (u, v) der Fläche für die verschiedenen Fortschreitungsrichtungen verschiedene Werte. Er ist gleich Null längs der Tangente der Curve $f =$ Const., die durch den Punkt (u, v) geht, und hat längs der Tangente der durch den Punkt (u, v) laufenden orthogonalen Trajectorie aller ∞^1 Curven $f =$ Const. den Wert:

$$\frac{1}{D}\sqrt{Ef_v^2 - 2Ff_uf_v + Gf_u^2},$$

der im reellen Fall das Maximum unter allen Werten von $df:ds$ an der Stelle (u, v) angiebt. Längs der Fortschreitungsrichtung dieser orthogonalen Trajectorie sind die Incremente du und dv den Grössen:

$$Gf_u - Ff_v \quad \text{und} \quad Ef_v - Ff_u$$

proportional, und im reellen Fall stimmen sie auch mit diesen Grössen in den Vorzeichen überein, wenn der Sinn der Fortschreitung so genommen werden soll, dass f dabei wächst.

Kennt man den Differentialquotienten $df:ds$ für zwei Richtungen durch den Punkt (u, v), z. B. für die (positiven) Fortschreitungsrichtungen auf den Parameterlinien, so kennt man ihn für alle Richtungen durch den Punkt (u, v). Denn wenn man die beiden Werte — unter Beachtung der Vorzeichen — graphisch aufträgt, erhält man zwei Endpunkte, die zusammen mit dem Punkte (u, v) den in Satz 42 angegebenen Kreis bestimmen.

Aus unseren Betrachtungen geht auch der Satz hervor:

Satz 44: Soll sich der Punkt (u, v) auf einer Fläche so bewegen, dass sich eine Function $f(u, v)$ seines Ortes möglichst stark ändert, so muss er eine Curve beschreiben, die alle Curven

$$f(u, v) = \text{Const.}$$

auf der Fläche senkrecht durchschneidet.

Vgl. Satz 57, I S. 85, für den Fall der Ebene. Wie wir dort weiterhin den Satz 58, I S. 86, ableiteten, so könnten wir auch hier

einen entsprechenden Satz beweisen. Wir gehen hierauf aber nicht ein. Dagegen sei ein Umstand erwähnt, der Bedenken erregen könnte: Wir sahen, dass die Differentialquotienten $df:ds$ der Ortsfunction f graphisch als Sehnen eines Kreises dargestellt werden können. Nun aber gehen vom Punkte (u, v) zwei Minimalrichtungen auf der Fläche aus, auf denen $ds = 0$ ist (nach S. 35), sodass hier $df:ds = \infty$ wird. Thatsächlich hat aber auch jeder Kreis unendlich grosse Sehnen, sobald man auch das Imaginäre berücksichtigt. Z. B. wird der Kreis in der xy-Ebene:

$$x^2 - 2ax + y^2 = 0,$$

der durch den Anfangspunkt geht, von einer Geraden $y = \alpha x$ durch den Anfangspunkt zum zweiten Mal in einem Punkte getroffen, dessen x-Coordinate den Wert

$$x = \frac{2a}{1 + \alpha^2}$$

hat. Für $\alpha = \pm i$ aber wird dieser Wert unendlich gross.[1]

Führen wir auf die Fläche (1) eine Bewegung aus, bringen wir sie also in eine andere Lage, so hat das keine Wirkung auf die Function $f(u, v)$ des Ortes, da die Parameter u, v nach wie vor dem alten, allerdings an eine andere Stelle des Raumes übergeführten Flächenpunkte angehören. Also bleibt auch der Ausdruck (12) dabei ungeändert, weil sich ja auch E, F, G und D nach Satz 6, S. 16, nicht ändern.

Führen wir zweitens neue Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ auf der Fläche ein, indem wir etwa:

$$u = \lambda(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = \mu(\bar{u}, \bar{v}) \tag{13}$$

setzen, so geht die Function $f(u, v)$ des Ortes in die Function:

$$\bar{f} = f\left(\lambda(\bar{u}, \bar{v}), \mu(\bar{u}, \bar{v})\right)$$

von $\bar{u}, \bar{v}$ über. Da aber der Punkt (u, v) mit dem Punkte $(\bar{u}, \bar{v})$ identisch ist, sobald die Parameterpaare den Bedingungen (13) genügen, so gehört nach wie vor jedem Punkte der Fläche derselbe Zahlenwert von $\bar{f}$ zu, der ihm früher durch f zugeordnet war. Daher bleiben dann auch unsere Betrachtungen

[1] Wie wir in I S. 339 sahen, haben alle Kugeln in der Auffassung der projectiven Geometrie einen imaginären unendlich fernen Kreis gemein. Jeder Kreis also hat im Unendlichfernen zwei imaginäre Punkte, nämlich jene Punkte, in denen seine Ebene jenen unendlich fernen Kreis trifft. Dies zur Erläuterung des Textes; doch machen wir von diesen Vorstellungen keinen Gebrauch.

über den Differentialquotienten richtig. Der Maximalwert des Differentialquotienten von $\bar{f}$ ist nun, wenn $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ die auf $\bar{u}$, $\bar{v}$ bezüglichen Fundamentalgrössen der Fläche bedeuten, analog (12) zu bilden, indem darin alle Grössen mit Querstrichen zu versehen sind. Er muss notwendig denselben Wert wie früher haben, da ja jedem Punkte der Fläche noch dieselbe Zahl durch die Ortsfunction zugeordnet ist wie vorher.

Dieser Schluss lässt sich auch auf den imaginären Fall ausdehnen, denn die Grösse (12) kann, statt als Maximalwert, auch als der vom Punkte (u, v) ausgehende Kreisdurchmesser definiert werden. und diese Definition behält auch für den imaginären Fall ihren Sinn. Da wir aber im Fall einer imaginären Fläche oder einer imaginären Parameterdarstellung einer reellen Fläche keine Festsetzung über das Vorzeichen der Quadratwurzel getroffen haben, so können wir das Ergebnis allgemein nur für das Quadrat des Ausdruckes (12) aussprechen:

Satz 45: Ist $f(u, v)$ eine Function des Ortes (u, v) auf einer Fläche, so ändert sich der Ausdruck

$$\frac{E f_v^2 - 2 F f_u f_v + G f_u^2}{D^2}$$

weder bei Ausführung einer Bewegung noch bei Einführung neuer Parameter auf der Fläche.

Dieser Satz lässt sich auch direct leicht beweisen, indem man nämlich in den Ausdruck:

$$\frac{1}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}\left[\bar{E}\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{v}}\right)^2 - 2\bar{F}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}}\,\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{v}} + \bar{G}\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}}\right)^2\right]$$

die Werte von $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ nach den Formeln (11) auf S. 17 und die Werte:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}},$$

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial f}{\partial u}\,\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial f}{\partial v}\,\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}}$$

einsetzt, wodurch der im Satze angegebene Ausdruck hervorgeht.

Der im Satze angegebene invariante Ausdruck heisst der erste Differentialparameter der Function $f(u, v)$[1] und zwar deshalb

[1] Ganz gelegentlich kommt ein erster Differentialparameter schon in GAUSS' „Disquisitiones" (vgl. die Anm. zu S. 5) in art. 22 vor, wie man überhaupt naturgemäss bei vielen Rechnungen in der Flächentheorie auf diesen invarianten Ausdruck geführt wird. LAMÉ dagegen hatte in seinen „Leçons sur les

der **erste**, weil man auch mit dem zweiten Differentialquotienten von f einen invarianten Ausdruck bilden kann, den wir jedoch nicht besprechen. Zur Abkürzung bedienen wir uns für diesen ersten Differentialparameter von f des Zeichens

$$\Delta_{ff}.$$

Wir definieren dies Zeichen also durch die Formel:

$$\Delta_{ff} = \frac{E f_v^2 - 2 F f_u f_v + G f_u^2}{D^2}. \tag{14}$$

Der Satz 45 über die Unveränderlichkeit von Δ_{ff} gilt wohlbemerkt nur für Functionen $f(u, v)$, deren Zahlenwerte den Punkten (u, v) der Fläche auch nach der Einführung neuer Veränderlicher bleiben. Deutlicher wird dies, wenn wir ein Beispiel beibringen, in dem Δ_{ff} sich dennoch ändert: Verstehen wir unter f etwa den Cosinus des Winkels der beiden durch den Punkt (u, v) gehenden Parametercurven, sodass nach (11), S. 31,

$$f = \frac{F}{\sqrt{E}\sqrt{G}}$$

ist, so sind bei der Einführung neuer Parameter zwei Auffassungen möglich: Entweder halten wir an der durch diese Formel gegebenen **analytischen** Definition von f als Function von u und v fest, sodass wir die Einführung neuer Parameter $\bar{u}$, $\bar{v}$ dadurch bewerkstelligen, dass wir in dem Ausdruck von f für u und v ihre Werte in $\bar{u}$ und $\bar{v}$ einsetzen. Alsdann bleibt Δ_{ff} ungeändert, aber nach der Einführung der neuen Veränderlichen stellt f nicht den Cosinus des Winkels der neuen Parameterlinien, sondern immer noch den Cosinus des Winkels der alten Parameterlinien dar, weshalb der Ausdruck f und mit ihm Δ_{ff} alsdann im neuen Parametersystem wenig Interesse hat. Oder aber wir bleiben bei der **geometrischen** Definition von f als Cosinus des Winkels der Parametercurven, sodass wir in der neuen Veränderlichen $\bar{u}$, $\bar{v}$ statt f den Ausdruck:

$$\bar{f} = \frac{\bar{F}}{\sqrt{\bar{E}}\sqrt{\bar{G}}}$$

---

coordonnées curvilignes", Paris 1859, Differentialparameter mit voller Kenntnis ihrer Bedeutung für die Ebene und für den Raum eingeführt, und sie erwiesen sich als äusserst nützlich in der Physik und Mechanik. Aber erst Beltrami hat ihren Begriff auf die Flächen übertragen und für die Geometrie der Flächen eine analoge Theorie geschaffen. Zu nennen sind seine Abhandlungen: „**Ricerche di analisi applicata alla geometria**", Giornale di Matem. t. II (1865), und „**Sulla teorica generale dei parametri differenziali**", Memorie dell' Accademia delle Scienze di Bologna, ser. II, t. VIII (1869).

benutzen. Aber diese Function $\bar{f}$ geht aus f nicht durch Einführung der neuen Veränderlichen hervor, ist also keine Ortsfunction, oder anders gesagt: $\bar{f}$ hat für ein und denselben Flächenpunkt einen anderen Zahlenwert als f, denn f bedeutet für diesen Punkt den Cosinus des Winkels der alten und $\bar{f}$ den Cosinus des Winkels der neuen Parameterlinien. Daher hat auch der Differentialparameter von f in den alten Parametern für ein und denselben Flächenpunkt einen anderen Zahlenwert als der Differentialparameter von $\bar{f}$ in den neuen Parametern.

Anders verhält es sich, wenn wir die Function f ohne Rücksicht auf das gerade gewählte Parametersystem zu definieren vermögen. Dies ist z. B. der Fall, wenn f das Krümmungsmaass K oder das Quadrat der mittleren Krümmung H ist.[1] (Vgl. S. 342.) Andere Beispiele sind: f bedeute das Quadrat des Differentialquotienten von K längs einer der Hauptkrümmungsrichtungen des Flächenpunktes oder: f bedeute die Excentricität der Indicatrix des Flächenpunktes u. s. w.

Ist z. B. $f = K$, dem Krümmungsmaass, so ist Δ_{KK} eine ebenfalls gegenüber der Einführung neuer Veränderlicher invariante Grösse.

Wir thun daher gut, den Satz 45 etwas deutlicher so zu formulieren:

Satz 46: Führt man die Operation

$$\Delta_{ff} = \frac{E f_v^2 - 2 F f_u f_v + G f_u^2}{D^2}$$

auf eine solche Function $f(u, v)$ aus, die gegenüber allen Bewegungen und bei Einführung irgend welcher neuer Parameter auf der Fläche ungeändert bleibt, so geht eine Function von derselben Art hervor.

Die Functionen, von denen in diesem Satze die Rede ist, sind eben diejenigen, die wir auf S. 342 als die Differentialinvarianten der Fläche gegenüber den Bewegungen und der Einführung neuer Parameter bezeichnet haben und die selbstverständlich für die Geometrie der Fläche die grösste Bedeutung haben.

In betreff der Minimalcurven können wir noch einen einfachen Satz ableiten:

---

[1] Wir nehmen hier und im folgenden Beispiel das Quadrat, weil die Invarianz dann auch bezüglich des Vorzeichens gesichert ist, eine Voraussetzung, die wir hier ja stets machen. (Vgl. hierzu S. 346.)

Nehmen wir an, es sei

$$f(u, v) = \text{Const.}$$

die endliche Gleichung der einen Schar von Minimalcurven auf der Fläche. Alsdann ändert sich die Ortsfunction f nicht beim Fortschreiten längs der Minimalcurven, daher nach Satz 44 am stärksten in den zu ihnen senkrechten Trajectorien. Diese aber fallen mit jenen Minimalcurven selbst zusammen (vgl. S. 177 oder Satz 47, I S. 338), auf denen sich f nicht ändert. Der Widerspruch kann sich nur dadurch lösen, dass in diesem Fall die Maximaländerung von f gleich Null ist, d. h. nach Satz 43 muss jetzt

$$Ef_v^2 - 2Ff_u f_v + Gf_u^2 = 0 \tag{15}$$

sein. Da wir jedoch hierbei das Imaginäre benutzten, während jener Maximalwert aus der Betrachtung der grössten reellen Sehne des in Satz 42 gefundenen Kreises abgeleitet wurde, soll dies noch direct bewiesen werden: Längs der Curven

$$f(u, v) = \text{Const.}$$

ist:

$$f_u\,du + f_v\,dv = 0,$$

also $f_u : f_v = -\,dv : du$. Setzen wir diese proportionalen Werte in (15) ein, so kommt:

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0.$$

Dies ist aber nach XI (O) die Differentialgleichung der Minimalcurven. Daher:

Satz 47: Damit die Curvenschar

$$f(u, v) = \text{Const.}$$

auf der Fläche mit den Parametern u, v eine der beiden Scharen von Minimalcurven sei, ist notwendig und hinreichend, dass der erste Differentialparameter Δ_{ff} für alle Werte von u und v gleich Null ist. —

Dieselbe Betrachtung der Differentialquotienten wie oben führt uns auch noch zu einem zweiten Differentialparameter, d. h. zu einer zweiten Operation, die auf invariante Functionen ausgeübt wieder invariante Functionen liefert.

Wir betrachten nämlich ausser der Ortsfunction $f(u, v)$ noch eine zweite Ortsfunction $g(u, v)$. Im Punkte P oder (u, v) liefert die graphische Darstellung aller Differentialquotienten $df : ds$ die

Sehnen eines Kreises und ebenso die graphische Darstellung aller Differentialquotienten $dg:ds$, nach Satz 42. Dabei sei PQ_1 der Durchmesser des einen, PQ_2 der des anderen Kreises (siehe Fig. 75). Nach dem Früheren ist PQ_1 senkrecht zur Tangente der durch P gehenden Curve

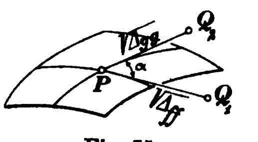


Fig. 75.

$$f(u, v) = \text{Const.}$$

und PQ_2 senkrecht zur Tangente der durch P gehenden Curve

$$g(u, v) = \text{Const.}$$

Auch ist nach (12) und (14):

$$(16) \qquad PQ_1 = \sqrt{\Delta_{ff}}, \quad PQ_2 = \sqrt{\Delta_{gg}},$$

und zwar gelten im reellen Falle die positiven Wurzeln. Ferner wissen wir nach Satz 43, dass der Punkt (u, v) die Richtung PQ_1 einschlägt — auch dem Sinne nach —, wenn seine Parameter um Incremente du und dv wachsen, die den Grössen

$$Gf_u - Ff_v \quad \text{und} \quad Ef_v - Ff_u$$

proportional sind und im reellen Fall auch in den Vorzeichen mit ihnen übereinstimmen. Nach (6) und (11) sind die Richtungscosinus $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Z}_1$ von PQ_1 daher leicht zu berechnen. So ergiebt sich für $\mathfrak{X}_1$ der folgende im reellen Falle auch dem Vorzeichen nach exacte Wert, wenn die Quadratwurzel positiv genommen wird:

$$\mathfrak{X}_1 = \frac{(Gf_u - Ff_v)x_u + (Ef_v - Ff_u)x_v}{D\sqrt{Ef_v^2 - 2Ff_uf_v + Gf_u^2}}.$$

Analog sind $\mathfrak{Y}_1$ und $\mathfrak{Z}_1$ zu bilden. Wir erhalten hieraus die Richtungscosinus $\mathfrak{X}_2, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Z}_2$ von PQ_2, wenn f durch g ersetzt wird. Mithin ist der Cosinus des Winkels α, den PQ_1 und PQ_2 mit einander bilden:

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{S}\,[(Gf_u - Ff_v)x_u + (Ef_v - Ff_u)x_v]\,[(Gg_u - Fg_v)x_u + (Eg_v - Fg_u)x_v]}{D^2\sqrt{Ef_v^2 - 2Ff_uf_v + Gf_u^2}\,\sqrt{Eg_v^2 - 2Fg_ug_v + Gg_u^2}}$$

oder mit Rücksicht auf XI (A) und XI (C):

$$(17) \qquad \cos\alpha = \frac{Ef_vg_v - F(f_ug_v + f_vg_u) + Gf_ug_u}{\sqrt{Ef_v^2 - 2Ff_uf_v + Gf_u^2}\,\sqrt{Eg_v^2 - 2Fg_ug_v + Gg_u^2}}.$$

Also kommt, da die erste Wurzel im Nenner nach (14) gleich $D\sqrt{\Delta_{ff}}$, die zweite gleich $D\sqrt{\Delta_{gg}}$ ist:

$$\sqrt{\varDelta_{ff}}\sqrt{\varDelta_{gg}}\cos\alpha = \frac{E f_v g_v - F(f_u g_v + f_v g_u) + G f_u g_u}{D^2}$$

oder nach (16):

$$(18) \qquad PQ_1 \cdot PQ_2 \cdot \cos\alpha = \frac{E f_v g_v - F(f_u g_v + f_v g_u) + G f_u g_u}{D^2}.$$

Links steht das Product aus den beiden Strecken PQ_1 und PQ_2 und dem Cosinus ihres Winkels, also das Product der einen Strecke PQ_1 in die Projection $PQ_2 \cos\alpha$ der anderen Strecke auf sie. Man nennt ein solches Product das innere Product beider Strecken.[1]

Wenn wir nun wieder die Fläche irgend einer Bewegung unterwerfen oder auf ihr neue Parameter einführen, so bleiben die Strecken PQ_1 und PQ_2 davon in Bezug auf ihre Länge und gegenseitige Lage unberührt. Daraus folgt dann, dass auch die rechte Seite von (18) dabei ungeändert bleibt. Dies gilt auch im imaginären Falle, obgleich dann die Vorzeichen von PQ_1 und PQ_2 fraglich sind. Man braucht ja nur zu beachten, dass α nach der Definition des Winkels in $\pi - \alpha$ übergeht, wenn PQ_1 oder PQ_2 das Zeichen wechselt, sodass das Vorzeichen der linken Seite von (18) auch im imaginären Falle bestimmt bleibt. Man sieht dies zum Überfluss auch daran, dass die rechte Seite von (18) kein Wurzelzeichen mehr enthält.

Diesen invarianten Ausdruck nennt man den Zwischenparameter oder gemischten Differentialparameter der Functionen f und g.[2] Wir bezeichnen ihn mit $\varDelta_{fg}$, setzen also:

$$(19) \qquad \varDelta_{fg} = \frac{E f_v g_v - F(f_u g_v + f_v g_u) + G f_u g_u}{D^2}.$$

Ist $f = g$, so geht er in den ersten Differentialparameter $\varDelta_{ff}$ von f über. Die Definition (14) von $\varDelta_{ff}$ ist also nur ein besonderer Fall der allgemeineren Definition (19). Auch sieht man, dass in $\varDelta_{fg}$ die Reihenfolge von f und g gleichgültig ist:

$$(20) \qquad \varDelta_{fg} = \varDelta_{gf}.$$

Wir haben also jetzt den

Satz 48: Führt man die Operation

$$\varDelta_{fg} = \frac{E f_v g_v - F(f_u g_v + f_v g_u) + G f_u g_u}{D^2}$$

---

[1] Eine Bezeichnung, die von GRASSMANN durch seine „Geometrische Analyse“, Preisschrift, Leipzig 1847, eingeführt wurde. Innere Producte spielen in vielen mathematischen Theorien eine wichtige Rolle.

[2] Vgl. die Anm. zu S. 382.

auf zwei solche Functionen $f(u, v)$ und $g(u, v)$ aus, die gegenüber allen Bewegungen und bei Einführung irgend welcher neuer Parameter auf der Fläche ungeändert bleiben, so geht eine Function von derselben Art hervor.

Man kann die Unveränderlichkeit bei Einführung neuer Parameter $\bar{u}$, $\bar{v}$ auch direct bestätigen, indem man:

$$u = \lambda(\bar{u}, \bar{v}), \qquad v = \mu(\bar{u}, \bar{v})$$

annimmt und nun in den Ausdruck

$$\frac{1}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2}\left[\bar{E}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{v}}\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{v}} - \bar{F}\left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{v}}\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{u}}\right) + \bar{G}\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{u}}\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{u}}\right]$$

die in (11), S. 17, angegebenen Werte von $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$, ferner die Werte auf S. 382 unten und endlich noch die Werte

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{u}} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{u}},$$

$$\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{v}} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial \bar{v}} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial \mu}{\partial \bar{v}}$$

einsetzt, wodurch der im Satze angegebene Ausdruck hervorgeht.

Aus der Definitionsgleichung der Differentialparameter Δ_{ff}, Δ_{gg} und Δ_{fg} folgt, wenn man $f = u$, $g = v$ setzt:

$$\Delta_{uu} = \frac{G}{D^2}, \qquad \Delta_{vv} = \frac{E}{D^2}, \qquad \Delta_{uv} = -\frac{F}{D^2}, \tag{21}$$

sodass wegen $D^2 = EG - F^2$ kommt:

$$\Delta_{uu}\Delta_{vv} - \Delta_{uv}^2 = \frac{1}{D^2}, \tag{22}$$

also:

$$E = \frac{\Delta_{vv}}{\Delta_{uu}\Delta_{vv} - \Delta_{uv}^2}, \qquad F = \frac{-\Delta_{uv}}{\Delta_{uu}\Delta_{vv} - \Delta_{uv}^2}, \qquad G = \frac{\Delta_{uu}}{\Delta_{uu}\Delta_{vv} - \Delta_{uv}^2}. \tag{23}$$

Diese Formeln sind bei der Einführung neuer Veränderlicher in das Quadrat des Bogenelementes

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

sehr bequem, denn wenn dieses Quadrat durch Einführung neuer Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$, die irgend zwei von einander unabhängige Functionen von u und v seien, in:

$$ds^2 = \bar{E}\,d\bar{u}^2 + 2\bar{F}\,d\bar{u}\,d\bar{v} + \bar{G}\,d\bar{v}^2$$

übergeht, so ist nach (23) z. B.

$$\bar{E} = \frac{\bar{\Delta}_{\bar{v}\bar{v}}}{\bar{\Delta}_{\bar{u}\bar{u}}\bar{\Delta}_{\bar{v}\bar{v}} - \bar{\Delta}_{\bar{u}\bar{v}}^2},$$

wo wir $\bar{\Delta}$ statt Δ geschrieben haben, weil die Symbole jetzt mit $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$ statt mit E, F, G u, v zu bilden wären. Aber nach Satz 46 und 48 werden die Differentialparameter durch Einführung neuer Veränderlicher nicht geändert, sodass

$$\bar{\Delta}_{\bar{u}\bar{u}} = \Delta_{\bar{u}\bar{u}} = \frac{E\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial \bar{u}}{\partial u}\,\frac{\partial \bar{u}}{\partial v} + G\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial u}\right)^2}{D^2}$$

u. s. w. ist. Wir können daher sagen:

Satz 49: Führt man auf einer Fläche mit dem Bogenelement-Quadrat:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

neue Parameter $\bar{u}$, $\bar{v}$ vermöge zweier Gleichungen

$$\bar{u} = f(u, v), \quad \bar{v} = g(u, v)$$

ein, so sind die neuen Fundamentalgrössen erster Ordnung diese:

$$\bar{E} = \frac{\Delta_{gg}}{\Delta_{ff}\Delta_{gg} - \Delta_{fg}^2}, \quad \bar{F} = \frac{-\Delta_{fg}}{\Delta_{ff}\Delta_{gg} - \Delta_{fg}^2}, \quad \bar{G} = \frac{\Delta_{ff}}{\Delta_{ff}\Delta_{gg} - \Delta_{fg}^2}.$$

Es ist dies natürlich nur eine andere Schreibweise der Formeln (11), S. 17, bei denen statt

$$\bar{u} = f(u, v), \quad \bar{v} = g(u, v)$$

die nach u und v aufgelösten Gleichungen

$$u = \lambda(\bar{u}, \bar{v}), \quad v = \mu(\bar{u}, \bar{v})$$

vorgelegt waren.

Wir wollen diesen Satz 49 schliesslich zur Beantwortung einer wichtigen Frage verwenden, die wir früher nur gestreift haben und die wir allerdings auch hier nur unter gewissen beschränkenden Voraussetzungen beantworten wollen, nämlich zur Erledigung des Problems, wie man erkennt, ob zwei gegebene Flächen auf einander verbiegbar sind.

Wir erinnern dabei an den Satz 5, S. 275, nach dem zwei gegebene Flächen

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v) \tag{24}$$

und

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{y} = \bar{\chi}(\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{z} = \bar{\psi}(\bar{u}, \bar{v}) \tag{25}$$

dann und nur dann auf einander verbiegbar sind, wenn man solche

neue Parameter $\bar{u}$, $\bar{v}$ auf der ersten Fläche einführen kann, dass alsdann ihre zugehörigen Fundamentalgrössen erster Ordnung mit denen der zweiten Fläche übereinstimmen. Dieser Satz sagt nichts darüber aus, wie man erkennt, ob es solche neue Parameter giebt; in dieser Hinsicht soll er hier ergänzt werden.

Wir schicken hierbei Eines voraus: Es seien E, F, G die Fundamentalgrössen erster Ordnung der Fläche (24) und $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ die der Fläche (25). Nun möge

$$f(E,\, F,\, G,\, E_u,\, E_v \ldots)$$

eine solche Function der Fundamentalgrössen E, F, G und ihrer Ableitungen nach u und v sein, die sich nicht ändert, wenn man neue Parameter auf der Fläche einführt. Eine solche Function ist nach Satz 4, S. 273, z. B. das Krümmungsmaass K der Fläche (24). Sind nun die Flächen (24) und (25) auf einander verbiegbar, giebt es also solche zwei von einander unabhängige Gleichungen:

$$u = \lambda(\bar{u}, \bar{v}), \qquad v = \mu(\bar{u}, \bar{v}),$$

vermöge deren wir solche neue Parameter $\bar{u}$, $\bar{v}$ auf der ersten Fläche (24) einführen können, in denen die Fundamentalgrössen erster Ordnung dieser Fläche mit den zur Fläche (25) gehörigen Fundamentalgrössen erster Ordnung $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ übereinstimmen, so geht die Function f, die ja eine Function von u und v ist, dadurch, dass wir darin für u und v die Werte λ und μ einsetzen, genau in

$$f(\bar{E},\, \bar{F},\, \bar{G},\, \bar{E}_{\bar{u}},\, \bar{E}_{\bar{v}} \ldots)$$

über, da sie ja nach Voraussetzung ungeändert bleiben soll. Dies ist eine Function der Fundamentalgrössen erster Ordnung der zweiten Fläche (25) und der Ableitungen dieser Grössen nach $\bar{u}$ und $\bar{v}$, und sie bleibt bei Einführung neuer Parameter ungeändert.

Wenn also die beiden Flächen (24) und (25) auf einander verbiegbar sind und wenn

$$f(E,\, F,\, G,\, E_u,\, E_v \ldots)$$

eine bei der ersten Fläche gegenüber der Einführung neuer Parameter unveränderliche Function ist, so ist

$$f(\bar{E},\, \bar{F},\, \bar{G},\, \bar{E}_{\bar{u}},\, \bar{E}_{\bar{v}} \ldots)$$

eine bei der zweiten Fläche gegenüber der Einführung neuer Parameter unveränderliche Function, und überdies haben die beiden Functionen für einander bei der Verbiegung entsprechende Punkte

(u, v) und $(\bar{u}, \bar{v})$ beider Flächen dieselben Zahlenwerte. Ein Specialfall hiervon ist der Satz 6, S. 275, für das Krümmungsmaass.

Jetzt wollen wir annehmen, es seien uns zwei Functionen

$$f(E, F, G, E_u, E_v \ldots), \quad g(E, F, G, E_u, E_v \ldots)$$

bekannt, die erstens bei der Einführung neuer Parameter auf der ersten Fläche (24) ungeändert bleiben und zweitens von einander unabhängige Functionen von u und v seien.

Sollen dann die beiden Flächen auf einander verbiegbar sein, so müssen nach dem Vorhergehenden in solchen Punkten (u, v) und $(\bar{u}, \bar{v})$ der beiden Flächen, die bei der Verbiegung mit einander zur Deckung kommen, jene Grössen f, g mit den Grössen, die man analog für die zweite Fläche (25) bilden kann, nämlich mit den Grössen:

$$f(\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{E}_{\bar{u}}, \bar{E}_{\bar{v}} \ldots), \quad g(\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{E}_{\bar{u}}, \bar{E}_{\bar{v}} \ldots)$$

übereinstimmen, d. h. einander entsprechende Punktepaare (u, v) und $(\bar{u}, \bar{v})$ sind durch die beiden Gleichungen:

$$(26) \quad \begin{cases} f(E, F, G, E_u, E_v \ldots) = f(\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{E}_{\bar{u}}, \bar{E}_{\bar{v}} \ldots), \\ g(E, F, G, E_u, E_v \ldots) = g(\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{E}_{\bar{u}}, \bar{E}_{\bar{v}} \ldots) \end{cases}$$

mit einander verknüpft. Die linken Seiten dieser Gleichungen enthalten nur u und v, die rechten nur $\bar{u}$ und $\bar{v}$. Ausserdem sind sie nach u, v auflösbar, da die linken Seiten nach Voraussetzung von einander unabhängige Functionen von u und v sind. Wären nun die rechten Seiten nicht ebenfalls von einander unabhängige Functionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$, so bestände zwischen ihnen nach I S. 82 eine Gleichung, sodass die Gleichungen (26) auch eine Relation zwischen den linken Seiten nach sich zögen. Da diese nicht für alle Wertepaare u, v bestehen könnte, weil die linken Seiten ja von einander unabhängig sind, so hiesse dies, dass nur für eine Curve auf der ersten Fläche die Grössen f und g mit denen auf der zweiten Fläche übereinstimmten, nach Satz 3, S. 11. Dann also wäre die Verbiegung unmöglich.

Wir wollen daher jetzt überdies voraussetzen, dass die rechten Seiten von (26) von einander unabhängige Functionen der Parameter $\bar{u}$, $\bar{v}$ seien.

Nunmehr sind die Gleichungen (26) sowohl nach u, v als auch nach $\bar{u}$, $\bar{v}$ auflösbar — wenigstens theoretisch, sodass sie diejenige Zuordnung zwischen den Punkten (u, v) und $(\bar{u}, \bar{v})$ beider Flächen

definieren, die bei der Verbiegung auftritt, wenn diese Verbiegung überhaupt möglich ist.

Nach Satz 46 und Satz 48 sind nun

$$\Delta_{ff}, \quad \Delta_{fg}, \quad \Delta_{gg}$$

drei Functionen von E, F, G und ihren Ableitungen, die mit f und g selbst bei Einführung neuer Parameter ungeändert bleiben. Den Schluss, den wir oben für f zogen, können wir daher auch für diese drei Functionen machen: Ist die Verbiegung möglich, so muss auch:

$$\Delta_{ff} = \bar{\Delta}_{\bar{f}\bar{f}}, \quad \Delta_{fg} = \bar{\Delta}_{\bar{f}\bar{g}}, \quad \Delta_{gg} = \bar{\Delta}_{\bar{g}\bar{g}} \tag{27}$$

sein. Hierin sollen natürlich $\bar{f}, \bar{g}$ die rechten Seiten von (26) sein und die Differentialparameter rechts für die zweite Fläche, d. h. mittels $\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}$, gebildet werden.

Dies alles sind notwendige Bedingungen für die Verbiegbarkeit. Jetzt wollen wir zeigen, dass sie auch hinreichen. Wir setzen also voraus, dass diejenigen Functionen u, v von $\bar{u}, \bar{v}$, die durch (26) definiert werden, auch die drei Gleichungen (27) für alle Werte von $\bar{u}, \bar{v}$ erfüllen. Nebenbei bemerkt: Wenn die Gleichungen (26) mehrere Lösungen u, v zulassen, so wählen wir unter ihnen eine solche, die auch die Gleichungen (27) erfüllen.

Wenn wir jetzt auf beiden Flächen neue Parameter $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}$ einführen, indem wir auf der ersten:

$$\mathfrak{u} = f, \quad \mathfrak{v} = g \tag{28}$$

und auf der zweiten

$$\mathfrak{u} = \bar{f}, \quad \mathfrak{v} = \bar{g} \tag{29}$$

setzen, was wir dürfen, weil f, g hinsichtlich u, v und $\bar{f}, \bar{g}$ hinsichtlich $\bar{u}, \bar{v}$ nach Voraussetzung von einander unabhängig sind, so nehmen die Quadrate der Bogenelemente beider Flächen neue Formen an, etwa:

$$ds^2 = \mathfrak{E}\, d\mathfrak{u}^2 + 2\mathfrak{F}\, d\mathfrak{u}\, d\mathfrak{v} + \mathfrak{G}\, d\mathfrak{v}^2,$$
$$d\bar{s}^2 = \bar{\mathfrak{E}}\, d\mathfrak{u}^2 + 2\bar{\mathfrak{F}}\, d\mathfrak{u}\, d\mathfrak{v} + \bar{\mathfrak{G}}\, d\mathfrak{v}^2.$$

Aber nach Satz 49 ist dann wegen (28) bez. (29):

$$\mathfrak{E} = \frac{\Delta_{gg}}{\Delta_{ff}\Delta_{gg} - \Delta^2_{fg}}, \quad \bar{\mathfrak{E}} = \frac{\bar{\Delta}_{\bar{g}\bar{g}}}{\bar{\Delta}_{\bar{f}\bar{f}}\bar{\Delta}_{\bar{g}\bar{g}} - \bar{\Delta}^2_{\bar{f}\bar{g}}}. \tag{30}$$

Infolge von (28) und (29) ist aber $f = \bar{f}$, $g = \bar{g}$, sodass die Gleichungen (26) erfüllt sind, die nach Voraussetzung die Gleichungen

(27) nach sich ziehen. Diese haben nach (30) die Gleichung $\mathfrak{E} = \bar{\mathfrak{E}}$ zur Folge. Ebenso erkennt man, dass $\mathfrak{F} = \bar{\mathfrak{F}}$ und $\mathfrak{G} = \bar{\mathfrak{G}}$ wird, sodass bei beiden Flächen die Quadrate der Bogenelemente für den Fall der Parameter $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{v}$ übereinstimmen.

Also folgt:

Satz 50: Kennt man bei der Fläche

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v)$$

zwei von einander unabhängige Functionen

$$f(E, F, G, E_u, E_v \ldots) \quad \text{und} \quad g(E, F, G, E_u, E_v \ldots)$$

der Fundamentalgrössen erster Ordnung E, F, G und ihrer Ableitungen nach u und v, so kann man die Frage, ob und wie sich die Fläche auf eine andere gegebene Fläche:

$$\bar{x} = \bar{\varphi}(\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{y} = \bar{\chi}(\bar{u}, \bar{v}), \quad \bar{z} = \bar{\psi}(\bar{u}, \bar{v})$$

verbiegen lässt, stets durch Eliminationen entscheiden. Man berechnet nämlich die Fundamentalgrössen erster Ordnung $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ der zweiten Fläche und bildet die Functionen:

$$\bar{f} = f(\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{E}_{\bar{u}}, \bar{E}_{\bar{v}} \ldots) \quad \text{und} \quad \bar{g} = g(\bar{E}, \bar{F}, \bar{G}, \bar{E}_{\bar{u}}, \bar{E}_{\bar{v}} \ldots),$$

die aus den beiden bekannten Functionen f und g dadurch hervorgehen, dass man E, F, G durch $\bar{E}$, $\bar{F}$, $\bar{G}$ und u, v durch $\bar{u}$, $\bar{v}$ ersetzt. Damit nunmehr die Verbiegung möglich sei, ist notwendig und hinreichend, dass erstens $\bar{f}$ und $\bar{g}$ bei Einführung neuer Parameter auf der zweiten Fläche ungeändert bleiben, dass sie zweitens von einander unabhängige Functionen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ seien und dass drittens die aus

$$f = \bar{f}, \quad g = \bar{g}$$

folgenden Functionen u und v von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ auch die drei Gleichungen

$$\Delta_{ff} = \bar{\Delta}_{\bar{f}\bar{f}}, \quad \Delta_{fg} = \bar{\Delta}_{\bar{f}\bar{g}}, \quad \Delta_{gg} = \bar{\Delta}_{\bar{g}\bar{g}}$$

für alle Werte von $\bar{u}$, $\bar{v}$ erfüllen, wobei sich die Differentialparameter Δ auf die erste, die Differentialparameter $\bar{\Delta}$ auf die zweite Fläche beziehen. Zugleich geben die aus den Gleichungen $f = \bar{f}$, $g = \bar{g}$ folgenden Functionen u und v von $\bar{u}$, $\bar{v}$ an, wie die Punkte (u, v) der einen Fläche den Punkten $(\bar{u}, \bar{v})$ der anderen Fläche entsprechen.

Als Function f kann man das Krümmungsmaass K benutzen, nach Satz 4, S. 273, vorausgesetzt, dass die erste Fläche keine constante Krümmung hat. Als Function g kann man alsdann die mit K nach Satz 46 ebenfalls invariante Function Δ_{KK} benutzen, vorausgesetzt, dass Δ_{KK} eine von K unabhängige Function ist. Da das Krümmungsmaass auch auf der zweiten Fläche bei Einführung neuer Parameter ungeändert bleibt, so folgt also:

Satz 51: Liegt eine mittels zweier Parameter u, v dargestellte Fläche vor, deren Krümmungsmaass K nicht constant ist und für die der erste Differentialparameter Δ_{KK} von K keine Function von K allein ist, so verlangt die Entscheidung der Frage, ob und wie die Fläche auf eine andere gegebene Fläche verbiegbar ist, nur Eliminationen: Man berechnet nämlich das Krümmungsmaass $\bar{K}$ der zweiten Fläche, die in den Parametern $\bar{u}, \bar{v}$ dargestellt sei, und seinen ersten Differentialparameter $\bar{\Delta}_{\bar{K}\bar{K}}$ hinsichtlich der zweiten Fläche. Alsdann ist notwendig und hinreichend, dass $\bar{K}$ und $\bar{\Delta}_{\bar{K}\bar{K}}$ zwei von einander unabhängige Functionen seien und dass für die aus

$$K = \bar{K}, \quad \Delta_{KK} = \bar{\Delta}_{\bar{K}\bar{K}}$$

folgenden Functionen u und v von $\bar{u}, \bar{v}$ auch die drei ersten Differentialparameter von K und Δ_{KK} hinsichtlich der ersten Fläche mit den drei ersten Differentialparametern von $\bar{K}$ und $\bar{\Delta}_{\bar{K}\bar{K}}$ hinsichtlich der zweiten Fläche übereinstimmen. Zugleich geben jene Functionen u und v von $\bar{u}, \bar{v}$ an, wie die Punkte (u, v) der einen Fläche den Punkten $(\bar{u}, \bar{v})$ der anderen Fläche entsprechen.

Man sieht, dass dies Kennzeichen nur dann nicht ausreicht, wenn entweder Δ_{KK} eine Function von K allein ist oder aber K selbst constant ist. Im letzteren Falle hat die erste Fläche constante Krümmung und dann gilt der Satz 18, S. 301. Im ersteren Falle kann man ebenfalls Merkmale für die Verbiegbarkeit ableiten; wir haben jedoch nicht die Absicht, darauf einzugehen.[1]

Auch von den Formeln des gegenwärtigen Abschnittes, den wir

[1] Die obige Behandlung des Problems der Verbiegung haben wir aus Darboux, „Leçons sur la théorie générale des surfaces", III. partie, Paris 1894, entnommen, wo man auch eine erschöpfende Behandlung der soeben erwähnten Ausnahmefälle findet.

hier schliessen, ist eine Anzahl in Tafeln des Anhanges zusammengestellt worden. Tafel XVI enthält die zweiten Differentialquotienten der rechtwinkligen Coordinaten und Tafel XVII die Fundamentalgleichungen. Tafel XVIII und XIX bringen eine Reihe von Formeln für die speciellen Fälle, dass die Parametercurven entweder die Minimalcurven oder die Krümmungscurven sind. Einige dieser Formeln sind freilich im Texte noch nicht vorgekommen. Sie ergeben sich aber aus den allgemeinen Formeln, indem man darin $E = G = 0$ oder $F = M = 0$ setzt. Tafel XX endlich bezieht sich auf die Differentialparameter.

Vierter Abschnitt.

Curven auf der Fläche.

§ 1. Geodätische Curven.

Der letzte Abschnitt, den wir hier beginnen, soll den Curven auf der Fläche gewidmet sein. Bisher haben wir fast nur drei besondere Curvenarten auf der Fläche besprochen, die Minimalcurven, die Krümmungscurven und die Haupttangentencurven. Unter den übrigen Curven auf der Fläche haben die kürzesten Linien, die man auf der Fläche zwischen je zwei Punkten ziehen kann, ein besonderes Interesse. Ihrer Untersuchung ist daher der grösste Teil dieses Abschnittes gewidmet. Erst zum Schluss des Abschnittes geben wir noch kurz die wichtigsten Formeln für ganz beliebige Curven auf der Fläche an. —

Zur Vorbereitung der Untersuchung wollen wir zunächst ein Problem aus der Curventheorie behandeln:

Es sei eine Curve im Raume gegeben, und sie soll eine unendlich kleine Änderung erfahren. Wir fragen uns, wie sich dabei ihre Bogenlänge ändert. Dabei sehen wir von den Minimalcurven vorerst ab und benutzen als Parameter längs der Curve ihre Bogenlänge s. Es sei also:

$$x = \varphi(s), \quad y = \chi(s), \quad z = \psi(s) \tag{1}$$

die analytische Darstellung der Curve. Eine unendlich kleine Änderung der Curve ergiebt sich, wenn wir alle Punkte der Curve nach einem gewissen Gesetze in neue Lagen bringen, die von ihren alten Lagen unendlich wenig verschieden sind. Die Formeln werden am bequemsten, wenn wir diese Änderung analytisch nicht in Bezug auf das Coordinatensystem (x, y, z), sondern in Bezug auf das begleitende Dreikant des Curvenpunktes zum Ausdruck bringen. (Vgl. I S. 174.) Der Punkt P oder (x, y, z) oder (s) der Curve (1) möge eine solche

unendlich kleine Änderung seiner Lage erfahren, deren Projectionen auf seine Tangente, Haupt- und Binormale die Längen

$$\xi(s)\,\varepsilon, \qquad \eta(s)\,\varepsilon, \qquad \zeta(s)\,\varepsilon \tag{2}$$

haben, wobei ε längs der Curve ein und dieselbe unendlich kleine Grösse bedeute und ξ, η, ζ irgend drei Functionen von s sein sollen. Infolge dieser Änderung geht der Punkt P in eine unendlich benachbarte Lage $\bar{P}$ über, und es lässt sich leicht feststellen, wie sich dabei seine rechtwinkligen Coordinaten x, y, z um unendlich kleine Grössen δx, δy, δz ändern. Denn wir brauchen zu diesem Zwecke nur den Satz anzuwenden, dass die Projection eine Strecke $P\bar{P}$ auf eine der Coordinatenaxen gleich der Summe der Projectionen der Seiten eines solchen ungeschlossenen Vielecks ist, das von P nach $\bar{P}$ geht (vgl. I S. 7). Indem wir den Punkt P zuerst um $\xi\varepsilon$ auf der Tangente, den neuen Punkt darauf um $\eta\varepsilon$ parallel der Hauptnormale und endlich den neuen Punkt wieder um $\zeta\varepsilon$ parallel der Binormale weiterführen, gelangt er in die Lage $\bar{P}$. Die drei Strecken $\xi\varepsilon$, $\eta\varepsilon$, $\zeta\varepsilon$ bilden also ein Vieleck, wie wir es brauchen. Sind α, β, γ; l, m, n; λ, μ, ν die Richtungscosinus der Tangente, der Haupt- und der Binormale von P, so folgt hieraus:

$$\delta x = (\alpha\xi + l\eta + \lambda\zeta)\varepsilon, \quad \delta y = (\beta\xi + m\eta + \mu\zeta)\varepsilon, \quad \delta z = (\gamma\xi + n\eta + \nu\zeta)\varepsilon.$$

Nach Tafel III können wir die Richtungscosinus aus (1) als Functionen von s berechnen. Alsdann sind:

$$\left\{\begin{aligned} \bar{x} &= x + (\alpha\xi + l\eta + \lambda\zeta)\varepsilon, \\ \bar{y} &= y + (\beta\xi + m\eta + \mu\zeta)\varepsilon, \\ \bar{z} &= z + (\gamma\xi + n\eta + \nu\zeta)\varepsilon \end{aligned}\right. \tag{3}$$

die Gleichungen der neuen Curve, die von der Curve (1) unendlich wenig abweicht, ausgedrückt mittels des Parameters s.

Jedem Bogenelement ds der alten Curve (1) entspricht ein Bogenelement $d\bar{s}$ der neuen Curve (3). Wir wollen es berechnen. Zu diesem Zwecke differenzieren wir die Formeln (3) nach s. Nach III (B) und III (C) ergiebt sich dann, wenn $1:r$ und $1:\varrho$ Krümmung und Torsion der Curve (1) bedeuten:

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = \left[1 + \left(\xi' - \frac{\eta}{r}\right)\varepsilon\right]\alpha + \left[\frac{\xi}{r} + \eta' + \frac{\zeta}{\varrho}\right]\varepsilon l + \left[\zeta' - \frac{\eta}{\varrho}\right]\varepsilon\lambda.$$

Entsprechend gehen $d\bar{y}:ds$ und $d\bar{z}:ds$ hervor, wenn man auf der rechten Seite α, l, λ durch β, m, μ bez. γ, n, ν ersetzt. Quadrieren und Summieren der drei Formeln liefert nach II (A):

$$\frac{d\bar{x}^2+d\bar{y}^2+d\bar{z}^2}{ds^2} = \left[1+\left(\xi'-\frac{\eta}{r}\right)\varepsilon\right]^2+\left[\frac{\xi}{r}+\eta'+\frac{\zeta}{\varrho}\right]^2\varepsilon^2+\left[\zeta'-\frac{\eta}{\varrho}\right]^2\varepsilon^2.$$

Es ist aber:

$$d\bar{s}^2 = d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2$$

das Quadrat des zu ds gehörigen Bogenelementes der neuen Curve. Somit kommt, wenn wir noch nach Potenzen von ε ordnen:

$$\left(\frac{d\bar{s}}{ds}\right)^2 = 1+2\left(\xi'-\frac{\eta}{r}\right)\varepsilon+(\ldots)\varepsilon^2.$$

Den Coefficienten von ε^2 haben wir nur angedeutet, da er für das Folgende unwichtig ist. Ziehen wir nun die Quadratwurzel aus und wird die neue Curve im selben Sinn wie die alte durchlaufen, sodass $d\bar{s}:ds$ im reellen Falle positiv ist, so giebt die Benutzung der bekannten Formel:

$$\sqrt{1+2a\varepsilon+b\varepsilon^2} = 1+a\varepsilon+\ldots$$

sofort

$$\frac{d\bar{s}}{ds} = 1+\left(\xi'-\frac{\eta}{r}\right)\varepsilon+\ldots$$

oder:

$$d\bar{s}-ds = \left(\xi'-\frac{\eta}{r}\right)ds.\varepsilon+\ldots, \tag{4}$$

wobei die höheren Potenzen von ε nur angedeutet worden sind.

Durchläuft s alle Werte von 0 bis σ, so durchläuft der Punkt P die alte Curve von dem zu $s=0$ gehörigen Punkte P_0 bis zu dem zu $s=\sigma$ gehörigen Punkte P_1. Der Bogen, den alsdann der Punkt $\bar{P}$ auf der unendlich benachbarten Curve zurücklegt, sei $\bar{\sigma}$. Nach (4) ergiebt sich durch Integration:

$$\bar{\sigma}-\sigma = \int_0^\sigma\left(\xi'-\frac{\eta}{r}\right)ds.\varepsilon+\ldots\ldots$$

Es ist aber

$$\int_0^\sigma \xi'\,ds = \xi(\sigma)-\xi(0).$$

Wenn wir insbesondere annehmen, dass die der alten Curve P_0P_1 unendlich benachbarte Curve ebenfalls von P_0 ausgehe und in P_1 endige, so bleiben P_0 und P_1 bei der unendlich kleinen Änderung in Ruhe, d. h. die Functionen ξ, η, ζ von s sind nach (2) gleich Null für $s=0$ und $s=\sigma$, sodass das soeben angegebene Integral gleich Null ist. Nunmehr kommt:

$$\bar{\sigma}-\sigma = -\int_0^\sigma\frac{\eta}{r}ds.\varepsilon+\ldots\ldots$$

Daher:

Satz 1: Ändert man eine von P_0 nach P_1 gehende Curve unendlich wenig mit festgehaltenen Endpunkten, und hat die Verrückung, die der allgemeine, zur Bogenlänge $P_0 P = s$ gehörige Punkt P der Curve erfährt, einen solchen Wert, dessen Projection auf die Hauptnormale des Punktes P gleich $\eta(s)\varepsilon$ ist, wobei ε eine unendlich kleine von s unabhängige Grösse bedeute, so ist die Differenz zwischen der Länge $\bar{\sigma}$ der neuen Curve $P_0 P_1$ und der Länge σ der alten Curve $P_0 P_1$ gegeben durch:

$$\bar{\sigma} - \sigma = -\int_0^\sigma \frac{\eta}{r}\, ds \,.\, \varepsilon + \ldots .$$

Hierin ist r der Krümmungsradius der alten Curve an der Stelle P oder (s); und die Glieder, die mit höheren Potenzen von ε behaftet sind, sind nur angedeutet.

Jetzt wollen wir annehmen, die Curve $P_0 P_1$ liege auf einer gegebenen Fläche, und es sollen ihr nur solche unendlich kleine Änderungen erteilt werden, bei denen sie beständig auf der Fläche bleibt und — wie bisher — ihre beiden Endpunkte P_0 und P_1 fest sind.

Die Ortsänderungen der Curvenpunkte sind jetzt noch ganz beliebig mit der einen Einschränkung, dass jeder Punkt in seiner Tangentenebene verbleiben soll. Sind also X, Y, Z die Richtungscosinus seiner Flächennormale, so drückt sich die Einschränkung nach (3) so aus: Es soll:

$$\xi \mathbf{S}\, \alpha X + \eta \mathbf{S}\, l X + \zeta \mathbf{S}\, \lambda X = 0 \tag{5}$$

sein. Die drei Summen hierin sind die Cosinus der Winkel, die die Flächennormale der betrachteten Curvenstelle mit der Tangente, Haupt- und Binormale bildet. Diese Forderung zeigt, dass die in Satz 1 auftretende Grösse η auch jetzt noch ganz beliebig gewählt werden darf, da die Bedingung (5) alsdann eine Gleichung zwischen ξ und ζ wird, die sich durch geeignete Wahl von ξ und ζ erfüllen lässt. Dies ist nur dann nicht der Fall, wenn die Bedingung (5) frei von ξ und ζ wird, d. h. wenn $\mathbf{S}\, \alpha X = \mathbf{S}\, \lambda X = 0$ ist, wenn also die Flächennormale auf der rectificierenden Ebene (vgl. I S. 317) senkrecht steht und daher mit der Hauptnormalen der Curve — im selben oder im entgegengesetzten Sinn — zusammenfällt.

Solange dies nicht längs der ganzen Curve $P_0 P_1$ der Fall ist,

kann man also die Curve immer noch unendlich wenig auf der Fläche derart ändern, dass $\bar{\sigma} - \sigma$ unendlich klein von derselben Ordnung wie ε wird. Tritt dagegen dieser besondere Fall ein, d. h. liegen die Hauptnormalen der Curve $P_0 P_1$ in den Flächennormalen, so ist η notwendig längs der ganzen Curve gleich Null zu wählen, da sich dann die Bedingungsgleichung (5) auf $\eta = 0$ reduciert. Alsdann fällt das Glied erster Ordnung in der Reihenentwickelung für $\bar{\sigma} - \sigma$ fort.

Also nur diejenigen Flächencurven, deren Hauptnormalen mit den Flächennormalen zusammenfallen, haben die Eigenschaft, dass ihre Ortsänderung auf der Fläche mit festgehaltenen Endpunkten stets eine solche Curve liefert, deren Länge $\bar{\sigma}$ sich von der alten Länge σ um unendlich wenig von höherer als erster Ordnung unterscheidet, sobald jene Ortsänderungen der Curvenpunkte unendlich klein von erster Ordnung sind.

Aber wir haben hierbei von zwei Curvenarten abgesehen, von den Minimalcurven und von den Geraden; von den letzteren nämlich deshalb, weil sie keine bestimmten Hauptnormalen haben. Wir müssen uns daher fragen, wie es sich bei diesen beiden Curvenarten mit der Längenänderung $\bar{\sigma} - \sigma$ verhält.

Was nun zunächst die Geraden anbetrifft, so liegt hier die Sache so, dass $\bar{\sigma} - \sigma$ bei jeder unendlich kleinen Ortsänderung der Punkte einer Strecke $P_0 P_1$ mit festgehaltenen Endpunkten unendlich klein von höherer Ordnung ist. Denn wenn wir diese Gerade als die x-Axe wählen und ihren allgemeinen Punkt $(x, 0, 0)$ in den Punkt

$$\bar{x} = x + \xi(x)\varepsilon, \quad \bar{y} = \eta(x)\varepsilon, \quad \bar{z} = \zeta(x)\varepsilon$$

überführen, so ist:

$$d\bar{s}^2 = d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 = dx^2 + 2\xi' dx^2.\varepsilon + \dots,$$

also:

$$\left(\frac{d\bar{s}}{dx}\right)^2 = 1 + 2\xi'\varepsilon + \dots,$$

woraus folgt:

$$\frac{d\bar{s}}{dx} = 1 + \xi'\varepsilon + \dots \quad \text{oder:} \quad d\bar{s} = dx + \xi' dx.\varepsilon + \dots$$

Sind $(a, 0, 0)$ und $(b, 0, 0)$ die festen Endpunkte der Strecke, so ist $b - a$ ihre Länge σ, wenn wir $b > a$ wählen; also ist:

$$\bar{\sigma} = \int_a^b d\bar{s} = \int_a^b dx + \int_a^b \xi' dx.\varepsilon + \dots = \sigma + [(\xi)_{x=b} - (\xi)_{x=a}]\varepsilon + \dots$$

Aber für die festen Endpunkte ist $\xi = 0$. Daher kommt:

$$\bar{\sigma} = \sigma + \ldots,$$

wo die Punkte unendlich kleine Glieder andeuten, die mit $\varepsilon^2, \varepsilon^3 \ldots$ behaftet sind. Hiermit ist unsere Behauptung dargethan.

Um so mehr wird sie gelten, wenn die Gerade auf einer Fläche liegt und ihre Punkte nur solchen Ortsänderungen unterworfen werden dürfen, bei denen sie auf der Fläche bleiben.

Also hat sich ergeben:

Satz 2: Liegt eine Curve, die keine Minimalcurve ist, auf einer gegebenen Fläche und sollen die Änderungen, die ihre Länge bei festgehaltenen Endpunkten erfährt, für alle solche Lagenänderungen der Curve, bei denen sie auf der Fläche verbleibt und bei denen die Verrückungen der Punkte von derselben Ordnung wie eine unendlich kleine Grösse ε sind, stets unendlich klein von mindestens zweiter Ordnung in ε sein, so ist die Curve entweder eine Gerade oder ihre Hauptnormalen fallen überall in die Flächennormalen.

Was dagegen die Minimalcurven anbetrifft, so liegt hier die Sache ganz anders: Eine Minimalcurve hat die Länge Null, also ist hier $\sigma = 0$. Sind:

$$x = \varphi(t), \quad y = \chi(t), \quad z = \psi(t)$$

die Gleichungen der Curve, ausgedrückt mittels eines Parameters t, so ist für alle Werte von t:

$$\varphi'^2 + \chi'^2 + \psi'^2 = 0$$

(vgl. I S. 164). Ändern wir den Punkt (t) der Curve dadurch, dass wir seinen Coordinaten die Incremente $\xi(t)\varepsilon$, $\eta(t)\varepsilon$, $\zeta(t)\varepsilon$ erteilen, so geht er in den Punkt mit den Coordinaten:

$$\bar{x} = \varphi + \xi\varepsilon, \quad \bar{y} = \chi + \eta\varepsilon, \quad \bar{z} = \psi + \zeta\varepsilon$$

über. Jetzt ist:

$$d\bar{s}^2 = d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2 = [2\,\mathbf{S}\,\varphi'\xi.\varepsilon + \mathbf{S}\,\xi^2.\varepsilon^2]\,dt^2,$$

mithin:

$$d\bar{s} = \sqrt{\varepsilon}\,\sqrt{2\,\mathbf{S}\,\varphi'\xi + \mathbf{S}\,\xi^2.\varepsilon}\;dt$$

oder, wenn die zweite Wurzel nach Potenzen von ε entwickelt wird:

$$d\bar{s} = \sqrt{\varepsilon}\,\sqrt{2\,\mathbf{S}\,\varphi'\xi}\left(1 + \frac{\mathbf{S}\,\xi^2}{4\,\mathbf{S}\,\varphi'\xi}\,\varepsilon + \ldots\right)dt$$

oder, wenn $t = t_0$ und $t = t_1$ die festgehaltenen Punkte geben:

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2\,\mathbf{S}\,\varphi' \xi} \left(1 + \frac{\mathbf{S}\,\xi^2}{4\,\mathbf{S}\,\varphi' \xi}\,\varepsilon + \ldots\right) dt.$$

Mithin ist hier $\bar{\sigma} - \sigma$ oder $\bar{\sigma}$ von derselben Ordnung wie $\sqrt{\varepsilon}$ unendlich klein.[1] Hieran würde sich auch dann nichts ändern, wenn wir verlangten, dass die Minimalcurve nur solchen Ortsänderungen unterworfen sei, bei denen sie beständig eine Curve auf einer durch sie gehenden Fläche bleibt, was daraus folgt, dass eine Minimalcurve auf jeder Fläche, die durch sie geht, eine Minimalcurve ist.

Wegen dieses eigentümlichen Umstandes schliessen wir vorerst die Minimalcurven weiterhin von der Betrachtung aus. —

Unsere Untersuchung hat uns auf diejenigen Curven einer Fläche geführt, deren Längenänderungen bei festgehaltenen Endpunkten von höherer Ordnung unendlich klein sind. Wir nennen sie die geodätischen Curven der Fläche und können sie nach Satz 2 auch so definieren: Es sind dies die eventuell auf der Fläche vorhandenen Geraden und diejenigen Curven der Fläche, deren Hauptnormalen mit den Flächennormalen zusammenfallen, wobei von dem Sinn, in dem diese Normalen positiv gerechnet werden, ganz abgesehen wird. Später, wenn wir die analytischen Kennzeichen der geodätischen Curven aufstellen, werden wir sehen, dass wir auch die Minimalcurven zu ihnen rechnen können, da sie die analytischen Bedingungen, wie wir erkennen werden, ebenfalls erfüllen. Auch werden wir nachzuweisen haben, dass die in I S. 270 definierten geodätischen Curven auf abwickelbaren Flächen mit zu den soeben definierten geodätischen Curven gehören. Davon nachher.

Wir wollen uns jetzt einmal auf das Reelle beschränken: Es liege auf einer reellen Fläche eine reelle Curve $P_0 P_1$ vor. Wir werden sie eine kürzeste Linie auf der Fläche nennen, wenn sie kürzer ist als jede andere unendlich benachbarte reelle Curve auf der Fläche, die ebenfalls von P_0 nach P_1 geht. Nun aber wird, wenn wieder $\xi\varepsilon$, $\eta\varepsilon$, $\zeta\varepsilon$ die Projectionen der Ortsänderung eines Curvenpunktes auf die Tangente, Haupt- und Binormale bedeuten, wie in (2), wobei jetzt alle Grössen reell sind, die Differenz $\bar{\sigma} - \sigma$ zwischen den Längen der neuen und der alten Curve nach Satz 1 so dargestellt:

---

[1] Hierauf hat Darboux in seinen „Leçons sur la théorie générale des surfaces", 2. partie, Paris 1889, aufmerksam gemacht.

$$\bar{\sigma} - \sigma = -\int_0^\sigma \frac{\eta}{r}\, ds \,.\, \varepsilon + \ldots .$$

Die rechts stehende unendliche Reihe nach Potenzen der unendlich kleinen Grösse ε hat bekanntlich dasselbe Vorzeichen wie ihr erstes Glied, das da steht. Ist dies Glied nicht gleich Null, so können wir dadurch, dass wir längs der ganzen Curve η durch $-\eta$ ersetzen, zu einer zweiten unendlich benachbarten Curve kommen, bei der $\bar{\sigma} - \sigma$ das entgegengesetzte Zeichen wie vorher hat. Ist aber die alte Curve eine kürzeste, so muss $\bar{\sigma} - \sigma$ stets positiv sein. Daher kann sie nur dann eine kürzeste Linie sein, wenn für alle Verrückungen

$$\int_0^\sigma \frac{\eta}{r}\, ds = 0$$

ist, was nach Satz 2 zu den geodätischen Curven führt. Daher:

Satz 3: Die kürzesten Curven, die auf einer reellen Fläche zwei reelle Punkte mit einander verbinden, gehören zu den geodätischen Curven der Fläche.

Sie sind also entweder Geraden oder solche Curven, deren Hauptnormalen Flächennormalen sind. Aber wohlbemerkt ist dies nur eine notwendige Bedingung, keine hinreichende. Die Frage nach hinreichenden Bedingungen ist so schwierig, dass wir sie gar nicht besprechen. Unsere Betrachtung lehrt aber, dass die geodätischen Curven auf den Flächen besonderes Interesse haben, weil zu ihnen auch die kürzesten Curven der Fläche gehören.

In I S. 270 definierten wir als geodätische Curven einer abwickelbaren Fläche diejenigen, die bei der Abwickelung der Fläche auf die Ebene zu Geraden werden. Es ist klar, dass diese Curven kürzeste auf der Fläche sind, sie gehören also zu denjenigen Curven, die wir hier als geodätische definiert haben. Aber auch umgekehrt: Liegt auf einer abwickelbaren Fläche eine Curve vor, die nach der jetzigen Definition geodätisch ist, so sind ihre Hauptnormalen zur Fläche senkrecht, d. h. die rectificierenden Ebenen der Curve sind die Tangentenebenen der abwickelbaren Fläche, die daher die rectificierende Fläche der Curve ist. Nach Satz 32, I S. 321, ist die Curve mithin auch nach der früheren Definition geodätisch.

Diejenigen geodätischen Curven einer Fläche, die keine Geraden sind, können wir offenbar auch als diejenigen Curven definieren, deren Schmiegungsebenen die Flächennormale enthalten

oder deren Binormalen die Fläche berühren oder deren rectificierende Flächen die gegebene Fläche selbst längs der betreffenden Curven berühren.[1]

Obgleich Betrachtungen aus der Mechanik eigentlich nicht hierher gehören, wollen wir doch nicht unterlassen, die folgende einfache Überlegung anzugeben, die wohl zuerst zur Feststellung des Kennzeichens für geodätische Curven geführt hat:[2] Über eine starr gedachte Fläche sei ein völlig biegsamer, aber unausdehnbarer Faden von P_0 bis P_1 gespannt, sodass er also eine kürzeste Linie von P_0 bis P_1 ist. Sind dann A, B, C drei einander unendlich benachbarte Punkte der Curve (siehe Fig. 76), so erleidet der mittlere Punkt B zwei Spannkräfte, eine in der Richtung des Elementes BA, eine in der Richtung des Elementes BC. Die resultierende Kraft liegt in der Ebene ABC, die aber die Schmiegungsebene der betrachteten

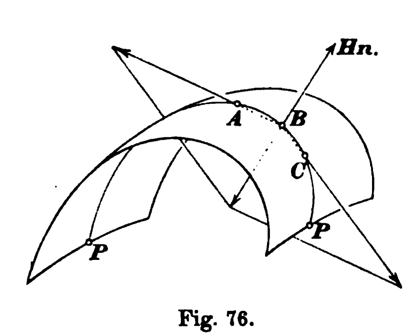


Fig. 76.

---

[1] Im Jahre 1697 stellte Joh. Bernoulli im Journal des Savans das Problem, die kürzesten Linien auf einer Fläche, insbesondere auf einer Rotationsfläche zu bestimmen. In einem Briefe an Leibniz aus demselben Jahre teilte er mit, dass er die Aufgabe auf eine Differentialgleichung zurückgeführt habe. Leibniz antwortete darauf, dass er schon früher eine Methode zur Lösung gefunden habe, jedoch zur wirklichen Durchführung der Rechnung nicht gekommen sei. Auf eine Aufforderung hin setzte Leibniz seine Methode in einem Briefe an Joh. Bernoulli 1698 auseinander (siehe „Got. Gul. Leibnitii et Johan. Bernoulli commercium philosophicum et mathematicum", Lausanne u. Genf 1745, wieder abgedruckt in „Leibnizens mathematischen Schriften", hgg. von Gerhardt, 1. Abt. Bd. III, Halle 1855). Die Andeutung, die er giebt, zeigt, dass er sich vorstellt, zwei unendlich benachbarte Punkte A und B der Fläche seien auf der fraglichen Curve angenommen, auf der Schnittlinie ihrer Tangentenebenen, durch die er sich dort die Fläche ersetzt denkt, muss man dann einen Punkt C so bestimmen, dass $AC + CB$ ein Minimum wird. Joh. Bernoulli antwortete darauf in demselben Jahre (siehe die oben erwähnten Sammelwerke), dass er eine andere Methode gefunden habe, die sich darauf gründe, dass die Ebene durch drei benachbarte Punkte der gesuchten Curve auf der Tangentenebene der Fläche senkrecht stehe, was offenbar auf unser obiges Ergebnis hinauskommt. Vgl. hierzu Stäckel, „Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien", Leipziger Berichte 1893. Daselbst wird auch der Ursprung der Bezeichnung: geodätisch aufgedeckt.

[2] Es ist wenigstens sehr wahrscheinlich, dass Joh. Bernoulli auf diesem Wege zu seinem in voriger Anmerkung erwähnten Ergebnis gelangt ist.

Curvenstelle ist (nach I S. 174). Da die Curve auf die starre Fläche aufgespannt ist und ruht, so wird dieser Resultierenden durch den Widerstand der Fläche in B das Gleichgewicht gehalten. Die widerstehende Kraft ist aber in der Normalen des Flächenpunktes B gelegen. Also muss die Flächennormale von B in der Schmiegungsebene von B liegen. Die gespannte Curve hat daher die Eigenschaft, dass in allen ihren Punkten die jeweilige Flächennormale in der Schmiegungsebene liegt, und ist deshalb eine geodätische Curve.

Jetzt wollen wir die Definition der geodätischen Curven analytisch aussprechen: Eine Curve auf der Fläche:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \chi(u, v), \quad z = \psi(u, v) \tag{6}$$

wird in allgemeinster Weise nach S. 11 dadurch gegeben, dass man u und v als Functionen eines Parameters t annimmt:

$$u = A(t), \quad v = B(t).$$

Fasst man u und v in (6) als solche Functionen auf, so ist (6) eine analytische Darstellung einer Flächencurve, ausgedrückt mittels des Parameters t. Wenn wir die Differentiation nach t durch Striche andeuten, so ist längs der Curve:

$$\tag{7} \left\{ \begin{aligned} x' &= x_u u' + x_v v', \\ x'' &= x_{uu} u'^2 + 2x_{uv} u' v' + x_{vv} v'^2 + x_u u'' + x_v v'', \end{aligned} \right.$$

und ähnlich sind y', y'', z', z'' zu berechnen. Nun sind die Richtungscosinus der Binormale der Curve nach Satz 10, I S. 175, proportional:

$$y'z'' - z'y'', \quad z'x'' - x'z'', \quad x'y'' - y'x''.$$

Ist die Curve weder eine Gerade noch eine Minimalcurve, so ist sie nur dann eine geodätische Curve, wenn ihre Binormale Tangente der Fläche ist, d. h. wenn es solche Functionen α und β von t giebt, für die:

$$\begin{aligned} y'z'' - z'y'' &= \alpha x_u + \beta x_v, \\ z'x'' - x'z'' &= \alpha y_u + \beta y_v, \\ x'y'' - y'x'' &= \alpha z_u + \beta z_v \end{aligned}$$

ist, denn dann ist die Binormale der Curve die zur Fortschreitungsrichtung ($dv : du = \beta : \alpha$) gehörige Tangente. Dies sind drei Gleichungen zur Bestimmung von zwei Grössen α und β, die in ihnen linear auftreten. Die Forderung, dass es zwei solche Grössen α und β gebe, die alle drei erfüllen, führt daher auf eine von α und β freie Gleichung. Diese wollen wir so ableiten: Wir multiplicieren

die Gleichungen mit x', y', z' bez. x'', y'', z'' und addieren sie alsdann jedesmal. So gehen die beiden in α und β homogenen Gleichungen hervor:

$$\alpha\,\mathbf{S}\,x_u x' + \beta\,\mathbf{S}\,x_v x' = 0,$$
$$\alpha\,\mathbf{S}\,x_u x'' + \beta\,\mathbf{S}\,x_v x'' = 0,$$

die wiederum verlangen, dass

$$\begin{vmatrix} \mathbf{S}\,x_u x' & \mathbf{S}\,x_v x' \\ \mathbf{S}\,x_u x'' & \mathbf{S}\,x_v x'' \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

sei. Da diese Gleichung frei von α und β ist, ist sie die gewünschte Bedingung. Wir wollen die Determinante umstellen, weil dann ihre Schreibweise in der Folge bequemer wird:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{S}\,x_u x' & \mathbf{S}\,x_u x'' \\ \mathbf{S}\,x_v x' & \mathbf{S}\,x_v x'' \end{vmatrix} = 0.$$

Nach (7), XI (A) und XVI (C) lässt sie sich nun so schreiben:

$$\begin{vmatrix} Eu' + Fv' & \frac{1}{2}E_u u'^2 + E_v u'v' + (F_v - \frac{1}{2}G_u)v'^2 + Eu'' + Fv'' \\ Fu' + Gv' & (F_u - \frac{1}{2}E_v)u'^2 + G_u u'v' + \frac{1}{2}G_v v'^2 + Fu'' + Gv'' \end{vmatrix} = 0. \tag{9}$$

Wie man sieht, enthält sie als Coefficienten der Differentialquotienten u', v', u'', v'' nur die Fundamentalgrössen **erster** Ordnung E, F, G und deren erste Ableitungen. Sie gilt daher auch in dem Falle, dass die gegebene Fläche die Tangentenfläche einer Minimalcurve ist.

Wir können nun leicht sehen, dass sie auch für die etwa auf der Fläche vorhandenen **Geraden** gilt. Denn längs einer Geraden sind die Verhältnisse $x' : y' : z'$ constant, sodass etwa:

$$x' = \varrho\,a, \quad y' = \varrho\,b, \quad z' = \varrho\,c \quad (a, b, c = \text{Const.})$$

ist, wo ϱ eine Function von t bedeutet. Hier ist:

$$x'' = \varrho'\,a, \quad y'' = \varrho'\,b, \quad z'' = \varrho'\,c,$$

sodass die Gleichung (8) oder — was dasselbe ist — die Gleichung (9) erfüllt wird.

Wir deuteten schon oben (auf S. 402) an, dass sich ergeben wird, dass auch die bisher ausgeschlossenen **Minimalcurven** das analytische Kennzeichen der geodätischen Curven haben. In der That: Längs einer Minimalcurve sind u und v solche Functionen eines Parameters t, für die nach Satz 16, S. 36:

$$Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 = 0$$

ist, und zwar für alle Werte von t, sodass wir diese Gleichung nach t differenzieren dürfen. Dann kommt:

$$(E_u u' + E_v v')u'^2 + 2(F_u u' + F_v v')u'v' + (G_u u' + G_v v')v'^2 +$$
$$+ 2Eu'u'' + 2F(u''v' + u'v'') + 2Gv'v'' = 0.$$

Aber wenn wir die Gleichung (9) umformen, indem wir die Zeilen der Determinante mit u' und v' multiplicieren und dann ihre Summen als erste Zeile benutzen, so erkennen wir, dass die beiden Elemente dieser neuen ersten Zeile infolge der soeben angegebenen beiden Gleichungen gleich Null sind, sodass die Gleichung (9) erfüllt ist.

Es hat sich also ergeben:

Satz 4: Die Curve, die man erhält, wenn man auf einer Fläche mit den Fundamentalgrössen erster Ordnung E, F, G die Parameter u, v als Functionen eines Parameters t auffasst, ist unter der Bedingung, dass für alle Werte von t

$$\begin{vmatrix} Eu' + Fv' & \frac{1}{2}E_u u'^2 + E_v u'v' + (F_v - \frac{1}{2}G_u)v'^2 + Eu'' + Fv'' \\ Fu' + Gv' & (F_u - \frac{1}{2}E_v)u'^2 + G_u u'v' + \frac{1}{2}G_v v'^2 + Fu'' + Gv'' \end{vmatrix} = 0$$

ist, entweder eine Curve, deren Hauptnormalen Flächennormalen sind, oder eine Gerade oder eine Minimalcurve; und die Bedingung wird von jeder Curve erfüllt, die zu einer dieser drei Arten gehört.

Es ist deshalb zweckmässig, nicht nur die beiden ersten Curvenarten, sondern auch die Minimalcurven der Fläche als die geodätischen Curven der Fläche zu bezeichnen, was von jetzt ab geschehen soll. Die Gemeinsamkeit des analytischen Merkmals ist schon ein genügender Grund hierfür. Man könnte diese Auffassung noch durch die Bemerkung verstärken, dass die Minimalcurven die Länge Null haben, also die allerkürzesten Curven auf der Fläche sind; aber dieser Begründung steht entgegen, dass wir von kürzesten Curven nur im reellen Falle gesprochen haben.

Als die Hülfsveränderliche t kann man auch den Parameter u selbst wählen, denn eine beliebige Curve kann auf der Fläche dadurch definiert werden, dass man v als Function von u auffasst, wodurch allerdings die Parameterlinien (u) selbst von vornherein ausgeschlossen werden (vgl. S. 11). Diese Parameterlinien (u) selbst sind in der Form $u =$ Const., $v = t$ darstellbar; sodass für sie $u' = u'' = v'' = 0$, $v' = 1$ ist. Eine Parameterlinie (u) ist also nach (9) eine geodätische Curve, wenn für alle Werte von v:

$$\begin{vmatrix} F & F_v - \frac{1}{2} G_u \\ G & \frac{1}{2} G_v \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$F G_v - 2 G F_v + G G_u = 0$$

ist. Alle anderen geodätischen Curven sind nun in der Form $u = t$, $v = \omega(t)$ darstellbar; sodass für sie $u' = 1$, $u'' = 0$, aber

$$v' = \frac{dv}{du}, \quad v'' = \frac{d^2 v}{du^2}$$

ist. Daher können wir den Satz 4 auch so aussprechen:

Satz 5: Fasst man auf einer Fläche mit den Fundamentalgrössen erster Ordnung E, F, G den Parameter v als eine Function des Parameters u auf, so ist die dadurch definierte Curve auf der Fläche dann und nur dann eine geodätische Curve, wenn die Function v mit ihrem ersten und zweiten Differentialquotienten nach u die Bedingung:

$$\begin{vmatrix} E + F\frac{dv}{du} & \frac{1}{2}E_u + E_v \frac{dv}{du} + (F_v - \frac{1}{2}G_u)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + F\frac{d^2 v}{du^2} \\ F + G\frac{dv}{du} & F_u - \frac{1}{2}E_v + G_u \frac{dv}{du} + \frac{1}{2}G_v\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + G\frac{d^2 v}{du^2} \end{vmatrix} = 0$$

für alle Werte von u erfüllt. Dieser Darstellung entziehen sich nur die Parameterlinien (u). Eine Parameterlinie (u) aber ist dann und nur dann eine geodätische Curve, wenn für den zugehörigen Wert u und für alle Werte von v

$$F G_v - 2 G F_v + G G_u = 0$$

ist.

Stellt man sich das Problem, die geodätischen Curven auf einer gegebenen Fläche zu bestimmen, so sind E, F, G bekannte Functionen von u und v, während es sich darum handelt, die unbekannte Function v von u so zu bestimmen, dass sie mit ihrem ersten und zweiten Differentialquotienten die in diesem Satze angegebene Gleichung, in der die unbekannte Function auch in E, F, G und den Ableitungen von E, F, G vorkommt, für alle Werte von u erfüllt. Diese Gleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die unbekannte Function v von u.[1]

---

[1] Obwohl Joh. Bernoulli im Briefwechsel mit Leibniz (vgl. die Anm. zu S. 404) 1697 behauptete, die Differentialgleichung der geodätischen Curven aufgestellt zu haben, und obwohl er 1742 im vierten Bande seiner „Opera

Die geodätischen Curven einer Fläche werden also durch eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt, während die Minimalcurven, die Krümmungscurven und die Haupttangentencurven durch je eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung bestimmt werden — nach XI (O), XII (U) und XII (X). In der That besteht in betreff der Anzahl der Curven dieser Arten ein wesentlicher Unterschied: Es giebt auf der Fläche nur ∞^1 Minimalcurven, ∞^1 Krümmungscurven und ∞^1 Haupttangentencurven. Wählen wir auf der Fläche irgend zwei Punkte P_0 und P_1, so wird es im allgemeinen keine Minimalcurve geben, die durch beide geht, ebenso keine Krümmungscurve und keine Haupttangentencurve, wohl aber wird es auf der Fläche unter allen denjenigen Curven, die P_0 mit P_1 verbinden, eine kürzeste geben, also eine geodätische. Freilich ist dies keine exacte Schlussfolgerung, denn erstens gilt dies nur für den reellen Fall und zweitens darf man nicht ohne weiteres annehmen, dass es unter unendlich vielen Curven stets eine kürzeste gebe. Dagegen ist es in einzelnen Beispielen auch exact zu sehen:

1. Beispiel: Auf einer abwickelbaren Fläche sind die geodätischen Curven, wie wir oben sahen, diejenigen, die sich bei der Ausbreitung der Fläche auf die Ebene als die Geraden darstellen. Zwischen zwei Punkten in der Ebene kann man aber stets eine Gerade ziehen, woraus folgt, dass es zwischen zwei beliebigen Punkten einer abwickelbaren Fläche stets wenigstens eine geodätische Curve giebt. Dabei nehmen wir an, dass beide Punkte auf demselben Mantel der Fläche liegen (vgl. I S. 266). Insbesondere kann es aber vorkommen, dass es zwischen beiden Punkten unendlich viele geodätische Curven giebt, wenn nämlich die Abwickelung der Fläche auf die Ebene periodisch ist, sodass ein und derselbe Punkt der Fläche bei der Ausbreitung auf die Ebene unendlich oft wiederkehrt. Man sieht dies am deutlichsten im Falle eines Rotationscylinders. Wickeln wir ihn auf die Ebene ab (siehe Fig. 77, S. 410), so kehrt ein und dieselbe Stelle A unendlich oft in der Abwickelung wieder, in den Lagen A_1, A_2, A_3 . . ., dasselbe gilt von einer Stelle B, der unendlich viele Lagen B_1, B_2, B_3 . . . in der Ebene entsprechen. Verbinden wir irgend einen der Punkte A_1, A_2, A_3 . . . mit irgend einem der Punkte B_1, B_2, B_3 . . . durch die Gerade, so giebt die Aufwickelung des Mantels auf den Cylinder eine geodätische Curve, nämlich eine gemeine Schraubenlinie

omnia", Lausanne und Genf, sie aufgestellt hat, gebührt doch Euler die Priorität der Veröffentlichung wegen seiner Arbeit: „De linea brevissima in superficie quacunque duo quaelibet puncta jungente", Commentarii Acad. Petropolitanae, t. III, ad annum 1728, Petersburg 1732. Auch er geht von der mechanischen Betrachtung der Spannungen im Faden aus. Direct aus der geometrischen Definition der kürzesten Linien leitete erst Lagrange in seinem „Calcul des fonctions", Paris 1806, siehe auch Oeuvres t. X, die Eigenschaft der geodätischen Curven ab.

(vgl. I S. 157). Dabei geben die Geraden, die sich nur um eine der Perioden der Abwickelung von einander unterscheiden, dieselbe Curve, so die Geraden $A_1 B_1$, A_2, B_2 u. s. w.; ebenso $A_1 B_2$, $A_2 B_3$ u. s. w. Diese Ergebnisse sind ganz unabhängig davon, wie die Punkte A und B gegen einander liegen. Wählen

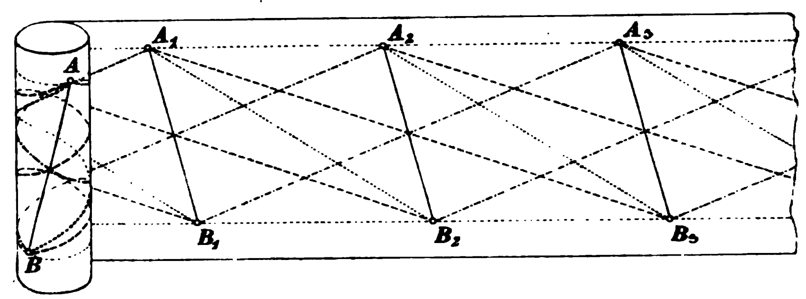


Fig. 77.

wir sie auch noch so dicht bei einander, so giebt es doch unendlich viele gemeine Schraubenlinien zwischen ihnen. Eine ist allerdings die kürzeste: in Fig. 77 ist es diejenige, die der Geraden $A_1 B_1$ entspricht. Aber alle sind geodätische Curven.

2. Beispiel: Auf der Kugel sind die Flächennormalen die Radien, also die geodätischen Curven — mit Ausnahme der beiden Scharen von je ∞^1 Minimalgeraden (vgl. Satz 26, S. 64) — diejenigen, deren Hauptnormalen nach der Kugelmitte gehen, sodass bei ihnen der Mittelpunkt der Schmiegungskugel, die ja die Kugel selbst ist, mit dem Mittelpunkt des Krümmungskreises stets zusammenfällt. Ist dieser Mittelpunkt der Anfangspunkt und ist der Kugelradius gleich Eins, so sind hier

$$l = -x, \quad m = -y, \quad n = -z$$

die Richtungscosinus der Hauptnormale. Das Minuszeichen ist hier anzuwenden, weil die Hauptnormale nach I S. 189 positiv in der Richtung nach dem Krümmungsmittelpunkt hin ist. Differentiation nach der Bogenlänge s der geodätischen Curven giebt nun wegen III (C) und III (B):

$$\left(1 - \frac{1}{r}\right)\alpha = \frac{1}{\varrho}\lambda, \quad \left(1 - \frac{1}{r}\right)\beta = \frac{1}{\varrho}\mu, \quad \left(1 - \frac{1}{r}\right)\gamma = \frac{1}{\varrho}\nu.$$

Multiplicieren wir diese drei Gleichungen mit α, β, γ bez. λ, μ, ν und addieren sie alsdann jedesmal, so folgt nach II (A):

$$1 - \frac{1}{r} = 0, \quad \frac{1}{\varrho} = 0.$$

Nach der zweiten Gleichung sind die geodätischen Curven wegen Satz 13, I S. 185, eben und nach der ersten wegen Satz 29, I S. 41, Kreise vom Radius Eins; also sind es die grössten Kreise der Kugel, ein Ergebnis, das geometrisch schon von vornherein bekannt war. Man sieht auch, dass der grösste Kreis zwischen zwei Punkten der Kugel nur in einem seiner beiden Teile die kürzeste Curve ist. Liegen die beiden Punkte einander diametral gegenüber, so giebt es zwischen ihnen ∞^1 geodätische Curven.

In der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen beweist man, dass eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung zwischen u und v unter gewissen functionentheoretischen Voraussetzungen ∞^2 Lösungen hat, und so könnte man daraus entnehmen, dass es unter den entsprechenden Voraussetzungen für die vorgelegte Fläche auf ihr ∞^2 geodätische Curven giebt. Wir machen jedoch davon keinen Gebrauch und erwähnen es nur zur Orientierung des Lesers.

Liegt eine Fläche vor, so lassen sich ihre geodätischen Curven nur in den allerwenigsten Fällen durch endliche Gleichungen darstellen, weil die Auffindung derjenigen Functionen v von u, die der in Satz 5 angegebenen Gleichung genügen, die grössten Schwierigkeiten bereitet. Wir geben hier zunächst nur ein Beispiel, in dem es gelungen ist, sie zu bestimmen.

Beispiel: Es liege eine Rotationsfläche[1] vor, deren Axe die z-Axe sei (vgl. (2), S. 41):

$$x = p(u)\cos v\,, \qquad y = p(u)\sin v\,, \qquad z = q(u)\,.$$

Wenn wir wie immer unter u die Bogenlänge der Meridiane verstehen, so ist wie auf S. 41:

$$p'^2 + q'^2 = 1$$

und:

$$E = 1\,, \qquad F = 0\,, \qquad G = p^2\,. \tag{11}$$

Nach Satz 5 sind also von den Breitenkreisen (u) nur diejenigen geodätische Curven, für die

$$p\,p' = 0$$

ist. $p = 0$ giebt die zu Punkten degenerierten Breitenkreise, da p der Radius des Kreises (u) ist, und p' ist da gleich Null, wo die Tangente der Meridiancurve der Drehaxe parallel ist. Von den Breitenkreisen, die nicht in Punkte ausarten, sind also nur diejenigen geodätische Curven, in denen die Fläche von Rotationscylindern um die z-Axe berührt wird. Die übrigen geodätischen Curven bestimmen sich nach Satz 5 aus der Bedingung:

$$\begin{vmatrix} 1 & -p\,p'\left(\dfrac{dv}{du}\right)^2 \\ p^2\dfrac{dv}{du} & 2p\,p'\dfrac{dv}{du} + p^2\dfrac{d^2v}{du^2} \end{vmatrix} = 0$$

[1] Jacob Bernoulli bestimmte in den Acta Eruditorum, Leipzig 1698, die geodätischen Curven auf einer Rotationsfläche und gelangte durch Quadraturen zum richtigen Ziel, obgleich sein Verfahren fehlerhaft war. Alsdann stellte Clairaut einen wichtigen Satz über die geodätischen Curven auf Rotationsflächen auf, den wir ableiten werden. Siehe seine: „Déterminations géométrique de la perpendiculaire à la méridienne tracée par M. Cassini avec plusieurs méthodes d'en tirer la grandeur et la figure de la terre"; Mém. de l'Acad. de Paris pour l'année 1733, Paris 1735.

oder

$$\frac{d^2 v}{d u^2} + p p' \left(\frac{d v}{d u}\right)^2 + 2 \frac{p'}{p} \frac{d v}{d u} = 0. \tag{12}$$

Man kann diese Gleichung geometrisch deuten, wenn man den Winkel α einführt, den die gesuchte geodätische Curve an der Stelle (u, v) mit dem Meridian (v) dieser Stelle bildet. Da längs der Meridiancurve (v) das Verhältnis $d v : d u$ gleich Null, längs der geodätischen Linie gleich dem in der vorstehenden Gleichung auftretenden Differentialquotienten $\frac{d v}{d u}$ ist, so giebt Satz 10, S. 32, wegen (11)

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 \left(\frac{d v}{d u}\right)^2}}, \tag{13}$$

woraus folgt:

$$\frac{d v}{d u} = \pm \frac{\operatorname{tg} \alpha}{p}.$$

Wir haben hier den Factor $\pm$ hinzugefügt, weil wir über den Sinn, in dem der Winkel α gemessen werden soll, keine bestimmte Annahme gemacht haben. Längs der geodätischen Curve ist nun wie v auch α eine Function von u, sodass die Differentiation nach u den folgenden Wert des zweiten Differentialquotienten von v liefert:

$$\frac{d^2 v}{d u^2} = \pm \frac{1}{p \cos^2 \alpha} \frac{d \alpha}{d u} \mp \frac{\operatorname{tg} \alpha}{p^2} \cdot p'.$$

Setzen wir diese beiden Werte des ersten und zweiten Differentialquotienten von v nach u in (12) ein, so kommt:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \frac{d \alpha}{d u} + \frac{p'}{p} = 0$$

oder

$$\frac{1}{\sin \alpha} \frac{d \sin \alpha}{d u} + \frac{p'}{p} = 0,$$

woraus folgt, dass

$$p \sin \alpha = m \qquad (m = \text{Const.}) \tag{14}$$

ist. Daher ergiebt sich, da p der Radius des Breitenkreises ist, der

Satz 6: Längs einer jeden solchen geodätischen Curve einer Rotationsfläche, die keine Minimalcurve ist, ist das Product aus dem jeweiligen Radius des Breitenkreises und dem Sinus des Winkels, den die Curve mit dem Meridian bildet, constant.[1]

Dass wir die Minimalcurven ausnehmen müssen, folgt daraus, dass man bei ihnen nicht von einem Winkel α sprechen kann.

Da nach (13)

$$\sin^2 \alpha = \frac{p^2 \left(\frac{d v}{d u}\right)^2}{1 + p^2 \left(\frac{d v}{d u}\right)^2}$$

[1] Dies ist der Satz von CLAIRAUT, den wir in der letzten Anm. erwähnten.

ist, so lässt sich die Formel (14) so schreiben:

$$\frac{dv}{du} = \frac{m}{p\sqrt{p^2 - m^2}}.$$

Hierin ist die rechte Seite eine Function von u allein. Eine Quadratur liefert also:

(15) $$v = m\int \frac{du}{p\sqrt{p^2 - m^2}} - n \qquad (m, n = \text{Const.}).$$

Hiermit aber sind die geodätischen Curven auf der Rotationsfläche in endlicher Form gefunden.

Nach dem Satze 6 oder der Formel (14) kann man sich eine allgemeine Vorstellung von dem Verlaufe einer reellen geodätischen Curve auf einer reellen Rotationsfläche machen: Wir können uns dabei auf einen solchen Teil der Fläche beschränken, auf dem p positiv ist, denn $p = 0$ giebt die zu Punkten entarteten Breitenkreise an. Ist nun z. B. für eine geodätische Curve die Constante m auch positiv, so ist der kleinste Wert, den p erreichen kann, der Wert m, für den $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist. Der Breitenkreis vom Radius m wird also von der geodätischen Curve berührt. Für noch kleinere Werte von p wird $m : p > 1$, sodass die Curve den Bereich derjenigen Breitenkreise meidet, deren Radius kleiner als m ist. Sie wird also an dem Kreise vom Radius m zu den Kreisen von grösseren Radien umkehren; solange p wächst, nimmt α ab, d. h. die Curve wird weniger steil gegen den Meridian. Wächst der Radius bis ins Unendliche, so nähert sich die Curve der Gestalt einer Meridiancurve.

Insbesondere wollen wir diese Ergebnisse auf die Rotationsflächen von constanter Krümmung K anwenden. Bei ihnen ist nach S. 122

$$p'' = -Kp.$$

In I S. 98 hatten wir unter (6) dieselbe Gleichung, nur stand dort x statt p, und die Veränderliche, nach der differenziert wurde, war nicht mit u, sondern mit s bezeichnet. Wie wir in (8), I S. 99, sahen, ist also:

$$p = a\cos\sqrt{K}\,u + b\sin\sqrt{K}\,u$$

die allgemeinste Function $p(u)$, für die die Rotationsfläche (10) die constante Krümmung K hat. Dabei bedeuten a und b zwei Constanten. Wir haben nun von u nur das eine vorausgesetzt, dass u die Bogenlänge auf den Meridianen bedeute. Ist c irgend eine Constante, so ist auch

(16) $$\bar{u} = u - c$$

die Bogenlänge auf den Meridianen, nur von einer anderen Stelle an gemessen. Dann ist:

$$p = a\cos\sqrt{K}(\bar{u} + c) + b\sin\sqrt{K}(\bar{u} + c)$$

oder:

$$p = \left(a\cos\sqrt{K}\,c + b\sin\sqrt{K}\,c\right)\cos\sqrt{K}\,\bar{u} + \\ + \left(-a\sin\sqrt{K}\,c + b\cos\sqrt{K}\,c\right)\sin\sqrt{K}\,\bar{v}.$$

Wir können die Constante c so wählen, dass die zweite Klammer gleich Null wird, indem wir nämlich:

$$\operatorname{tg}\sqrt{K}\,c = \frac{b}{a},$$

also

$$\cos\sqrt{K}\,c = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \sin\sqrt{K}\,c = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \tag{17}$$

wählen. Dann wird

$$p = \sqrt{a^2+b^2}\cos\sqrt{K}\,\bar{u}.$$

Wir können uns jetzt vorstellen, wir hätten von vornherein schon die Bogenlänge durch $\bar{u}$ statt u ausgedrückt, und dürfen daher ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass in den Formeln (10) die Veränderliche u diese passender gewählte Bogenlänge sei, sodass wir

$$p = A\cos\sqrt{K}\,u \tag{18}$$

setzen dürfen, indem wir $\sqrt{a^2+b^2}$ mit A bezeichnen.

Alsdann giebt (15):

$$v = \int \frac{m\,du}{A\cos\sqrt{K}\,u\sqrt{A^2\cos^2\sqrt{K}\,u - m^2}} - n.$$

Diese Quadratur lässt sich nun dadurch ausführen, dass man $\operatorname{ctg}\sqrt{K}\,u$ als neue Veränderliche t benutzt. Dann kommt nämlich:

$$\sin\sqrt{K}\,u = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos\sqrt{K}\,u = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

und

$$du = -\frac{1}{\sqrt{K}}\sin^2\sqrt{K}\,u\,.\,dt,$$

sodass sich für v ergiebt:

$$v = -\frac{m}{A\sqrt{K}}\int\frac{dt}{t\sqrt{A^2t^2 - m^2(1+t^2)}} - n$$

oder integriert:

$$v = \frac{1}{A\sqrt{K}}\arcsin\left(\frac{m}{\sqrt{A^2-m^2}}\cdot\frac{1}{t}\right) - n$$

oder:

$$\sin(A\sqrt{K}\,v + n) = \frac{m}{\sqrt{A^2-m^2}}\cdot\frac{1}{t},$$

d. h., wenn wieder $\operatorname{ctg}\sqrt{K}\,u$ für t gesetzt wird:

$$\sin(A\sqrt{K}\,v + n) = \frac{m}{\sqrt{A^2-m^2}}\operatorname{tg}\sqrt{K}\,u. \tag{19}$$

Diese Gleichung zwischen u und v, die ausser den durch den Wert (18) von p bedingten Constanten K und A noch die willkürlichen Constanten m und n enthält, stellt also die ∞^2 geodätischen Curven der zu (18) gehörigen Rotationsfläche constanter Krümmung dar. Wir können die Gleichung auch so schreiben:

$$\cos n\,.\,\sin A\sqrt{K}\,v\,.\,\operatorname{ctg}\sqrt{K}\,u + \sin n\,.\,\cos A\sqrt{K}\,v\,.\,\operatorname{ctg}\sqrt{K}\,u = \frac{m}{\sqrt{A^2-m^2}}.$$

Wenn wir jetzt die neuen Parameter einführen:

$$(20)\qquad \begin{cases} \bar{u} = \sin A\sqrt{K}v \, . \operatorname{ctg} \sqrt{K}u \, , \\ \bar{v} = \cos A\sqrt{K}v \, . \operatorname{ctg} \sqrt{K}u \, , \end{cases}$$

so nimmt die Gleichung der geodätischen Curven die Form an:

$$\cos n \, . \, \bar{u} + \sin n \, . \, \bar{v} = \frac{m}{\sqrt{A^2 - m^2}} \, ,$$

wobei n und m die willkürlichen Constanten sind. Mit m ist aber auch die rechte Seite eine willkürliche Constante, etwa l, sodass wir haben:

$$(21)\qquad \cos n \, . \, \bar{u} + \sin n \, . \, \bar{v} = l \qquad (n, l = \text{Const.}) \, .$$

Also hat sich ergeben:

Satz 7: Man kann auf einer Rotationsfläche constanter Krümmung solche Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ einführen, mittels deren die geodätischen Curven der Fläche durch die allgemeine lineare Gleichung

$$\text{Const.} \, \bar{u} + \text{Const.} \, \bar{v} = \text{Const.}$$

dargestellt werden.

§ 2. Geodätische Abbildung von Flächen.

Die Differentialgleichung der geodätischen Curven einer Fläche kann man nach Satz 5, S. 408, aufstellen, sobald man nur die Fundamentalgrössen erster Ordnung der Fläche als Functionen der Parameter kennt. Hieraus können wir einen wichtigen Schluss ziehen: Wenn es möglich ist, eine Fläche auf eine andere zu verbiegen, so kann man entsprechenden Punkten beider Flächen gleiche Parameter beilegen, und dann stimmen die Fundamentalgrössen erster Ordnung auf beiden Flächen nach Satz 5, S. 275, mit einander überein, folglich auch die Differentialgleichungen der geodätischen Curven auf beiden Flächen, sodass sich ergiebt:

Satz 8: Verbiegt man eine Fläche, so sind ihre geodätischen Curven auch nach der Verbiegung geodätische Curven.

Übrigens leuchtet dieser Satz für die kürzesten Curven wegen der Längentreue bei der Verbiegung (vgl. S. 273) ohne weiteres ein, aber nicht jede geodätische Curve ist eine kürzeste Linie. Freilich ist der Satz auch für die geodätischen Curven überhaupt leicht geometrisch einzusehen, da die unendlich kleine Änderung einer Flächencurve, auf die wir im vorigen Paragraphen die Einführung der geodätischen Curven stützten, auf der verbogenen Fläche genau zu demselben Ergebnis wie auf der alten Fläche führt, denn die Ver-

biegung ist ja nach S. 274 eine in den unendlich kleinen Teilen congruente Abbildung.

Man kann nun die Frage aufwerfen, ob sich der Satz 8 umkehren lässt, ob also alle diejenigen punktweisen Abbildungen einer Fläche, bei denen jeder geodätischen Curve der einen Fläche eine geodätische Curve der anderen entspricht, Verbiegungen sind. Wir werden derartige Abbildungen geodätische Abbildungen nennen. Alsdann können wir die Frage so formulieren: Ist jede geodätische Abbildung eine Verbiegung?

Sicher braucht sie es für eine Rotationsfläche von constanter Krümmung nicht zu sein. Denn nach dem Satze 7 des vorigen Paragraphen lassen sich auf einer Rotationsfläche constanter Krümmung K solche Parameter u, v einführen, in denen die geodätischen Curven der Fläche durch die allgemeine lineare Gleichung in u und v:

$$\text{Const.}\, u + \text{Const.}\, v = \text{Const.} \tag{1}$$

dargestellt werden. Wenn man nun dem Punkte (u, v) der Fläche denjenigen Punkt einer Ebene zuordnet, der die rechtwinkligen Coordinaten u, v hat, so liegt eine punktweise Abbildung der Fläche auf die Ebene vor. In der Ebene mit den rechtwinkligen Coordinaten u, v ist aber (1) die Gleichung einer Geraden, d. h. einer geodätischen Curve. Durchläuft der Punkt (u, v) auf der Fläche eine geodätische Curve, so thut sein Bildpunkt (u, v) in der Ebene dasselbe, d. h. die Abbildung ist geodätisch. Sie ist aber keine Verbiegung, sobald das constante Krümmungsmaass $K \neq 0$ ist, wegen Satz 7, S. 275.

Im Falle einer Rotationsfläche constanter Krümmung ist die aufgeworfene Frage demnach zu verneinen. Dasselbe gilt überhaupt für Flächen constanter Krümmung. Denn nach Satz 18, S. 301, lässt sich jede Fläche von der constanten Krümmung K auf eine Rotationsfläche von dieser Krümmung verbiegen, sodass sich Satz 7 wegen Satz 8 so verallgemeinern lässt:

Satz 9: Auf jeder Fläche von constanter Krümmung giebt es solche Parameter, in denen die geodätischen Curven der Fläche durch die allgemeine lineare Gleichung zwischen den Parametern dargestellt werden.

Indem wir nun dazu übergehen, die aufgeworfene Frage allgemein zu beantworten, bemerken wir gleich vorweg, dass wir erkennen werden, dass die Frage zwar im allgemeinen, bei beliebigen Flächen, zu bejahen, aber nicht nur für die Flächen von constanter

Krümmung, sondern für eine sie umfassende grössere Familie von Flächen zu verneinen ist.

Wir nehmen also jetzt an, es seien zwei Flächen geodätisch auf einander abgebildet. Keine der beiden Flächen sei aber die Tangentenfläche einer Minimalcurve, auch sei die Abbildung nicht etwa so beschaffen, dass einer und nur einer Schar von Minimalcurven der einen Fläche eine Schar von Minimalcurven auf der anderen Fläche entspreche. Es sind dies Voraussetzungen, die im Falle der reellen Abbildung zweier reeller Flächen stets erfüllt sind. Nach Satz 49, S. 96, giebt es auf der einen Fläche mindestens ein (im reellen Falle reelles) Orthogonalsystem, dem auf der anderen wieder ein (im reellen Falle reelles) Orthogonalsystem entspricht. Wählen wir die Curven dieser Orthogonalsysteme als Parameterlinien, indem wir einander entsprechenden Curven beider Systeme gleiche Parameterwerte u bez. gleiche Parameterwerte v beilegen, so liegen also folgende Voraussetzungen vor:

Auf beiden Flächen bilden die Parameterlinien Orthogonalsysteme, und einander entsprechende Punkte beider Flächen gehören zu demselben Wertepaare der Parameter u, v. Nach Satz 13, S. 34, haben die Quadrate der Bogenelemente der beiden Flächen die Formen:

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2, \qquad d\bar{s}^2 = \bar{E}\,du^2 + \bar{G}\,dv^2. \tag{1}$$

Die geodätischen Curven der ersten Fläche genügen nach Satz 4, S. 407, der Gleichung:

$$2(u'v'' - v'u'') -$$
$$- \frac{E_v}{G}u'^3 + \left(2\frac{G_u}{G} - \frac{E_u}{E}\right)u'^2v' + \left(\frac{G_v}{G} - 2\frac{E_v}{E}\right)u'v'^2 + \frac{G_u}{E}v'^3 = 0.$$

Bei der zweiten Fläche tritt an ihre Stelle die in $\bar{E}$ und $\bar{G}$ geschriebene Gleichung. Sollen nun die geodätischen Curven beider Flächen einander entsprechen, so müssen beide Gleichungen übereinstimmen. Dies führt zu den vier Bedingungen:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{E_v}{G} = \frac{\bar{E}_v}{\bar{G}}, \qquad \frac{G_u}{E} = \frac{\bar{G}_u}{\bar{E}}, \\ &2\frac{G_u}{G} - \frac{E_u}{E} = 2\frac{\bar{G}_u}{\bar{G}} - \frac{\bar{E}_u}{\bar{E}}, \qquad \frac{G_v}{G} - 2\frac{E_v}{E} = \frac{\bar{G}_v}{\bar{G}} - 2\frac{\bar{E}_v}{\bar{E}}. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Die beiden in der zweiten Zeile stehenden Gleichungen lassen sich so schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial u}\log\left(\frac{G^2}{E}:\frac{\bar{G}^2}{\bar{E}}\right)=0,\qquad \frac{\partial}{\partial v}\log\left(\frac{E^2}{G}:\frac{\bar{E}^2}{\bar{G}}\right)=0.$$

Der erste Numerus ist also eine Function ψ von v allein, der zweite eine Function φ von u allein, sodass

$$(3)\qquad \frac{G^2}{E}=\frac{\bar{G}^2}{\bar{E}}\psi(v),\qquad \frac{E^2}{G}=\frac{\bar{E}^2}{\bar{G}}\varphi(u)$$

ist. Hieraus folgt:

$$\bar{E}=\frac{E}{\sqrt[3]{\varphi^2\psi}},\qquad \bar{G}=\frac{G}{\sqrt[3]{\varphi\psi^2}},$$

denn weder φ noch ψ ist gleich Null, da sonst E oder $G=0$ und also die erste Fläche gegen die Voraussetzung die Tangentenfläche einer Minimalcurve wäre. Bezeichnen wir die in der ersten dieser beiden Formeln vorkommenden dritten Wurzeln aus φ und ψ mit $U(u)$ und $V(v)$, so kommt:

$$\bar{E}=\frac{E}{U^2V},\qquad \bar{G}=\varepsilon\frac{G}{UV^2},$$

wo ε eine dritte Einheitswurzel, d. h. $\varepsilon^3=1$ ist. Aber wenn wir diese Werte in (3) einsetzen, so ergiebt sich $\varepsilon=1$. Also haben wir:

$$(4)\qquad \bar{E}=\frac{E}{U^2V},\qquad \bar{G}=\frac{G}{UV^2},$$

wo U eine Function von u allein und V eine Function von v allein bedeutet.

Jetzt bleibt noch die Befriedigung der in (2) in der ersten Zeile stehenden Gleichungen übrig. Setzen wir darin die Werte (4) ein, so kommt:

$$(5)\qquad (U-V)\frac{\partial\log E}{\partial v}=-V',\qquad (U-V)\frac{\partial\log G}{\partial u}=U'.$$

Wir wollen zunächst annehmen, es sei $U-V\neq 0$. Alsdann folgt:

$$\frac{\partial\log E}{\partial v}=\frac{\partial\log(U-V)}{\partial v},\qquad \frac{\partial\log G}{\partial u}=\frac{\partial\log(U-V)}{\partial u}$$

oder, wenn λ eine Function von u allein und μ eine Function von v allein bedeutet:

$$E=\lambda(U-V),\qquad G=\mu(U-V),$$

sodass (4) noch

$$\bar{E}=\lambda\frac{U-V}{U^2V},\qquad \bar{G}=\mu\frac{U-V}{UV^2}$$

liefert. Nach (1) sind demnach:

$$ds^2 = (U - V)(\lambda\, du^2 + \mu\, dv^2),$$
$$d\bar{s}^2 = \frac{U - V}{UV}\left(\frac{\lambda}{U}\, du^2 + \frac{\mu}{V}\, dv^2\right)$$

die Quadrate der Bogenelemente beider Flächen. Hätten wir nun von vornherein auf beiden Flächen $\int \sqrt{\lambda}\, du$ und $\int \sqrt{\mu}\, dv$ als Parameter statt u und v benutzt, was erlaubt ist, so hätten wir in diesen Formeln $\lambda = \mu = 1$ gehabt. Also lassen sich die Quadrate der Bogenelemente beider Flächen auf die einfacheren Formen bringen:

$$ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2), \quad d\bar{s}^2 = \left(\frac{1}{V} - \frac{1}{U}\right)\left(\frac{du^2}{U} + \frac{dv^2}{V}\right). \tag{6}$$

In dem bisher ausgeschlossenen Falle $U - V = 0$ ist $U = V =$ Const., weil U nur von u und V nur von v abhängt. Dann ist (5) erfüllt, und (4) lehrt, dass

$$\bar{E} = c\, E, \quad \bar{G} = c\, G \quad (c = \text{Const.}) \tag{7}$$

ist. Aber wenn wir die erste gegebene Fläche ähnlich vergrössern, etwa vom Anfangspunkt aus, sodass die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z in ax, ay, az übergehen, wobei a constant ist, so treten an die Stelle von E und G nach XI (A) die Grössen $a^2 E$ und $a^2 G$. Wenn wir $a = \sqrt{c}$ setzen, so zeigt (7), dass zu den Flächen, die auf die erste geodätisch abgebildet sind, insbesondere diejenigen gehören, die der ersten Fläche ähnlich sind, und nach Satz 8 also alle Flächen, die aus diesen ähnlichen Flächen durch Verbiegung hervorgehen.

Wir erkennen also, dass im allgemeinen jede geodätische Abbildung eine Verbiegung, eventuell verbunden mit einer ähnlichen Vergrösserung ist. Eine Ausnahme tritt nur in dem Falle ein, wo sich die Quadrate der Bogenelemente beider Flächen auf die Formen (6) bringen lassen.

Dabei haben wir oben von vornherein die Annahme ausgeschlossen, dass einer Schar von Minimalcurven der einen Fläche — und zwar nur einer Schar — eine Schar von Minimalcurven auf der anderen Fläche entspricht; wie gesagt tritt dieser Fall bei reeller Abbildung nie ein, weshalb wir auch hierauf nicht weiter eingehen wollen.

Unser Ergebnis ist, wenn wir in (6) noch V durch $-V$ ersetzen, dieses:

Satz 10:[1] Soll eine Abbildung einer Fläche auf eine andere Fläche geodätisch sein und wird dabei nicht etwa eine und nur eine Schar von Minimalcurven der einen Fläche als ebensolche Schar auf der anderen abgebildet, eine Möglichkeit, die bei reeller Abbildung nie eintritt, so ist die Abbildung im allgemeinen eine solche Beziehung zwischen beiden Flächen, bei der die zweite Fläche aus der ersten durch ähnliche Vergrösserung und Verbiegung hervorgeht. Dies ist nur dann nicht der Fall, wenn die Flächen so beschaffen sind, dass sich die Quadrate ihrer Bogenelemente gleichzeitig, d. h. mittels Parameter u, v, die auf beiden Flächen einander entsprechenden Punkten zugehören, auf die Formen bringen lassen:

$$ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2), \qquad d\bar{s}^2 = -\left(\frac{1}{U} + \frac{1}{V}\right)\left(\frac{du^2}{U} - \frac{dv^2}{V}\right),$$

wo U eine Function von u allein und V eine Function von v allein ist.

Dies führt uns zur Familie derjenigen Flächen, bei denen sich das Quadrat des Bogenelementes auf die Form

$$ds^2 = [U(u) + V(v)][du^2 + dv^2] \tag{8}$$

bringen lässt.[2] Denn auch die Fläche, deren Bogenelement-Quadrat die im Satze angegebene zweite Form $d\bar{s}^2$ hat, lässt sich dieser Form (8) unterordnen. Wenn man nämlich bei ihr

$$\int \frac{du}{\sqrt{U}} = \bar{u}, \qquad \int \frac{dv}{\sqrt{-V}} = \bar{v}$$

als Parameter einführt, sodass $\bar{u}$ eine Function von u allein und $\bar{v}$ eine Function von v allein ist, so kommt:

$$d\bar{s}^2 = -\left(\frac{1}{U} + \frac{1}{V}\right)(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2).$$

---

[1] Dieser Satz und seine Ableitung rührt her von Dini, „Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un' altra", Annali di Matem. t. III (1869), und zwar mit der in ihm ausgesprochenen Einschränkung, die Dini allerdings nicht ausdrücklich erwähnt hat, weil er nur reelle Abbildungen ins Auge fasste.

[2] Man nennt diese Flächen Liouville'sche Flächen, weil Liouville durch seine Note III: „Théoreme concernant l'intégration de l'équation des lignes géodésiques" zu Monge's „Application", 5. Aufl., Paris 1850, zuerst auf diese interessante Flächenfamilie aufmerksam gemacht hat.

Hierin ist

$$-\frac{1}{U} \text{ bez. } -\frac{1}{V}$$

als eine Function $\bar{U}$ von $\bar{u}$ allein bez. eine Function $\bar{V}$ von $\bar{v}$ allein darstellbar, sodass kommt:

$$d\bar{s}^2 = (\bar{U} + \bar{V})(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2),$$

also, abgesehen von der Bezeichnung, die Form (8).

Zu den Flächen, deren Bogenelement-Quadrat auf die Form (8) gebracht werden kann, gehören insbesondere die Flächen constanter Krümmung K, denn nach Satz 17, S. 301, lässt sich ihr Bogenelement-Quadrat auf die Form:

$$ds^2 = -\frac{4}{K}\frac{du\,dv}{(u+v)^2}$$

bringen. Wenn wir hierin

$$u = \bar{u} + i\bar{v}, \quad v = \bar{u} - i\bar{v}$$

setzen, so kommt:

$$ds^2 = -\frac{1}{K\bar{u}^2}(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2),$$

eine Form, die als Specialfall in (8) enthalten ist.

Auch die Rotationsflächen gehören zu den durch (8) charakterisierten Flächen, denn nach S. 41 lässt sich ds^2 bei einer Rotationsfläche auf die Form:

$$ds^2 = du^2 + p^2(u)\,dv^2$$

oder also:

$$ds^2 = p^2(u)\left(\frac{du^2}{p^2(u)} + dv^2\right)$$

bringen, die sofort als ein Specialfall aus (8) hervorgeht, sobald man $\int \frac{du}{p}$ statt u als den einen Parameter benutzt.

Hieraus schliessen wir nach Satz 5, S. 275, dass auch die auf Rotationsflächen verbiegbaren Flächen zu denjenigen Flächen gehören, bei denen sich ds^2 auf die Form (8) bringen lässt, insbesondere also nach Satz 15, S. 293, die Schraubenflächen.

Liegt eine Fläche vor, deren Bogenelement-Quadrat die Form (8) hat, so ist die Differentialgleichung ihrer geodätischen Curven nach Satz 4, S. 407, wegen:

$$E = G = U + V, \quad F = 0 \tag{9}$$

diese:

$$(U'v' - V'u')(u'^2 + v'^2) + 2(U + V)(u'v'' - v'u'') = 0. \tag{10}$$

Wollen wir die geodätischen Curven der Fläche bestimmen, so handelt es sich um die Aufgabe, u und v so als Functionen eines Parameters t zu bestimmen, dass sie mit ihren ersten und zweiten Differentialquotienten der Gleichung (10) für alle Werte von t genügen, wobei zu beachten ist, dass U als Function von u und V als Function von v auch Functionen von t sind. Es ist:

$$\frac{dU}{dt} = U'\frac{du}{dt} = U'u', \quad \frac{dV}{dt} = V'v',$$

sodass wir (10) auch so schreiben können:

$$\frac{v'}{u'}\frac{dU}{dt} - \frac{u'}{v'}\frac{dV}{dt} + 2(U+V)\frac{u'v''-v'u''}{u'^2+v'^2} = 0. \tag{11}$$

Der letzte Bruch hierin ist aber der Differentialquotient nach t von $\operatorname{arctg}(v':u')$. Da $v':u'$ auch in den beiden ersten Gliedern auftritt, so veranlasst uns dies, den Winkel α, dessen Tangente gleich $v':u'$ ist, als Hülfsgrösse einzuführen. Wir setzen also:

$$u' = \varrho\cos\alpha, \quad v' = \varrho\sin\alpha, \tag{12}$$

wo ϱ und α noch unbekannte Functionen von t sind. Jetzt nimmt (11) die Form an:

$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\frac{dU}{dt} - \operatorname{ctg}\alpha\cdot\frac{dV}{dt} + 2(U+V)\frac{d\alpha}{dt} = 0$$

oder, wenn wir mit $\sin\alpha\cos\alpha$ multiplicieren:

$$\sin^2\alpha\cdot\frac{dU}{dt} - \cos^2\alpha\cdot\frac{dV}{dt} + 2(U+V)\sin\alpha\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt} = 0.$$

Es ist aber

$$\sin^2\alpha\cdot\frac{dU}{dt} + 2U\sin\alpha\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}$$

der Differentialquotient von $\sin^2\alpha\,.\,U$ nach t und

$$\cos^2\alpha\cdot\frac{dV}{dt} - 2V\sin\alpha\cos\alpha\frac{d\alpha}{dt}$$

der Differentialquotient von $\cos^2\alpha\,.\,V$ nach t, sodass sich ergiebt, dass

$$\sin^2\alpha\,.\,U - \cos^2\alpha\,.\,V = a \qquad (a = \text{Const.}) \tag{13}$$

sein muss. Aber nach (12) ist:

$$\sin^2\alpha = \frac{v'^2}{u'^2+v'^2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{u'^2}{u'^2+v'^2},$$

sodass folgt:

$$v'^2 U - u'^2 V = a(u'^2 + v'^2).$$

oder:

$$u'^2(V+a) = v'^2(U-a)$$

oder auch:

$$\frac{u'}{\sqrt{U-a}} = \frac{v'}{\sqrt{V+a}}.$$

Da links nur u und u' und rechts nur v und v' auftritt, so folgt hieraus durch Quadraturen:

$$\int \frac{du}{\sqrt{U-a}} - \int \frac{dv}{\sqrt{V+a}} = b \qquad (b = \text{Const.}) \tag{14}$$

Hat man die Quadraturen ausgeführt, so ergiebt sich eine Gleichung zwischen u, v und den beiden willkürlichen Constanten a, b. Sie gilt für alle geodätischen Curven der Fläche, deren Bogenelement-Quadrat die Form (8) hat, und stellt demnach die ∞^2 geodätischen Curven der Fläche dar.

Da die Parametercurven (u) und (v) zu einander orthogonal sind, so hat der vorhin benutzte Hülfswinkel α eine einfache geometrische Bedeutung. Es ist nämlich, wenn der Punkt (u, v) zum unendlich benachbarten Punkte ($u + du$, $v + dv$) oder ($u + u'dt$, $v + v'dt$) auf einer geodätischen Curve fortschreitet, der Cosinus des Winkels dieser Fortschreitungsrichtung mit der Fortschreitungsrichtung längs der Parametercurve (v) nach (9) und Satz 10, S. 32, gleich:

$$\frac{u'}{\sqrt{u'^2 + v'^2}}$$

da jetzt in jenem Satze $k = v' : u'$ und $\varkappa = 0$ zu setzen ist. Die Tangente dieses Winkels ist also gleich $\pm v' : u'$, sodass der durch (12) eingeführte Winkel α einer derjenigen Winkel ist, den die geodätische Curve im Punkte (u, v) mit der hindurchgehenden Parametercurve (v) bildet.

Ist die Fläche insbesondere die **Rotationsfläche** (vgl. S. 41):

$$x = p(u)\cos v, \qquad y = p(u)\sin v, \qquad z = q(u)$$

mit der Bogenlänge u auf den Meridianen, sodass

$$ds^2 = p^2\left(\frac{du^2}{p^2} + dv^2\right)$$

ist oder, wenn

$$\int \frac{du}{p} \quad \text{und} \quad v$$

als neue Parameter $\bar{u}$ und $\bar{v}$ benutzt werden, wobei

$$ds^2 = p^2(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2)$$

wird und p^2 eine Function von $\bar{u}$ allein ist, so giebt die Vergleichung mit (8), dass jetzt $\bar{u}$ und $\bar{v}$ statt u und v und ausserdem $U = p^2$, $V = 0$ zu setzen ist, somit statt (13) kommt:

$$p^2 \sin^2 \alpha = a\,.$$

Die auf S. 412 aufgestellte Formel (14) ist also nur ein specieller Fall der jetzigen Formel (13). Der damals formulierte Satz 6 ist mithin einer Verallgemeinerung auf beliebige solche Flächen fähig, deren ds^2 auf die Form (8) gebracht werden kann; diese Verallgemeinerung ist eben die Formel (13).

Unser Ergebnis wollen wir so zusammenfassen:

Satz 11:[1] Kann das Quadrat des Bogenelementes einer Fläche auf die Form:

$$ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2)$$

gebracht werden, wo U eine Function von u allein und V eine Function von v allein ist, so liefert die Ausführung der Quadraturen in:

$$\int \frac{du}{\sqrt{U - a}} - \int \frac{dv}{\sqrt{V + a}} = b \qquad (a, b = \text{Const.})$$

die Gleichung der ∞^2 geodätischen Curven der Fläche.

Wir wollen jetzt wieder das Problem der geodätischen Abbildung aufnehmen, indem wir die allgemeinen Ergebnisse des Satzes 10 benutzen und uns fragen, welche Flächen sich geodätisch auf die Ebene abbilden lassen.

Zunächst selbstverständlich die auf die Ebene verbiegbaren Flächen, d. h. die sogenannten abwickelbaren Flächen. Durch ähnliche Vergrösserung gewinnen wir aus ihnen keine neuen Flächen.

Um diese trivialen Fälle auszuschliessen, fragen wir daher:

Welche nicht-abwickelbaren Flächen lassen sich geodätisch auf die Ebene abbilden?

Wenn wir wie in Satz 10 zunächst von dem bei reeller Abbildung nie vorkommenden Fall absehen, dass gerade und nur der einen Schar von Minimalgeraden der Ebene eine Schar von Minimalcurven auf der Fläche entsprechen, so bleibt nach Satz 10 nur noch die Annahme übrig, dass das Quadrat des Bogenelementes in der Ebene auf die Form

$$ds^2 = (U + V)(du^2 + dv^2) \tag{15}$$

[1] Satz von Liouville, vgl. die 2. Anm. zu S. 420.

und auf der gesuchten Fläche auf die Form:

$$(16) \qquad d\bar{s}^2 = -\left(\frac{1}{U} + \frac{1}{V}\right)\left(\frac{du^2}{U} - \frac{dv^2}{V}\right)$$

gebracht werden kann. Dass das Erstere möglich ist, folgt daraus, dass die Ebene zu den vorhin angeführten besonderen Flächenarten gehört.

Wir haben nun, um die fraglichen Flächen zu bestimmen, die für die Ebene und die auf sie abwickelbaren Flächen charakteristische Eigenschaft zu benutzen, dass ihr Krümmungsmaass $K = 0$ ist (nach Satz 90, S. 214). Das Krümmungsmaass lässt sich aus den Fundamentalgrössen erster Ordnung, die aus (15) folgen:

$$E = U + V, \quad F = 0, \quad G = U + V$$

nach XVII (B) leicht berechnen, da U nur von u und V nur von v abhängt. Es kommt:

$$(17) \qquad K = \frac{1}{2(U+V)^3}\left[U'^2 + V'^2 - (U+V)(U'' + V'')\right].$$

Da sich übrigens das Bogenelement-Quadrat (16) durch Einführung der neuen Parameter

$$\int \frac{du}{\sqrt{U}} = \bar{u}, \quad \int \frac{dv}{\sqrt{V}} = i\bar{v},$$

wie schon auf S. 421 erwähnt wurde, auf die zu (15) analoge Form:

$$d\bar{s}^2 = (\bar{U} + \bar{V})(d\bar{u}^2 + d\bar{v}^2)$$

bringen lässt, wo

$$\bar{U} = -\frac{1}{U}, \quad \bar{V} = -\frac{1}{V}$$

ist, so ist analog (17) das Krümmungsmaass der zu (16) gehörigen Fläche:

$$\bar{K} = \frac{1}{2(\bar{U}+\bar{V})^3}\left[\bar{U}'^2 + \bar{V}'^2 - (\bar{U}+\bar{V})(\bar{U}'' + \bar{V}'')\right].$$

Führen wir hierin wieder die Parameter u und v ein, so kommt, weil

$$\frac{du}{d\bar{u}} = \sqrt{U}, \quad \frac{dv}{d\bar{v}} = i\sqrt{V}$$

ist:

$$(18) \qquad \bar{K} = \frac{1}{2(U+V)^3}\left[\tfrac{1}{2}(3U+V)V^2U'^2 - \tfrac{1}{2}(U+3V)U^2V'^2 + {} \right.$$
$$\left. {} + UV(U+V)(UV'' - VU'')\right].$$

Weil nun, wie gesagt, $K = 0$ sein muss, so folgt aus (17), dass

$$(19) \qquad U'^2 - UU'' - (UV'' + VU'') + V'^2 - VV'' = 0$$

sein muss. Wir werden also versuchen, die Functionen U von u und V von v in allgemeinster Weise so zu bestimmen, dass sie für alle Werte von u und v der Bedingung (19) genügen, aus der durch successive Differentiation nach u und v sofort noch folgt:

$$U' V''' + V' U''' = 0 .$$

Da U und V keine Constanten sind, weil sonst $\bar{K}$ nach (18) gleich Null, die gesuchte Fläche daher gegen die Voraussetzung abwickelbar wäre (nach Satz 90, S. 214), so können wir hierfür schreiben:

$$\frac{V'''}{V'} = - \frac{U'''}{U'}, \tag{20}$$

es sei denn, dass etwa nur $U =$ Const., aber $V \neq$ Const. wäre. Erledigen wir daher vorerst die Annahme:

$$U = a, \quad V' \neq 0 \quad (a = \text{Const.}).$$

In diesem Falle giebt (19):

$$- a V'' + V'^2 - V V'' = 0,$$

woraus folgt, dass die Function $\varphi = V + a$ von v allein die Bedingung:

$$\varphi'^2 - \varphi \varphi'' = 0$$

oder:

$$\frac{d^2 \log \varphi}{d v^2} = 0$$

erfüllt, $\log \varphi$ also linear in v oder φ von der Form:

$$\varphi = b e^{cv} \quad (b, c = \text{Const.})$$

ist, sodass kommt:

$$U = a, \quad V = \varphi - a = b e^{cv} - a. \tag{21}$$

Setzen wir diese Werte in (18) ein, so ergiebt sich für K ein constanter Wert. In diesem Falle also ist die fragliche Fläche von constanter Krümmung. Im Falle $U' \neq 0$, $V =$ Const. ergiebt sich dasselbe.

Dasselbe ergiebt sich nun aber auch im allgemeinen Falle, in dem (20) gilt und weder U' noch V' gleich Null ist. Denn in diesem Falle lassen sich die Formen von U und V so finden: Da in (20) links nur v, rechts nur u auftritt, so sind beide Seiten ein und derselben Constanten gleich, die wir mit c^2 bezeichnen wollen. Alsdann haben wir:

$$U''' = - c^2 U', \quad V''' = c^2 V'$$

oder:

$$\frac{d^2 U'}{du^2} = -c^2 U', \quad \frac{d^2 V'}{dv^2} = c^2 V'.$$

Die Functionen U' von u und V' von v haben also die Eigenschaft, dass sie mit ihren zweiten Differentialquotienten bis auf einen constanten Factor $-c^2$ bez. c^2 übereinstimmen. Eine solche Erscheinung lag vor kurzem auf S. 413 vor, und wie dort benutzen wir auch hier das Ergebnis in I S. 98, 99, wo es sich in (6) um eine Function x von s handelte, deren zweiter Differentialquotient gleich $-Kx$ ($K =$ Const.) war, und von der wir sahen, dass sie die Form (8) haben muss. Indem wir für s jetzt u bez. v, für x jetzt U' bez. V' und für K jetzt c^2 bez. $-c^2$ setzen, erhalten wir also:

$$U' = \text{Const.} \cos\ cu + \text{Const.} \sin\ cu,$$

$$V' = \text{Const.} \cos icu + \text{Const.} \sin icu,$$

sobald $c \neq 0$ ist, woraus durch Integration folgt:

$$(22) \quad \begin{cases} U = a_1 \cos\ cu + b_1 \sin\ cu + m_1, \\ V = a_2 \cos icv + b_2 \sin icv + m_2, \end{cases}$$

wo a_1, b_1, a_2, b_2, c, m_1 und m_2 Constanten sind. Setzen wir diese Werte in (19) ein, so kommt:

$$(m_1 + m_2)(a_1 \cos cu + b_1 \sin cu - a_2 \cos icv - b_2 \sin icv) + \\ + a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2 = 0.$$

Wäre $m_1 + m_2 \neq 0$, so müsste $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$, also $U' = V' = 0$ sein, was gegen die Voraussetzung ist. Mithin kommt:

$$m_1 + m_2 = 0, \quad a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2.$$

Diese Bedingungen erfüllen wir, indem wir neue Constanten m, n, α, β einführen und setzen:

$$m_1 = m, \quad a_1 = n \cos\ \alpha, \quad b_1 = n \sin\ \alpha,$$

$$m_2 = -m, \quad a_2 = n \cos i\beta, \quad b_2 = n \sin i\beta,$$

sodass (22) giebt:

$$(23) \quad \begin{cases} U = n \cos\ (cu - \alpha) + m, \\ V = n \cos i(cv - \beta) - m \end{cases} \qquad (m, n, \alpha, \beta, c = \text{Const.}).$$

Setzen wir diese Werte in (18) ein, so ergiebt sich für $\bar{K}$ eine Constante, d. h. die fraglichen Flächen haben **constante Krümmung**.

Im Falle $c = 0$, der analog und leicht zu erledigen ist, ergiebt sich dies ebenfalls.

Oben sahen wir schon in Satz 9, dass es auf jeder Fläche constanter Krümmung solche Parameter u, v giebt, in denen sich die geodätischen Curven durch die allgemeine lineare Gleichung in u und v darstellen, was — wenn u und v als rechtwinklige Punktcoordinaten in der Ebene gedeutet werden — darauf hinaus kommt, dass sich die Flächen constanter Krümmung so auf die Ebene abbilden lassen, dass jeder geodätischen Curve eine Gerade in der Ebene entspricht. Unsere letzten Betrachtungen gestatten uns nun, diesen Satz umzukehren und zwar, da die abwickelbaren Flächen die constante Krümmung Null haben, in dieser Weise:

Satz 12:[1] Die Flächen constanter Krümmung und nur diese Flächen lassen sich geodätisch auf die Ebene abbilden.

Wir haben in diesem Satze gar nicht erwähnt, dass wir die im reellen Falle allerdings nie eintretende Möglichkeit ausgeschlossen hatten, dass die eine und nur die eine Schar von Minimalgeraden der Ebene als eine Schar von Minimalcurven abgebildet werde. Es lässt sich nämlich zeigen, dass auch in diesem Falle nur Flächen constanter Krümmung, nämlich abwickelbare Flächen hervorgehen. In der That: Führen wir in der xy-Ebene die Grössen $x + iy$ und $x - iy$ als Parameter u, v ein, so ist

$$ds^2 = du\,dv$$

das Quadrat ihres Bogenelementes. Benutzen wir auf der Fläche, die auf die Ebene abgebildet werden soll, die den Minimalgeraden (u) und (v) der Ebene entsprechenden Curven als Parameterlinien, so sei

$$d\bar{s}^2 = \bar{E}\,du^2 + 2\bar{F}\,du\,dv + \bar{G}\,dv^2$$

das Quadrat ihres Bogenelementes, während bei der Ebene $E = G = 0$, $F = \frac{1}{2}$ ist. Da nur den Minimalgeraden der einen Schar, etwa den Geraden (u), Minimalcurven auf der Fläche entsprechen sollen, so muss $d\bar{s}^2$ für $du = 0$ auch verschwinden, d. h. es ist $\bar{G} = 0$. Da-

[1] Das Problem der geodätischen Abbildung einer Fläche auf die Ebene wurde von Beltrami gestellt und gelöst. Siehe seine Abhandlung: „Risoluzione del problema: Riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche vengano rappresentate da linee rette“, Annali di Matem. t. VII (1866). Am Schlusse dieser Arbeit warf Beltrami die Frage nach der geodätischen Abbildung einer Fläche auf eine andere Fläche auf, eine Frage, die, wie wir in der 1. Anm. zu S. 420 schon angaben, alsdann von Dini 1869 beantwortet wurde.

gegen ist $\bar{E} \neq 0$, $\bar{F} \neq 0$ anzunehmen, weil die Fläche sonst abwickelbar wäre. Nach Satz 4, S. 407, ist wegen $E = G = 0$, $F = \frac{1}{2}$ jetzt

$$v'u'' - u'v'' = 0$$

die Differentialgleichung der geodätischen Curven in der Ebene, und, da $\bar{G} = 0$ ist:

$$\bar{F}^2(v'u'' - u'v'') + [\bar{E}(\bar{F}_u - \tfrac{1}{2}\bar{E}_v) - \tfrac{1}{2}\bar{F}\bar{E}_u]u'^3 + \\ + \bar{F}(\bar{F}_u - \tfrac{3}{2}\bar{E}_v)u'^2v' - \bar{F}\bar{F}_v u'v'^2 = 0$$

die Differentialgleichung der geodätischen Curven auf der Fläche. Soll die Abbildung geodätisch sein, so müssen beide Differentialgleichungen übereinstimmen. Hieraus folgt zunächst wegen des letzten Gliedes, dass $\bar{F}$ nur u enthalten darf, und dann weiterhin, dass

$$\bar{E}(\bar{F}' - \tfrac{1}{2}\bar{E}_v) - \tfrac{1}{2}\bar{F}\bar{E}_u = 0, \qquad \bar{F}' = \tfrac{3}{2}\bar{E}_v$$

sein muss. Da $\bar{F}$ nur u enthält und $\bar{G} = 0$ ist, so ergiebt sich als Krümmungsmaass $\bar{K}$ der Fläche nach XVII (B):

$$\bar{K} = \frac{\bar{E}_{vv}}{2\bar{F}^2}.$$

Soeben aber ergab sich, dass $\bar{E}_v$ nur von u abhängt, sodass $\bar{K} = 0$, die Fläche also, wie behauptet wurde, abwickelbar sein muss (vgl. Satz 90, S. 214).

Daher durften wir unser Ergebnis in der Form des obigen Satzes 12 ohne Einschränkung aussprechen.

Es ist nicht ohne Interesse, die in (23) gewonnenen besonderen Formen von U und V in das Bogenelement-Quadrat (15) der Ebene einzusetzen und zu untersuchen, was für Curven in der Ebene die Parameterlinien (u) und (v) sind; wir gehen darauf nicht ein. Wir begnügen uns vielmehr damit, dass wir auf S. 413—415 die geodätische Abbildung einer Rotationsfläche von constanter Krümmung auf die Ebene direct ausgeführt haben.

1. Beispiel: Die Kugel wird dadurch, dass man sie von ihrer Mitte aus perspectiv auf eine Ebene projiciert, augenscheinlich geodätisch auf die Ebene abgebildet. Man könnte also geographische Karten herstellen, auf denen die grössten Kreise der Kugel als Geraden erscheinen, doch würden sie starke Verzerrungen aufweisen.

2. Beispiel: Die allgemeinste geodätische Abbildung der Ebene auf die Ebene, d. h. die allgemeinste Abbildung, bei der jeder Geraden der einen Ebene eine Gerade in der anderen Ebene entspricht, kann man in verschiedenen Weisen bestimmen, so z. B. rein geometrisch. Man erkennt dann, dass sie erzielt wird, wenn man die Ebenen in passende Lagen gegen einander bringt und nun von einem passenden Centrum aus die eine Ebene

perspectiv auf die andere Ebene projiciert. Man nennt deshalb auch die geodätische Abbildung einer Ebene auf eine andere Ebene eine projective Abbildung. Will man sie aber analytisch bestimmen, so kann man so verfahren:[1] Sind u, v in der einen Ebene rechtwinklige Coordinaten und fasst man längs einer Curve v als Function von u auf, so ist

$$\frac{d^2 v}{d u^2} = 0 \tag{24}$$

die Differentialgleichung der geodätischen Curven, d. i. der Geraden, da sie ja aussagt, dass v linear und ganz in u ist. Ist nun derjenige Punkt der zweiten Ebene, der dem Punkte (u, v) der ersten entspricht, mit denselben Parametern versehen, so seien:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = 0 \tag{25}$$

die Gleichungen der zweiten Ebene. Hier ist

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = 0 \tag{26}$$

die Differentialgleichung der geodätischen Curven (Geraden), da sie ja aussagt, dass y linear und ganz in x ist. Aber x und y sind die durch (25) definierten Functionen von u und v. Nach (25) ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}} = \frac{\psi_u + \psi_v v'}{\varphi_u + \varphi_v v'},$$

wenn wir auch auf der zweiten Ebene längs der geodätischen Curven (Geraden) u als Parameter benutzen und der Strich die Differentiation nach u andeutet. Weiter folgt hieraus:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{d \frac{dy}{dx}}{du} : \frac{dx}{du} = \frac{1}{\varphi_u + \varphi_v v'} \cdot \frac{d \frac{\psi_u + \psi_v v'}{\varphi_u + \varphi_v v'}}{du}.$$

Führen wir die letzte Differentiation aus, indem wir immer dabei v als Function von u betrachten, so finden wir, dass die Differentialgleichung (26) der geodätischen Curven (Geraden) der zweiten Ebene die Form hat:

$$\begin{gathered}(\psi_{uu} + 2\psi_{uv} v' + \psi_{vv} v'^2 + \psi_v v'')(\varphi_u + \varphi_v v') - \\ - (\varphi_{uu} + 2\varphi_{uv} v' + \varphi_{vv} v'^2 + \varphi_v v'')(\psi_u + \psi_v v') = 0.\end{gathered}$$

Soll die Abbildung geodätisch sein, so muss sich diese Gleichung auf die Gleichung (24) oder $v'' = 0$ reducieren. Dies führt auf die vier Bedingungen — indem die Coefficienten von v'^3, v'^2, v' und das von v' freie Glied einzeln gleich Null sein müssen:

$$\left\{\begin{aligned} &\psi_{uu}\varphi_u - \varphi_{uu}\psi_u = 0, \\ &\psi_{uu}\varphi_v - \varphi_{uu}\psi_v + 2\psi_{uv}\varphi_u - 2\varphi_{uv}\psi_u = 0, \\ &\psi_{vv}\varphi_u - \varphi_{vv}\psi_u + 2\psi_{uv}\varphi_v - 2\varphi_{uv}\psi_v = 0, \\ &\psi_{vv}\varphi_v - \varphi_{vv}\psi_v = 0, \end{aligned}\right. \tag{27}$$

[1] Wir wenden hier dieselbe Methode an, die wir in dem in der Anm. zu I S. 346 erwähnten Werke benutzt haben.

und zwar ist zu verlangen, dass diese Gleichungen für alle Werte von u und v richtig seien. Die erste und letzte Gleichung geben:

$$\frac{\partial \log \psi_u}{\partial u} = \frac{\partial \log \varphi_u}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \log \psi_v}{\partial u} = \frac{\partial \log \varphi_v}{\partial u},$$

sodass $\psi_u : \varphi_u$ eine Function V von v allein und $\psi_v : \varphi_v$ eine Function von u allein sein muss, woraus folgt:

$$\psi_u = V \varphi_u, \quad \psi_v = U \varphi_v. \tag{28}$$

Setzen wir diese Werte in die beiden mittleren Gleichungen (27) ein, so kommt:

$$(U - V)\varphi_{uu}\varphi_v - 2V'\varphi_u^2 = 0, \quad (U - V)\varphi_{vv}\varphi_u + 2U'\varphi_v^2 = 0. \tag{29}$$

Ferner ergiebt sich, wenn wir aus jeder der Gleichungen (28) den Wert von ψ_{uv} berechnen und beide einander gleich setzen:

$$(U - V)\varphi_{uv} - V'\varphi_u + U'\varphi_v = 0. \tag{30}$$

Die erste Gleichung (29) giebt partiell nach u differenziert:

$$U'\varphi_{uu}\varphi_v + (U - V)(\varphi_{uuu}\varphi_v + \varphi_{uu}\varphi_{uv}) - 4V'\varphi_u\varphi_{uu} = 0$$

oder, wenn hierin die Werte von φ_{uu}, φ_{uv} und φ_{vv} aus (29) und (30) eingesetzt werden:

$$\varphi_{uuu} = \frac{6V'^2}{(U - V)^2}\,\frac{\varphi_u^3}{\varphi_v^2}.$$

Hieraus folgt, wenn wir für φ_v den aus der ersten Gleichung (29) folgenden Wert einsetzen:

$$3\varphi_{uu}^2 - 2\varphi_u\varphi_{uuu} = 0,$$

was nach Satz 40, S. 78, aussagt, dass φ in u linear gebrochen sein muss. Da die Gleichungen (27) nur unter einander vertauscht werden, wenn u mit v vertauscht wird, so folgt, dass φ auch in v linear gebrochen sein muss. Also kommt:

$$\varphi = \frac{a_1 + b_1 u + c_1 v + d_1 uv}{\alpha + \beta u + \gamma v + \delta uv},$$

wo a_1, b_1, c_1, d_1 und α, β, γ, δ Constanten sind. Aus der Symmetrie der Formeln (27) folgt, dass ψ dieselbe allgemeine Form hat und aus (28), dass wir die Nenner in φ und ψ einander gleich annehmen dürfen, sodass kommt:

$$\psi = \frac{a_2 + b_2 u + c_2 v + d_2 uv}{\alpha + \beta u + \gamma v + \delta uv},$$

wo a_2, b_2, c_2, d_2 Constanten sind. Setzen wir diese Werte von φ und ψ in die beiden mittleren Gleichungen (27) ein, so folgt sofort $d_1 = d_2 = \delta = 0$, sodass bleibt:

$$\varphi = \frac{a_1 + b_1 u + c_1 v}{\alpha + \beta u + \gamma v}, \quad \psi = \frac{a_2 + b_2 u + c_2 v}{\alpha + \beta u + \gamma v}.$$

Diese Werte erfüllen alle vier Gleichungen (27). Somit haben wir den

Satz 13: Sind u, v rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene, x, y rechtwinklige Coordinaten in einer zweiten Ebene, so wird die allgemeinste punktweise Abbildung der einen Ebene auf die

andere, bei der jeder Geraden der einen Ebene eine Gerade der anderen entspricht, durch zwei Gleichungen von der Form:

$$x = \frac{a_1 + b_1 u + c_1 v}{\alpha + \beta u + \gamma v}, \quad y = \frac{a_2 + b_2 u + c_2 v}{\alpha + \beta u + \gamma v}$$

gegeben, in denen $a_1, b_1, c_1;\ a_2, b_2, c_2;\ \alpha, \beta, \gamma$ Constanten sind und die beiden Nenner übereinstimmen.

Dies ist also die allgemeinste projective Abbildung einer Ebene auf eine andere Ebene.

§ 3. Orthogonale Trajectorien geodätischer Curven.

Mit Hülfe der geodätischen Curven lassen sich solche besondere Parameter auf der Fläche einführen, mittels deren manche flächentheoretische Probleme besonders bequem behandelt werden können. Nun ist es, wie schon hervorgehoben wurde (vgl. S. 411), allerdings im allgemeinen unmöglich, die geodätischen Curven auf einer gegebenen Fläche zu bestimmen, aber für viele Probleme genügt es zu wissen, dass sie überhaupt vorhanden sind, ohne dass es darauf ankommt, sie wirklich in endlicher Form dargestellt vor sich zu haben.

Wir nehmen an, es sei uns auf einer Fläche mit den Parametern u, v und dem Quadrate des Bogenelementes

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2$$

eine Schar von ∞^1 geodätischen Curven bekannt, die durch eine Gleichung

$$\mu(u, v) = \text{Const.}$$

zwischen u und v definiert sei. Dieser Fall tritt bei manchen Flächen ein, so sind z. B. auf einer Rotationsfläche die ∞^1 Meridiane augenscheinlich geodätische Curven, da sie eben sind und ihre Hauptnormalen also in ihren Ebenen liegen. Liegt eine geradlinige Fläche vor, so sind die Geraden der Fläche solche bekannte ∞^1 geodätische Curven, u. s. w.

Längs der nach Voraussetzung bekannten geodätischen Curven $\mu = \text{Const.}$ mögen die Incremente der Parameter u, v mit δu und δv bezeichnet sein. Dann ist

$$\mu_u \delta u + \mu_v \delta v = 0$$

oder:

$$\frac{\delta v}{\delta u} = -\frac{\mu_u}{\mu_v}. \tag{1}$$

Die zu diesen ∞^1 geodätischen Curven **orthogonalen Trajectorien** haben also überall solche Fortschreitungsrichtungen $(dv:du)$, für die unter der Voraussetzung, dass die Fläche keine Tangentenfläche einer Minimalcurve sei, nach Satz 11, S. 33:

$$E + F\left(\frac{dv}{du} - \frac{\mu_u}{\mu_v}\right) - G\frac{dv}{du}\frac{\mu_u}{\mu_v} = 0$$

oder:

$$(2) \qquad (E\mu_v - F\mu_u)\,du + (F\mu_v - G\mu_u)\,dv = 0$$

ist. Es ist dies die Differentialgleichung erster Ordnung für die orthogonalen Trajectorien. Ist $\lambda(u, v)$ ein Integral dieser Gleichung (vgl. I S. 90), so ist

$$\lambda(u, v) = \text{Const.}$$

die endliche Gleichung der ∞^1 orthogonalen Trajectorien der ∞^1 geodätischen Curven $\mu = \text{Const.}$

Wenn die geodätischen Curven $\mu = \text{Const.}$, wie wir voraussetzen wollen, **keine** Minimalcurven sind, so fällt die Schar $\lambda = \text{Const.}$ nicht mit ihnen zusammen, sodass λ und μ von einander unabhängige Functionen von u und v sind (vgl. I S. 82, 83) und daher als neue Parameter benutzt werden können.

Jetzt wollen wir annehmen, in den Gleichungen:

$$(3) \qquad x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v)$$

der Fläche seien u und v schon diese neuen Parameter, d. h. es seien die Parameterlinien (v) geodätische Curven, aber keine Minimalcurven, und die Parameterlinien (u) ihre orthogonalen Trajectorien. Nach Satz 13, S. 34, ist dann die Fundamentalgrösse $F = 0$. Ausserdem sind die geodätischen Curven (v) in der Form $u = t$, $v = \text{Const.}$ darstellbar, sodass für sie $u' = 1$, $u'' = 0$, $v' = 0$, $v'' = 0$ ist und daher nach Satz 4, S. 407, auch $EE_v = 0$ sein muss. Da die Curven (v) keine Minimalcurven sind, so ist $E \neq 0$, und daher ergiebt sich, dass E eine von Null verschiedene Function von u allein sein muss. Also ist **jetzt**:

$$(4) \qquad ds^2 = E(u)\,du^2 + G(u, v)\,dv^2.$$

Wir wollen die Bogenlänge s der geodätischen Curve (v) berechnen, etwa gemessen von der Trajectorie $(u = 0)$ an bis zu einer beliebigen Trajectorie (u). Längs der Curve (v) ist $dv = 0$, also $ds = \sqrt{E}\,du$, sodass für die Bogenlänge der Wert kommt:

$$(5) \qquad s = \int_0^u \sqrt{E}\,du\,.$$

Da E von v frei ist, so ergiebt sich derselbe Wert auf jeder geodätischen Curve (v), also:

Satz 14[1]: Zwei orthogonale Trajectorien einer Schar von ∞^1 geodätischen Curven auf einer Fläche, die keine Tangentenfläche einer Minimalcurve ist, schneiden auf allen diesen geodätischen Curven dieselbe Bogenlänge ab, vorausgesetzt, dass die geodätischen Curven keine Minimalcurven sind.

Dieser Satz ist die Verallgemeinerung des Satzes 40, I S. 64, über Parallelcurven in der Ebene, denn in der Ebene sind ja die Geraden die geodätischen Curven. Man nennt daher die ∞^1 orthogonalen Trajectorien von ∞^1 geodätischen Curven eine Schar von Parallelcurven auf der Fläche.

Nachdem wir diesen Satz gewonnen haben, wollen wir noch einmal zu der vorhergehenden Betrachtung zurückgehen und die Frage, wie man die Differentialgleichung (2) der orthogonalen Trajectorien $\lambda =$ Const. einer Schar von ∞^1 gegebenen geodätischen Curven $\mu =$ Const. integriert, näher erörtern. Unser Satz 14 wird uns nämlich dabei helfen.

Angenommen, es seien $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \ldots$ eine Schar von ∞^1 gegebenen geodätischen Curven. Ferner seien c und c' zwei unendlich benachbarte orthogonale Trajectorien dieser Schar. (Siehe Fig. 78.)

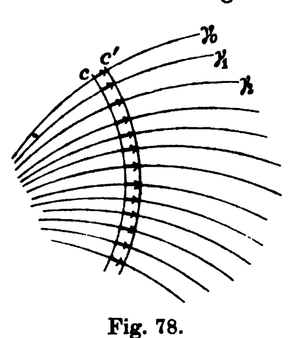


Fig. 78.

Nach Satz 14 schneiden sie auf allen Curven γ denselben unendlich kleinen Bogen δs ab.

Aus einer orthogonalen Trajectorie c können wir daher leicht eine unendlich benachbarte c' ableiten: Wir construieren in allen Punkten von c die zu den Tangenten von c senkrechten Tangenten der Fläche, d. h. die Tangenten der Curven γ, und tragen auf ihnen dieselbe unendlich kleine Strecke δs ab. Der Ort der Endpunkte ist die Curve c'.

Dies wollen wir analytisch verfolgen: Im Punkte (u, v) der Curve c hat die Tangente der Curve γ die durch (1) bestimmte

[1] Satz von Gauss, der überhaupt in seinen „Disquisitiones“ (siehe die Anm. zu S. 5) eingehende Untersuchungen über die geodätischen Curven auf einer Fläche angestellt hat, wie sie bis dahin (1828) von keiner Seite versucht worden waren.

Fortschreitungsrichtung $(\delta v : \delta u)$, und es soll die Strecke δs auf diese Tangente aufgetragen werden, d. h. es soll sein:

$$E\,\delta u^2 + 2\,F\,\delta u\,\delta v + G\,\delta v^2 = \delta s^2.$$

Hieraus und aus (1) folgt:

$$(6)\quad \delta u = \frac{\mu_v\,\delta s}{\sqrt{E\mu_v^2 - 2\,F\mu_u\mu_v + G\mu_u^2}}, \qquad \delta v = \frac{-\mu_u\,\delta s}{\sqrt{E\mu_v^2 - 2\,F\mu_u\mu_v + G\mu_u^2}},$$

wo in beiden Formeln für die Quadratwurzel derselbe Wert zu nehmen ist.

Die Differentialgleichung (2) der orthogonalen Trajectorien der geodätischen Curven $\mu =$ Const. hat demnach die Eigenschaft, dass jede ihrer Integralcurven $\lambda(u, v) = c$ in eine unendlich benachbarte Integralcurve übergeht, sobald man u und v die Incremente (6) erteilt, wenn δs längs der ganzen Curve dieselbe unendlich kleine Grösse bedeutet. Nach Satz 62, I S. 93, können wir daher einen Multiplicator der Differentialgleichung (2) angeben und diese Gleichung folglich durch eine Quadratur integrieren.

Ja noch mehr: Die Differentialgleichung (2) und die Werte (6) enthalten μ_u und μ_v nur in ihrem Verhältnis. Wir brauchen also μ gar nicht zu kennen, sondern nur $\mu_v : \mu_u$ als Function von u und v.

Wir brauchen also nach (1) nur die Fortschreitungsrichtungen $(\delta v : \delta u)$ längs der geodätischen Curven $\mu =$ Const. zu kennen. Dies aber ist der Fall, wenn die ∞^1 geodätischen Curven nicht durch ihre endliche Gleichung $\mu =$ Const., sondern durch ihre Differentialgleichung

$$\alpha(u, v)\,du + \beta(u, v)\,dv = 0$$

gegeben sind, weil dann

$$\frac{\delta v}{\delta u} = -\frac{\alpha}{\beta},$$

also nach (1) auch $\mu_u : \mu_v = \alpha : \beta$ ist. Ersetzen wir dann μ_u und μ_v in (2) und (6) durch α und β, so liegt in (2) die Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien und in (6) eine solche unendlich kleine Ortsänderung vor, die jede dieser Trajectorien wieder in eine Trajectorie überführt, sodass der citierte Satz des ersten Bandes ergiebt:

Satz 15: Kennt man die Differentialgleichung erster Ordnung einer Schar von ∞^1 geodätischen Curven auf einer Fläche, so verlangt die Bestimmung der orthogonalen Trajectorien dieser Schar nur eine Quadratur.

Wir wollen zeigen, wie man die Rechnung durchführen kann. Dabei wollen wir bei der früheren Voraussetzung bleiben, dass die Schar der ∞^1 geodätischen Curven durch ihre endliche Gleichung $\mu =$ Const. gegeben sei. Ist dies nicht der Fall, liegt vielmehr nur ihre Differentialgleichung $\alpha\, du + \beta\, dv = 0$ vor, so ersetze man in dem Folgenden einfach μ_u und μ_v durch α und β. Wenn man will, kann man übrigens die Gleichungen (6) mit Hülfe des Differentialparameters erster Ordnung von μ nach XX ($\varDelta$) so schreiben:

$$(7) \qquad \delta u = \frac{\mu_v}{D\sqrt{\varDelta_{\mu\mu}}}\,\delta s, \qquad \delta v = -\frac{\mu_u}{D\sqrt{\varDelta_{\mu\mu}}}\,\delta s,$$

wo natürlich $D = \sqrt{EG - F^2}$ sein soll.

Soll nun $\lambda(u, v)$ ein Integral der Differentialgleichung (2) sein, so muss sich (2) mit

$$\lambda_u\, du + \lambda_v\, dv = 0$$

decken, woraus folgt:

$$(8) \qquad (F\mu_v - G\mu_u)\lambda_u - (E\mu_v - F\mu_u)\lambda_v = 0.$$

Ferner muss aus jeder Curve

$$\lambda(u, v) = c$$

durch Ausübung der in (6) oder (7) angegebenen Änderung wieder eine Integralcurve

$$\lambda(u + \delta u, v + \delta v) = \text{Const.}$$

hervorgehen, d. h. es muss

$$\lambda(u, v) + \lambda_u\, \delta u + \lambda_v\, \delta v$$

oder also

$$\lambda_u \frac{\delta u}{\delta s} + \lambda_v \frac{\delta v}{\delta s}$$

nach I S. 83 eine Function von λ sein. Also fordern wir noch

$$\lambda_u \frac{\delta u}{\delta s} + \lambda_v \frac{\delta v}{\delta s} = \omega(\lambda)$$

oder, wenn wir hierin die Werte (6) einsetzen:

$$(9) \qquad \frac{\mu_v \lambda_u - \mu_u \lambda_v}{\sqrt{E\mu_v^2 - 2F\mu_u\mu_v + G\mu_u^2}} = \omega(\lambda).$$

Übrigens ist $\omega(\lambda)$ nicht etwa gleich Null, weil sonst aus (8) und (9) folgen würde:

$$E\mu_v^2 - 2F\mu_u\mu_v + G\mu_u^2 = 0,$$

was aussagen würde, dass die Curven $\mu = \text{Const.}$ gegen die Voraussetzung Minimalcurven wären, nach Satz 47, S. 385.

Die Integralcurven $\lambda = \text{Const.}$ kann man nun auch durch irgend eine Gleichung von der Form:

$$\varphi(u, v) = \text{Const.}$$

darstellen, sobald nur φ eine Function von λ allein ist:

$$\varphi = \Omega(\lambda).$$

Dann ist:

$$\varphi_u = \Omega' \lambda_u, \quad \varphi_v = \Omega' \lambda_v.$$

Setzen wir die hieraus folgenden Werte:

$$\lambda_u = \frac{\varphi_u}{\Omega'}, \quad \lambda_v = \frac{\varphi_v}{\Omega'}$$

in (8) und (9) ein, so kommt:

$$(F\mu_v - G\mu_u)\varphi_u - (E\mu_v - F\mu_u)\varphi_v = 0,$$

$$\frac{\mu_v\varphi_u - \mu_u\varphi_v}{\sqrt{E\mu_v^2 - 2F\mu_u\mu_v + G\mu_u^2}} = \omega(\lambda)\,\Omega'(\lambda).$$

Wenn wir also:

$$\Omega'(\lambda) = \frac{1}{\omega(\lambda)}, \quad \text{d. h.} \quad \Omega = \int \frac{d\lambda}{\omega(\lambda)}$$

annehmen, was wir thun dürfen, da $\omega \neq 0$ ist, so erkennen wir:

Die Integralcurven der Differentialgleichung (2) lassen sich in einer solchen Form

$$\varphi(u, v) = \text{Const.}$$

schreiben, dass:

$$(F\mu_v - G\mu_u)\varphi_u - (E\mu_v - F\mu_u)\varphi_v = 0,$$

$$\frac{\mu_v\varphi_u - \mu_u\varphi_v}{\sqrt{E\mu_v^2 - 2F\mu_u\mu_v + G\mu_u^2}} = 1$$

wird. Hieraus lassen sich φ_u und φ_v sofort berechnen. Es kommt:

$$\varphi_u = \frac{E\mu_v - F\mu_u}{\sqrt{E\mu_v^2 - 2F\mu_u\mu_v + G\mu_u^2}}, \quad \varphi_v = \frac{F\mu_v - G\mu_u}{\sqrt{E\mu_v^2 - 2F\mu_u\mu_v + G\mu_u^2}},$$

sodass eine Quadratur:

$$\varphi = \int \frac{(E\mu_v - F\mu_u)\,du + (F\mu_v - G\mu_u)\,dv}{\sqrt{E\mu_v^2 - 2F\mu_u\mu_v + G\mu_u^2}}$$

die ∞^1 orthogonalen Trajectorien $\varphi = \text{Const.}$ liefert, wie in Satz 15 behauptet wurde.

Thatsächlich enthält die Formel für φ die Differentialquotienten μ_u und μ_v nur in ihrem Verhältnis. Ersetzen wir μ_u und μ_v durch α und β wie oben, so finden wir also:

Satz 16: Ist

$$\alpha(u, v)\,du + \beta(u, v)\,dv = 0$$

die Differentialgleichung einer Schar von ∞^1 geodätischen Curven, die keine Minimalcurven sind, so ist

$$\frac{(E\beta - F\alpha)\,du + (F\beta - G\alpha)\,dv}{\sqrt{E\beta^2 - 2F\alpha\beta + G\alpha^2}}$$

das vollständige Differential einer Function $\varphi(u, v)$, und die Gleichung

$$\varphi(u, v) = \text{Const.}$$

stellt die ∞^1 orthogonalen Trajectorien jener Schar dar.

Beispiel: Auf einer geradlinigen Fläche sind die Geraden geodätische Curven. Nach Satz 15 oder 16 findet man also die orthogonalen Trajectorien der Geraden durch eine Quadratur. In der That haben wir sie so auf S. 217, 218 bestimmt. Der damalige Satz 92 ist ein specieller Fall unseres Satzes 14.

Statt in der Form $\varphi = \text{Const.}$ hatten wir die orthogonalen Trajectorien zuerst in der Form $\lambda = \text{Const.}$ geschrieben; φ war eine Function von λ. Für λ_u und λ_v gelten die Gleichungen (8) und (9). Mittels (8) können wir $\mu_u : \mu_v$ aus (9) fortschaffen, da (8) ergiebt:

$$\mu_u : \mu_v = (F\lambda_u - E\lambda_v) : (G\lambda_u - F\lambda_v),$$

sodass (9) die Form annimmt:

$$\frac{1}{D}\sqrt{E\lambda_v^2 - 2F\lambda_u\lambda_v + G\lambda_u^2} = \omega(\lambda),$$

wofür wir auch nach XX (Δ) schreiben können:

$$\Delta_{\lambda\lambda} = \omega^2(\lambda).$$

Diese Eigenschaft ist nun charakteristisch für die orthogonalen Trajectorien $\lambda = \text{Const.}$ von Scharen geodätischer Linien. Wir können nämlich umgekehrt beweisen, dass eine Schar von ∞^1 Curven

$$\lambda(u, v) = \text{Const.}$$

orthogonale Trajectorien einer Schar von ∞^1 geodätischen Curven sind, wenn $\Delta_{\lambda\lambda}$ eine Function von λ allein ist.

Es sei also eine Function $\lambda(u, v)$ gegeben, die keine Constante sein soll und für die $\Delta_{\lambda\lambda}$ eine Function von λ allein ist:

$$\Delta_{\lambda\lambda} = f(\lambda).$$

Alsdann stellt $\lambda =$ Const. eine Schar von ∞^1 Curven auf der Fläche dar. Wäre $\Delta_{\lambda\lambda} = 0$, so wären es Minimalcurven, nach Satz 47, S. 385, sodass ihre orthogonalen Trajectorien mit ihnen zusammenfielen und der zu beweisende Satz trivial würde. Also sei $\Delta_{\lambda\lambda} \neq 0$. Sind $\mu(u, v) =$ Const. die orthogonalen Trajectorien der Curven $\lambda =$ Const., so sind λ und μ von einander unabhängige Functionen, und es ist nach Satz 11, S. 33, und nach XX (*B*) der Zwischenparameter

$$\Delta_{\lambda\mu} = 0.$$

Führen wir nun

$$\lambda(u, v) = \bar{u}, \qquad \mu(u, v) = \bar{v}$$

als Flächenparameter ein, so nehmen die Fundamentalgrössen nach Satz 49, S. 389, und wegen

$$\Delta_{\lambda\lambda} = f(\lambda), \qquad \Delta_{\lambda\mu} = 0$$

die Werte an:

$$\bar{E} = \frac{1}{f(\lambda)}, \qquad \bar{F} = 0, \qquad \bar{G} = \frac{1}{\Delta_{\mu\mu}},$$

sodass das Quadrat des Bogenelementes in der Form erscheint:

$$ds^2 = \frac{1}{f(\bar{u})} d\bar{u}^2 + \bar{G}(\bar{u}, \bar{v})\, d\bar{v}^2. \tag{10}$$

Diese Form ordnet sich aber der früheren Form (4) unter, bei der die Curven (v) geodätische Curven waren. Also sind die Curven ($\bar{v}$) oder $\mu =$ Const. geodätisch. Somit sind die Curven $\lambda =$ Const. orthogonale Trajectorien von ∞^1 geodätischen Curven. Daher:

Satz 17:[1] Damit die Curvenschar

$$\lambda(u, v) = \text{Const.}$$

aus den orthogonalen Trajectorien von ∞^1 geodätischen Curven der Fläche bestehe, ist notwendig und hinreichend, dass der Differentialparameter erster Ordnung $\Delta_{\lambda\lambda}$ von λ eine Function von λ allein sei:

$$\Delta_{\lambda\lambda} = f(\lambda).$$

Die Voraussetzung, dass die Fläche keine Tangentenfläche einer Minimalcurve sei, ist schon dadurch eingeführt, dass $\Delta_{\lambda\lambda}$ sonst nicht definiert wäre.

Insbesondere ist in (10) der Parameter $\bar{u}$ direct die Bogenlänge der Curven ($\bar{v}$), gemessen von der Curve ($\bar{u} = 0$) an, wenn $f(\bar{u}) = 1$

[1] Vgl. die in der Anm. zu S. 388 genannte Abhandlung von Beltrami im Giornale di Matem.

ist — ebenso wie in (4) der Parameter u direct die Bogenlänge der Curven (v), gemessen von der Curve $(u = 0)$ an, darstellt, wenn $E = 1$ ist, wie die Formel (5) zeigt. Daher können wir noch sagen:

Satz 18:[1] Damit die Curvenschar

$$\lambda(u, v) = \text{Const.}$$

aus den orthogonalen Trajectorien von ∞^1 geodätischen Curven der Fläche bestehe und gleichzeitig λ die Länge dieser geodätischen Curven, gemessen von der Curve $\lambda = 0$ an, angebe, ist notwendig und hinreichend, dass der erste Differentialparameter $\Delta_{\lambda\lambda}$ gleich Eins sei.

Wenn wir insbesondere

$$\int \frac{d\bar{u}}{\sqrt{f(\bar{u})}}$$

als neuen Parameter u' statt $\bar{u}$ einführen, so nimmt das Quadrat des Bogenelementes (10) gerade die eben erwähnte einfachere Gestalt an:

$$ds^2 = du'^2 + \omega(u', \bar{v})\, d\bar{v}^2.$$

Dies lässt sich umkehren: Nehmen wir an, das Quadrat des Bogenelementes der Fläche sei durch geeignete Parameter u, v in der Form:

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\, dv^2$$

dargestellt. Alsdann sind die Parameterlinien (u) und (v) zu einander orthogonal nach Satz 13, S. 34. Ausserdem ist dann u die Bogenlänge der Curven (v), die von den Curven $(u = 0)$ und (u) abgeschnitten wird. Ferner sind dann die Curven (v) geodätisch, denn analog der in Satz 5, S. 408, ausgedrückten Bedingung für den Fall geodätischer Parameterlinien (u) haben wir für den Fall geodätischer Parameterlinien (v) die Bedingung:

$$FE_u - 2EF_u + EE_u = 0.$$

Diese ist aber hier, da $E = 1$, $F = 0$ ist, erfüllt.

Mithin gilt der

Satz 19: Dann und nur dann, wenn die Parameterlinien (v) geodätische Curven und die Parameterlinien (u) ihre orthogonalen Trajectorien sind, kann man die Parameter

[1] Dies findet man, wenn auch nicht ausdrücklich formuliert, schon in Gauss' „Disquisitiones“.

so wählen, dass das Quadrat des Bogenelementes die Form:[1]

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\,dv^2$$

annimmt. Alsdann ist zugleich u die Länge aller geodätischen Curven (v) zwischen den Trajectorien $(u = 0)$ und (u). Vorausgesetzt ist hierbei, dass die Fläche keine Tangentenfläche einer Minimalcurve sei.

§ 4. Systeme von geodätischen Parametern.

Die letzten Betrachtungen haben zu einer besonderen Art der Parameterdarstellung einer beliebigen Fläche, die keine Tangentenfläche einer Minimalcurve ist, geführt:

Als die Parameterlinien (v) wählen wir eine Schar von ∞^1 geodätischen Linien, als die Parameterlinien (u) ihre orthogonalen Trajectorien. Nach unseren letzten Ergebnissen können wir dabei den Parameter u so wählen, dass u die Bogenlänge vorstellt, die auf allen Parameterlinien (v) von den Trajectorien $(u = 0)$ und (u) abgeschnitten werden. (Siehe Fig. 79.) Wir haben ferner gesehen, dass das Quadrat des Bogenelementes alsdann die Form annimmt:

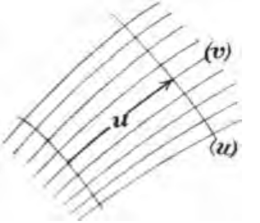


Fig. 79.

$$(1) \qquad ds^2 = du^2 + G(u, v)\,dv^2.$$

In diesem Falle sagen wir, dass die Fläche auf ein System von geodätischen Parametern oder auf ein System von geodätischen Coordinaten bezogen sei.

Legen wir diese Parameter zu Grunde, so nimmt die Differentialgleichung der geodätischen Curven nach Satz 4, S. 407, da jetzt $D = \sqrt{G}$ und zwar im reellen Falle die positive Wurzel aus G ist, die Form an:

$$(2) \qquad D(u'v'' - v'u'') + 2D_u u'^2 v' + D_v u' v'^2 + D^2 D_u v'^3 = 0\,.$$

Dabei hat man sich vorzustellen, dass u und v Functionen irgend eines Hülfsparameters t seien. Wählen wir als diesen Parameter

[1] Diese Form des Quadrates des Bogenelementes wurde von Gauss in seinen „Disquisitiones" eingeführt und zu Betrachtungen verwendet, die wir im nächsten Paragraphen wiedergeben.

insbesondere die Grösse v, sodass nur die geodätischen Curven (v) selbst ausgeschlossen bleiben, so ist $v' = 1$, $v'' = 0$, während

$$u' = \frac{du}{dv}, \quad u'' = \frac{d^2u}{dv^2}$$

wird. Alsdann kommt statt (2):

$$(3) \qquad -D\frac{d^2u}{dv^2} + 2D_u\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + D_v\frac{du}{dv} + D^2 D_u = 0,$$

d. h.: der Punkt (u, v) beschreibt eine geodätische Curve, sobald die Bogenlänge u, die sie auf den Parameterlinien (v) abschneidet — gemessen von der Trajectorie $(u = 0)$ an —, eine solche Function von v ist, die der Differentialgleichung (3) für alle Werte von v genügt.

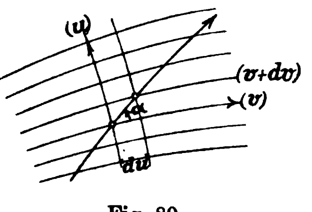


Fig. 80.

Im reellen Falle wollen wir alsdann die geodätische Curve im Sinne des wachsenden Parameters v durchlaufen. Es sei α der Winkel, den eine durch den Punkt (u, v) gehende geodätische Curve mit der hindurchgehenden Parameterlinie (v) bildet, siehe Fig. 80. Längs der ersteren Curve nehmen u und v um du und dv zu, längs der letzteren ist dagegen $dv = 0$, sodass wegen (1) aus Satz 10, S. 32, folgt:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + D^2\left(\frac{dv}{du}\right)^2}},$$

also:

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm D\frac{dv}{du}.$$

Da D im reellen Falle positiv und $\alpha \lesseqgtr \frac{\pi}{2}$ ist, je nachdem u auf der geodätischen Curve wächst oder abnimmt, so ist das obere Vorzeichen zu wählen:

$$\operatorname{tg}\alpha = D\frac{dv}{du},$$

sodass:

$$(4) \qquad \frac{du}{dv} = D\operatorname{ctg}\alpha$$

wird. Längs der geodätischen Curve ändert sich α; wächst v um dv, so nehme α um $d\alpha$ zu. Dann ist:

$$\frac{d^2u}{dv^2} = \frac{dD}{dv}\operatorname{ctg}\alpha - \frac{D}{\sin^2\alpha}\frac{d\alpha}{dv},$$

wobei nach (4)

$$\frac{dD}{dv} = D_u \frac{du}{dv} + D_v = D D_u \operatorname{ctg} \alpha + D_v$$

ist, sodass kommt:

$$\frac{d^2 u}{dv^2} = D D_u \operatorname{ctg}^2 \alpha + D_v \operatorname{ctg} \alpha - \frac{D}{\sin^2 \alpha} \frac{d\alpha}{dv}. \tag{5}$$

Aber für geodätische Curven besteht die Gleichung (3). Setzen wir darin die Werte (4) und (5) ein, so kommt einfach:

$$\frac{d\alpha}{dv} = -D_u, \tag{6}$$

was wir so aussprechen:

Satz 20:[1] Ist eine Fläche auf geodätische Parameter u, v bezogen, sodass

$$ds^2 = du^2 + G dv^2$$

das Quadrat ihres Bogenelementes ist, so ändert sich der Winkel α, unter dem irgend eine geodätische Curve die geodätischen Parameterlinien (v) durchsetzt, in Gemässheit der Formel:

$$\frac{d\alpha}{dv} = -D_u,$$

wo $D = \sqrt{G}$ im reellen Falle positiv ist und der Fortschreitungssinn der betrachteten geodätischen Curve im Sinne des wachsenden Parameters v festgesetzt worden ist.

Es ist häufig bequemer, statt der Differentialgleichung (2) oder (3) der geodätischen Curven die viel einfachere Gleichung (6) zu benutzen. Wir werden dies gelegentlich thun. —

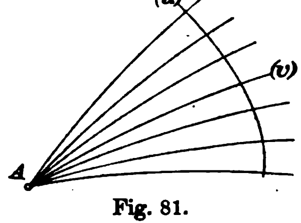


Fig. 81.

Insbesondere ist nun eine noch speciellere Wahl der Parameterlinien möglich: Als Parameterlinien (v) wählen wir nämlich ∞^1 geodätische Curven durch einen gemeinsamen Punkt A (siehe Fig. 81). Alsdann ist von den orthogonalen Trajectorien (u) eine, etwa (u_0), ausgeartet, nämlich in den Punkt A selbst zusammengeschrumpft, während jede andere orthogonale Trajectorie (u) von allen von A ausgehenden

[1] Satz 20 und 21 von Gauss, in den „Disquisitiones".

geodätischen Curven (v) dieselbe Bogenlänge $u - u_0$ abschneidet und daher als eine Curve constanter geodätischer Entfernung vom Punkte A bezeichnet werden kann. Dabei verstehen wir unter geodätischer Entfernung des Punktes (u, v) vom Punkte A eben die Bogenlänge der durch den Punkt (u, v) gehenden geodätischen Curve (v) von A bis zum Punkte (u, v).

Allerdings ist hier ein Einwand zu erheben: Es ist wohl denkbar, dass von A mehr als eine geodätische Curve zum Punkte (u, v) geht. Wir haben ja in einem Beispiel auf S. 409 gesehen, dass sogar unendlich viele geodätische Curven von einem Punkte nach einem anderen gehen können, vgl. die Fig. 77, S. 410. Man kann aber unter gewissen functionentheoretischen Voraussetzungen doch den Beweis führen, dass es um den Punkt A herum stets ein solches Stück der Fläche giebt, innerhalb dessen nur eine geodätische Curve von A nach irgend einer Stelle hin geht. Ein solches Gebiet kann man z. B. leicht in dem angezogenen Beispiel des Rotationscylinders dadurch abgrenzen, dass man zwei Mantellinien und zwei Kreise als den Rand des Gebietes vorschreibt. Wir gedenken jedoch auf die angeregte Frage nicht weiter einzugehen und formulieren daher das Ergebnis so:

Satz 21: Kann man um einen Punkt A einer Fläche, die keine Tangentenfläche einer Minimalcurve ist, ein solches Gebiet abgrenzen, innerhalb dessen ∞^1 geodätische Curven von A derart ausgehen, dass durch jeden Punkt des Gebietes nur eine von ihnen läuft, so sind die orthogonalen Trajectorien dieser ∞^1 geodätischen Curven die Curven constanter geodätischer Entfernung von dem Punkte A.

Diese orthogonalen Trajectorien sind daher eine naturgemässe Verallgemeinerung der Kreise um einen Punkt als Mittelpunkt in der Ebene und können als geodätische Kreise mit der Mitte A bezeichnet werden. Doch wollen wir gleich hier anmerken, dass der Begriff des Kreises noch eine zweite naturgemässe Verallgemeinerung für den Fall einer Fläche hat, die sich mit dieser nicht deckt. Wir werden sie aber erst in § 7 angeben. —

Sind die Parameterlinien (v) von einem Punkte A ausgehende geodätische Curven und die Parameterlinien (u) ihre orthogonalen Trajectorien, sodass

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\, dv^2$$

ist, so kann man es insbesondere so einrichten, dass die zum

Punkte A degenerierte orthogonale Trajectorie (u_0) gerade die Curve $(u = 0)$ ist, indem man nämlich einfach $u - u_0$ als Parameter statt u einführt. Alsdann ist u die geodätische Entfernung des Punktes (u, v) von der Stelle A. Man nennt ein solches Parametersystem[1] ein System von geodätischen Polarcoordinaten mit dem Pole A, da es die natürliche Verallgemeinerung des Systems der Polarcoordinaten in der Ebene (vgl. I S. 107) ist. Wie bei den ebenen Polarcoordinaten, so ist auch hier der Pol selbst in Hinsicht auf die Parameterdarstellung ein singulärer Punkt, da für ihn die auf S. 6 getroffenen Festsetzungen nicht gelten. Denn zu diesem Punkte A gehört zwar nur der eine Wert Null des Parameters u, aber der Parameter v bleibt für ihn unbestimmt, weil alle Curven (v) durch ihn hindurchgehen. Da die Curve $(u = 0)$ zu einem Punkte degeneriert, so ist ihre Bogenlänge gleich Null, d. h. es ist jetzt

$$\left[G(u, v)\right]_{u=0} = 0. \tag{7}$$

In vielen Problemen der Flächentheorie bieten sich solche geodätische Polarcoordinaten naturgemäss dar, so z. B. auf den Rotationsflächen.

Wenn die Meridiancurven einer Rotationsfläche die Axe der Fläche in einem Punkte A treffen, so sind die von ihm ausgehenden Meridiancurven unsere geodätischen Curven (v) und die Parallelkreise unsere geodätischen Kreise (u) (vgl. S. 432).

Wenn die Meridiancurven der Rotationsfläche die Axe nicht in reellen Punkten treffen, wenn man aber doch eine reelle Parameterdarstellung benutzen will, so wird man zu dem oben erwähnten allgemeineren System von geodätischen Coordinaten zurückgreifen, also die Meridiancurven zwar wieder als Curven (v) wählen, aber als orthogonale Trajectorie $(u = 0)$ irgend einen Parallelkreis der Fläche wählen, von dem aus also die Bogenlängen u gerechnet werden. Man sieht, dass wir auf S. 41 und später oft gerade dies Parametersystem für die Rotationsflächen benutzt haben. Insbesondere ist auch der Satz 6, S. 412, nur ein besonderer Fall des Satzes 20 für beliebige Flächen, denn dort war $D^2 = p^2(u)$, sodass Satz 20 liefert:

$$\frac{d\alpha}{dv} = \mp p',$$

sodass

$$\frac{d}{dv}(p \sin\alpha) = p' \sin\alpha \frac{du}{dv} \mp p p' \cos\alpha$$

[1] Zuerst von Gauss benutzt, von dem auch die übrigen Sätze dieses Paragraphen herrühren.

oder wegen (4):

$$\frac{d}{dv}(p \sin \alpha) = 0,$$

also $p \sin \alpha = \text{Const.}$ ist, was eben der erwähnte Satz 6 aussagt.

Auch auf beliebigen Flächen können wir geodätische Coordinaten einführen und zwar explicite, sobald wir eine Schar von ∞^1 geodätischen Curven kennen, die keine Minimalcurven sind. Alsdann stellt sich auch das Krümmungsmaass K der Fläche, da $E = 1$, $F = 0$ nach (1) ist, infolge von XVII (B) besonders einfach dar, nämlich so:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2}; \tag{8}$$

in dieser Formel tritt das Wurzelzeichen übrigens nur scheinbar auf.

Ein Hauptvorteil der geodätischen Coordinaten ist der, dass das Quadrat des Bogenelementes bei ihrer Anwendung nur eine Function $G(u, v)$ enthält, und diesen Vorteil teilt es mit dem Parametersystem der Minimalcurven, für das sich ja nach XVIII (A) ergiebt:

$$ds^2 = 2\,F(u, v)\,du\,dv.$$

Das System der Minimalcurven hat den Nachteil, imaginär zu sein, dagegen gegenüber dem geodätischen Parametersystem den Vorteil, bei wirklicher expliciter Anwendung nur die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung erster Ordnung, nämlich der Gleichung XI (O) zu verlangen, während die geodätischen Curven nach Satz 5, S. 408, durch eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung bestimmt werden und man kein Mittel hat, bei beliebigen Flächen gerade ∞^1 geodätische Curven zu finden.

Man kann die geodätischen Coordinaten, insbesondere die Formel (6), benutzen, um die Sätze über die Verbiegung von Flächen constanter Krümmung abzuleiten, die wir in § 5 des 3. Abschnittes unter Zugrundelegung der Minimalcurven als Parameterlinien ableiteten, und dies ist die Methode, die jetzt in den Lehrbüchern der Flächentheorie meistens benutzt wird. Wir wollen hierauf nicht näher eingehen und nur das Eine bemerken: Soll die Fläche constante Krümmung K haben, so muss nach (8):

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u^2} = -K\sqrt{G}$$

sein, d. h. der zweite Differentialquotient von $\sqrt{G}$ nach u ist gleich $\sqrt{G}$, multipliciert mit dem constanten Factor $-K$. Wie wir schon

in einigen Fällen (auf S. 413 und S. 427) auf die Betrachtung in I S. 98, 99 verweisen konnten, so auch hier. Es ergiebt sich, dass $\sqrt{G}$ die Form hat:

$$\sqrt{G} = V_1(v)\cos\sqrt{K}u + V_2(v)\sin\sqrt{K}u,$$

wo V_1 und V_2 Functionen von v allein sind. —

Im Falle geodätischer Polarcoordinaten kann man dem Parameter v noch eine specielle geometrische Deutung unterlegen. Zunächst nämlich betrachten wir die zu einem beliebigen Werte von u gehörige orthogonale Trajectorie der von dem Pole A ausgehenden geodätischen Curven (v), also, wie wir kurz sagen können, den geodätischen Kreis mit dem (geodätisch gemessenen) Radius u. (Siehe Fig. 82.) Es sei P_0 sein Schnittpunkt mit einer bestimmten geodätischen Curve (v), etwa der Curve $(v = 0)$, und P sein Schnittpunkt mit einer beliebigen geodätischen Curve (v). Sein Bogen $P_0 P$ drückt sich nach (1), da längs der Curve (u) der Parameter u constant ist, so aus:

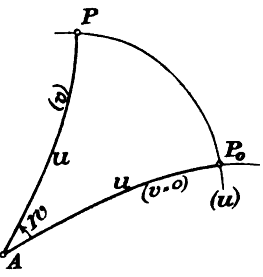


Fig. 82.

$$P_0 P = \int_0^v \sqrt{G}\,dv,$$

wo die Wurzel im reellen Falle positiv ist. Das Verhältnis aus dem Bogen $P_0 P$ und dem Radius $AP_0 = AP = u$ ist also:

$$\frac{P_0 P}{u} = \frac{1}{u}\int_0^v \sqrt{G}\,dv.$$

Wählen wir u unendlich klein, so ist der Kreis (u) als unendlich kleiner Kreis in der Tangentenebene von A mit der Mitte A und dem Radius u aufzufassen; daher ist das soeben betrachtete Verhältnis dann gleich dem Winkel w, den die geodätische Curve (v) mit der Curve $(v = 0)$ an der Stelle A bildet. Alsdann kommt:

$$w = \lim_{u=0} \frac{\int_0^v \sqrt{G}\,dv}{u}.$$

Nach bekannter Regel bestimmt man den Grenzwert, indem man Zähler und Nenner nach u differenziert und dann u gleich Null

setzt. Das Differenzieren und das Nullsetzen von u darf im Zähler unter dem Integralzeichen geschehen, sodass kommt:

$$(9) \qquad w = \int_0^v \left[\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right]_{u=0} dv.$$

Dies also ist der Winkel w, den die Curve (v) im Punkte A mit der Curve $(v = 0)$ bildet. Direct konnte er deshalb nicht berechnet werden, weil der Punkt A im System der geodätischen Polarcoordinaten singulär ist.

Aus (9) wird sich für w eine Function von v ergeben. Umgekehrt kann man dann v als Function von w auffassen und also auch w statt v als Parameter benutzen.

Man kann also insbesondere bei den geodätischen Polarcoordinaten als Parameter v den Winkel benutzen, den die Parameterlinie (v) mit der Parameterlinie $(v = 0)$ im Pole A bildet. Auch dann hat das Quadrat des Bogenelementes eine solche Form wie in (1), aber wegen der besonderen Bedeutung von v ist dann nach (9):

$$\int_0^v \left[\frac{\partial \sqrt{G}}{du}\right]_{u=0} dv = v,$$

woraus durch Differentiation nach v folgt:

$$\left[\frac{\partial \sqrt{G}}{du}\right]_{u=0} = 1.$$

Diese Gleichung deckt sich mit der vorigen, sodass wir mit Rücksicht auf (1) und (7) den Satz aufstellen können:

Satz 22: Sind u, v zu einem System geodätischer Polarcoordinaten gehörige Parameter u, v, d. h. sind die Curven (v) die von einem Punkte A ausgehenden geodätischen Curven, die Curven (u) ihre orthogonalen Trajectorien und ist u die von A an gemessene Bogenlänge der geodätischen Curven (v) bis zu ihren Schnittpunkten mit der Trajectorie (u), sodass das Quadrat des Bogenelementes die Form

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\,dv^2$$

hat, wobei

$$\Big[G(u, v)\Big]_{u=0} = 0 \quad \text{oder} \quad \Big[D\Big]_{u=0} = 0$$

ist, so stellt der Parameter v insbesondere den Winkel

vor, den die Curve (v) im Pole A mit der Curve $(v = 0)$ bildet, wenn überdies

$$\left[\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right]_{u=0} = 1 \quad \text{oder} \quad \left[D_u\right]_{u=0} = 1$$

ist.

Wir machen eine Anwendung hiervon zur Berechnung der sogenannten Totalkrümmung eines Flächenstückes.

Unter der Totalkrümmung T eines abgegrenzten Flächenstückes versteht man den Inhalt desjenigen Flächenstückes, das ihm bei der sphärischen Abbildung auf der Kugel entspricht. Sind

$$(u, v), \quad (u + du, v), \quad (u, v + dv), \quad (u + du, v + dv)$$

die Ecken eines unendlich kleinen Netzvierecks der Parameterlinien auf der Fläche, so entsprechen ihnen bei der sphärischen Abbildung vier Punkte auf der Kugel, nach S. 204, und dabei ist der Inhalt des Bildvierecks nach S. 212 gleich

$$\varepsilon \mathfrak{D}\, du\, dv,$$

wenn wir ihn positiv oder negativ rechnen, je nachdem die Fläche an der Stelle (u, v) elliptisch $(\varepsilon = +1)$ oder hyperbolisch $(\varepsilon = -1)$ ist. Aber nach der Definition des Krümmungsmaasses K ebenda ist dieser Inhalt gleich

$$K D\, du\, dv.$$

Mithin ist die Totalkrümmung T eines abgegrenzten Flächenstückes gleich dem Doppelintegral:

$$T = \iint K D\, du\, dv, \tag{10}$$

hinerstreckt über alle innerhalb des abgegrenzten Gebietes gelegenen Punkte (u, v).

Jetzt wollen wir insbesondere ein geodätisches Dreieck ABC auf der Fläche abgrenzen, d. h. ein Dreieck, das von drei geodätischen Curven begrenzt ist (siehe Fig. 83). Wir können dann die Ecke A als Pol geodätischer Polarcoordinaten benutzen, bei denen die von A ausgehenden geodätischen Curven die Parametercurven (v) sind. Dabei sei $(v = 0)$ die Curve AB selbst, und die Amplitude v werde so gemessen, dass der Schnittpunkt Q der Parametercurve (v) mit der Seite BC des Dreiecks von B nach C geht, wenn v von Null an wächst. Für

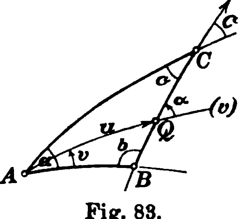


Fig. 83.

die Seite AC sei die Amplitude v gleich a. Ferner seien b und c die absolut gemessenen Innenwinkel des Dreiecks ABC bei B und C. Der Parameter u bedeutet die Bogenlänge auf den Curven (v), und wir können voraussetzen, sie sei auf der allgemeinen Curve (v) im Sinne von A nach Q positiv gemessen.

Die getroffenen Voraussetzungen sind nur dann nicht erfüllbar, wenn die geodätische Curve BC ihren Fortschreitungssinn, wie er weiter oben durch die wachsende Amplitude v bestimmt war, ändert. d. h. wenn die Curven BC eine solche Wendung macht, dass die von A ausgehenden geodätischen Curven sie öfters treffen, wie die punktierte Curve in Fig. 84 es thut. Wir werden in einem solchen Falle das geodätische Dreieck durch von A ausgehende geodätische Curven in einzelne Dreiecke zerlegen, für die die gemachte Voraussetzung zutrifft, und alsdann die Totalkrümmungen der einzelnen Dreiecke berechnen, denn die Totalkrümmung eines Flächenstückes ist ihrer Definition nach gleich der Summe der Totalkrümmungen ihrer Teile.

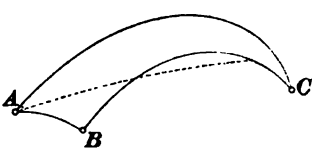


Fig. 84.

Unter den gemachten Voraussetzungen ist die Totalkrümmung T des geodätischen Dreiecks ABC nach (10):

$$T = \int_0^a \left(\int_0^u K D \, du \right) dv,$$

wo die obere Grenze u die Länge des Bogens AQ der allgemeinen Parametercurve (v) von A bis zu ihrem Schnittpunkte Q mit BC bedeutet (siehe wieder die frühere Fig. 83). Nach (8) ist aber, weil $\sqrt{G} = D$ ist:

$$\int_0^u K D \, du = -\int_0^u D_{uu} \, du = -D_u + [D_u]_{u=0},$$

also nach Satz 22:

$$\int_0^u K D \, du = 1 - D_u,$$

sodass kommt:

$$T = \int_0^a (1 - D_u) \, dv = a - \int_0^a D_u \, dv.$$

Hierfür können wir nach Satz 20 schreiben:

$$T = a + \int_0^a \frac{d\alpha}{dv} dv,$$

wenn α den Winkel bedeutet, den die Curve BC mit der Parameterlinie (v) bildet. Das unbestimmte Integral hat den Wert α + Const. Für $v = 0$ wird $\alpha = \pi - b$, für $v = a$ dagegen wird $\alpha = c$, wie Fig. 83, S. 449, zeigt, sodass kommt:

$$T = a + b + c - \pi.$$

Um dies einfache Ergebnis auch für geodätische Dreiecke zu beweisen, die den gestellten Anforderungen nicht genügen, haben wir sie nur noch für ein geodätisches Dreieck ABC nachzuweisen, das durch eine geodätische Curve AD in zwei einzelne zerlegt ist, wie in Fig. 85. Sind die Winkel des Dreiecks ABD mit a_1, b_1, d_1, die des Dreiecks ADC mit a_2, d_2, c_2 bezeichnet, so sind die Totalkrümmungen der beiden einzelnen Dreiecke gleich

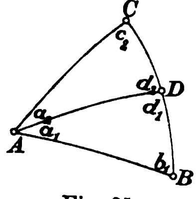


Fig. 85.

$$a_1 + b_1 + d_1 - \pi \quad \text{und} \quad a_2 + d_2 + c_2 - \pi,$$

sodass die Totalkrümmung des Dreiecks ABC den Wert hat:

$$(a_1 + b_1 + d_1 - \pi) + (a_2 + d_2 + c_2 - \pi).$$

Es ist aber $d_1 + d_2 = \pi$, sodass der Wert gleich

$$(a_1 + a_2) + b_1 + c_2 - \pi$$

wird. Da nun $a_1 + a_2$, b_1 und c_2 die Winkel des Dreiecks ABC sind, so folgt wieder das alte Ergebnis, sodass wir erkennen: Wenn das geodätische Dreieck in zwei Teile zerlegt wird, für die einzeln die gemachten Voraussetzungen gelten, so ist das Ergebnis bezüglich der Totalkrümmung auch für das ganze Dreieck richtig. Da sich nun jedes geodätische Dreieck durch geeignete geodätische Querlinien in solche zerteilen lässt, für die die Voraussetzungen erfüllt sind, so haben wir den

Satz 23: Die Totalkrümmung eines geodätischen Dreiecks ist gleich der Summe der Winkel des Dreiecks vermindert um π.

Man hat zu beachten, dass die Totalkrümmung ihrer Definition nach sehr wohl im reellen Falle negativ sein kann, da wir die Inhalte

der Flächenelemente auf der Bildkugel positiv oder negativ gerechnet haben (vgl. S. 212), je nachdem die zugehörige Stelle der sphärisch abgebildeten Fläche selbst elliptisch oder hyperbolisch gekrümmt ist. Hieraus folgt, dass auf einer überall hyperbolisch gekrümmten Fläche, wie z. B. auf dem einschaligen Hyperboloid und auf jeder reellen Minimalfläche (vgl. S. 241), die Winkelsumme eines geodätischen Dreiecks kleiner als π ist. Auf dem einschaligen Rotationshyperboloid kann man ein solches Dreieck z. B. durch zwei einander schneidende Geraden und den Kehlkreis begrenzen.

Ist nun aber die Krümmung K der Fläche constant, so ist die Totalkrümmung eines Flächenstückes:

$$T = \iint K D\, du\, dv = K \iint D\, du\, dv,$$

also nach Satz 14, S. 35, gleich dem K-fachen Inhalt des Flächenstückes. Daher schliessen wir aus Satz 23:

Satz 24: Der Flächeninhalt J eines geodätischen Dreiecks auf einer Fläche constanter Krümmung K ist gleich der um π verminderten Winkelsumme $a + b + c$ des Dreiecks, dividiert durch K, also:

$$J = \frac{a + b + c - \pi}{K}.$$

Hierbei sei noch besonders hervorgehoben, dass wir die Fläche J als Doppelintegral über $D\, du\, dv$ im reellen Falle positiv ausgemessen haben, da D positiv ist und sich u und v beide in positivem Sinne änderten, u von Null bis zur Länge des Bogens AQ und alsdann v von Null bis $a > 0$, sodass du und dv beide positiv waren.

Ist $K = 0$, d. h. liegt eine abwickelbare Fläche vor, nach Satz 90, S. 214, so ist der Nenner in dem Ausdruck des Flächeninhaltes gleich Null, aber auch der Zähler, denn wenn man die Fläche auf die Ebene ausbreitet, so wird das geodätische Dreieck zu einem geradlinigen Dreieck, dessen Winkelsumme $a + b + c$ gleich π ist.

Auf jeder anderen Fläche constanter Krümmung K dagegen besteht zwischen der Winkelsumme $a + b + c$ und dem Inhalte J der Fläche eines geodätischen Dreiecks die Beziehung:

$$a + b + c = \pi + KJ.$$

Die Winkelsumme ist also auf einer Fläche constanter positiver Krümmung grösser als π, auf einer Fläche constanter negativer Krümmung kleiner als π.

Erinnern wir uns nun an den Satz 9, S. 416, und an Satz 12, S. 428; wir sahen, dass von allen reellen Flächen nur die Flächen constanter Krümmung geodätisch auf die Ebene abgebildet werden können, d. h. dass nur auf ihnen solche Parameter u, v vorhanden sind, in denen sich die geodätischen Curven durch die allgemeine lineare Gleichung:

$$\text{Const.}\, u + \text{Const.}\, v = \text{Const.}$$

ausdrücken lassen. Die analytische Geometrie der Ebene gründet sich darauf, dass einerseits die Geraden durch lineare Gleichungen zwischen den Coordinaten x, y dargestellt werden, andererseits auf die Annahme, dass die Summe der Winkel eines geradlinigen Dreiecks gleich π sei. Wie man sieht, gilt das erstere auch für die geodätischen Curven auf den reellen Flächen constanter Krümmung, das letztere jedoch nicht. Alle diejenigen Sätze aus der Geometrie der Geraden in der Ebene also, die nur darauf beruhen, dass die Geraden durch lineare Gleichungen dargestellt werden, haben ihr Analogon auf den reellen Flächen constanter Krümmung, indem die geodätischen Curven an die Stelle der Geraden treten, nicht aber diejenigen Sätze, die auf jener Annahme über die Winkelsumme des Dreiecks beruhen.

Es lässt sich also auf jeder reellen Fläche constanter Krümmung eine Geometrie der geodätischen Curven analog unserer ebenen (euklidischen) Geometrie der Geraden entwickeln, in der jedoch die Voraussetzung, dass jedes Dreieck die Winkelsumme π habe, nicht gilt. Man nennt eine solche Geometrie eine nicht-euklidische. Dass solche Geometrien auf den Flächen constanter Krümmung entwickelt werden können, steht damit in Einklang, dass sich der Satz von der Winkelsumme der geradlinigen Dreiecke nicht mittels der übrigen Axiome der euklidischen Geometrie beweisen lässt.

§ 5. Centraflächen.

Während wir in der Theorie der ebenen Curven im ersten Bande schon frühzeitig, in § 11 des ersten Abschnittes, den Ort der Krümmungsmittelpunkte, die Evolute, besprochen haben, haben wir in der Flächentheorie bisher die Betrachtung derjenigen Fläche,

die von den Hauptkrümmungsmittelpunkten einer gegebenen Fläche erfüllt wird, absichtlich unterlassen und zwar deshalb, weil hierbei die geodätischen Curven eine Rolle spielen. Daher können wir erst jetzt dazu übergehen.

Wir betrachten eine Fläche

$$x = \varphi(u, v), \qquad y = \chi(u, v), \qquad z = \psi(u, v), \tag{1}$$

die in ihren Punkten von allgemeiner Lage Hauptkrümmungskreise hat, also keine Schar von ∞^1 Minimalgeraden enthält, vgl. Satz 11, S. 118. Jeder allgemeine Punkt P oder (u, v) der Fläche hat zwei auf seiner Normalen gelegene Hauptkrümmungsmittelpunkte, die wir wie in § 8 des 2. Abschnittes mit C_1 und C_2 bezeichnen wollen. Der Ort der Hauptkrümmungsmittelpunkte heisst die Centrafläche der gegebenen Fläche (1) oder auch die Evolutenfläche der gegebenen Fläche (1).[1]

Vor allem ist hier zu beachten, dass die Centrafläche aus zwei verschiedenen Mänteln besteht, denn wenn wir bei einem Flächenpunkte P die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte als ersten und zweiten, C_1 und C_2, bezeichnen, so ist damit für alle Punkte der Fläche die Unterscheidung von ersten und zweiten Hauptkrümmungsmittelpunkten festgelegt. In der That: Die Hauptkrümmungsrichtungen der ∞^2 Flächenpunkte sind ja die Tangenten der beiden Scharen von Krümmungscurven, deren Differentialgleichung XII (U) als quadratische homogene Gleichung in du und dv zerlegbar ist in zwei in du und dv lineare homogene Gleichungen. Die Richtung $(dv : du)$ der zu C_1 gehörigen Hauptkrümmungsebene des betrachteten bestimmt gewählten Punktes P, die Richtung also, in der die Ebene des Hauptkrümmungskreises mit der Mitte C_1 die Tangentenebene von P schneidet, genügt nun einer von diesen beiden linearen Gleichungen. Folglich hat man alle dieser einen Gleichung genügenden Richtungen $(dv : du)$ für beliebig gewählte Flächenpunkte (u, v) als die ersten Hauptkrümmungsrichtungen zu bezeichnen und die zugehörigen Hauptkrümmungsmittelpunkte entsprechend als die ersten. Sie bilden den ersten Mantel der Centrafläche, die anderen den zweiten Mantel.

Da die Fläche (1) insgesamt ∞^2 Punkte P hat, so wird sie im allgemeinen auch ∞^2 Hauptkrümmungsmittelpunkte C_1 und ∞^2 Hauptkrümmungsmittelpunkte C_2 haben, d. h. die Punkte C_1 bez. C_2 werden

[1] Sie wurde von MONGE in seiner „Application", siehe die Anm. zu S. 110, zuerst untersucht.

im allgemeinen wirklich je eine Fläche erfüllen; aber es kann vorkommen, dass es nur ∞^1 Punkte C_1 oder C_2 giebt, ja sogar nur einzelne Punkte. Die Mäntel der Centrafläche können also zu Curven oder zu Punkten verkümmern.

1. Beispiel: Die Kugel gehört freilich zu den Flächen mit Scharen von Minimalgeraden, aber wie wir auf S. 119, 120 bemerkten, können wir sie doch zu den Flächen mit Hauptkrümmungscentren rechnen. Die Mittelpunkte C_1 und C_2 fallen hier beide in die Kugelmitte, d. h. beide Mäntel der Centrafläche degenerieren in einen und nur einen Punkt.

2. Beispiel: Bei einer Rotationsfläche ist der eine Mantel der Centrafläche nach Satz 13, S. 122, in die Drehaxe ausgeartet, während der andere Mantel diejenige Rotationsfläche mit derselben Axe ist, deren Meridiancurve die Evolute der Meridiancurve der gegebenen Fläche ist.

3. Beispiel: Bei einer Röhrenfläche, vgl. das 2. Beispiel auf S. 181, ist der eine Mantel der Centrafläche in die Curve der Mittelpunkte des erzeugenden Kreises ausgeartet.

4. Beispiel: Bei einer abwickelbaren Fläche ist der eine Hauptkrümmungsradius unendlich gross, also der eine Mantel der Centrafläche unendlich fern und zwar, wie man sagen kann, eine unendlich ferne Curve, keine Fläche. Die eine Schar der Krümmungscurven besteht nämlich hier aus den Geraden der Fläche (nach S. 177), und längs jeder Geraden der Fläche hat die Flächennormale constante Richtung, sodass die unendlich fernen Hauptkrümmungscentren nach im Ganzen nur ∞^1 Richtungen liegen, entsprechend dem Vorhandensein von ∞^1 Erzeugenden.

Nach Satz 53, S. 171, schneidet die Normale des Punktes P der Fläche (1) eine unendlich benachbarte Normale nur dann, wenn der Fusspunkt dieser zweiten Normale auf einer der beiden Hauptkrümmungstangenten von P liegt, und zwar ist der Schnittpunkt alsdann der zugehörige Hauptkrümmungsmittelpunkt. Die Normalen längs einer Krümmungslinie der Fläche (1) bilden also eine abwickelbare Fläche, wie wir schon auf S. 175 auseinandersetzten, und die Gratlinie dieser abwickelbaren Fläche ist der Ort der zugehörigen Hauptkrümmungscentren. Also sehen wir:

Satz 25: Der eine Mantel der Centrafläche einer gegebenen Fläche wird von den Gratlinien derjenigen abwickelbaren Flächen gebildet, die von den Flächennormalen längs einer jeden Krümmungscurve der einen Schar der gegebenen Flächen erzeugt werden, der andere Mantel von den Gratlinien der zur zweiten Schar von Krümmungscurven gehörigen abwickelbaren Flächen von Flächennormalen.

Da die Flächennormalen längs einer Krümmungscurve der Fläche (1) die Tangenten der Gratlinie ihrer abwickelbaren Fläche

sind und diese Gratlinie auf dem einen Mantel der Centrafläche liegt, so folgt weiter, dass jene Flächennormalen auch Tangenten dieses Mantels der Centrafläche sind, sodass wir sagen können:

Satz 26: Die beiden Mäntel der Centrafläche einer gegebenen Fläche werden von den Normalen dieser Fläche berührt, und zwar berührt die Normale des Punktes P die beiden Mäntel in den beiden zu P gehörigen Hauptkrümmungsmittelpunkten.

Diese Sätze sollen durch die Fig. 86 erläutert werden, in der die gegebene Fläche (1) mit einem Netz von Krümmungscurven überzogen ist und zu zweien dieser Krümmungscurven, k_1 und k_2, die abwickelbaren Flächen der Flächennormalen sowie die zugehörigen Gratlinien γ_1, γ_2 angegeben sind. Die beiden Mäntel der Centrafläche sind schematisch angedeutet.[1]

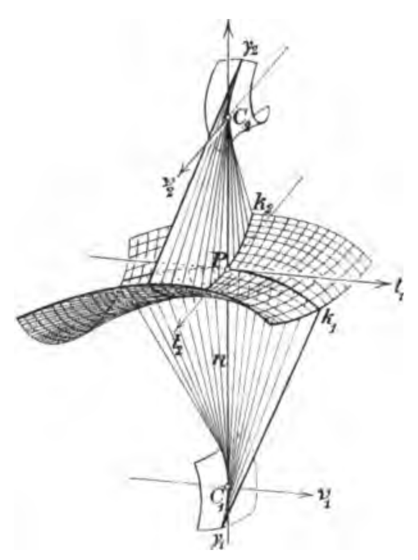


Fig. 86.

Ist die Fläche (1) reell und in P elliptisch gekrümmt, so liegen die zugehörigen Stellen C_1 und C_2 der Centrafläche nach S. 140 auf derselben Seite von P, ist die Fläche (1) in P hyperbolisch gekrümmt, so liegen sie auf verschiedenen Seiten von P. Für ein reelles Flächenstück also, das durchaus hyperbolisch gekrümmt ist, sind die zugehörigen Stücke der beiden Mäntel der Centrafläche durch das Flächenstück selbst von einander getrennt. Dies ist z. B. in Fig. 86 der Fall.

Wir wollen mit x_1, y_1, z_1 die rechtwinkligen Coordinaten des zu P gehörigen Hauptkrümmungscentrums C_1, mit x_2, y_2, z_2 die des Punktes C_2 bezeichnen. Alsdann ist, wenn R_1 und R_2 die Haupt-

[1] Im Brill'schen Verlage, jetzt bei Schilling in Halle, sind Modelle der Centraflächen des Ellipsoids und des einschaligen Hyperboloids erschienen, hergestellt von Schwarz und Dyck. Man findet in dieser Sammlung überhaupt eine Reihe von Modellen, die für das Studium der Flächentheorie nützlich sind.

krümmungsradien des Punktes P oder (x, y, z) der Fläche (1) und X, Y, Z die Richtungscosinus der Normale von P bedeuten:

$$x_1 = x + R_1 X, \quad y_1 = y + R_1 Y, \quad z_1 = z + R_1 Z \tag{2}$$

und

$$x_2 = x + R_2 X, \quad y_2 = y + R_2 Y, \quad z_2 = z + R_2 Z. \tag{3}$$

Da x, y, z, R_1, R_2 und X, Y, Z Functionen von u und v sind, so liegen hierin Parameterdarstellungen der beiden Mäntel der Centrafläche vor. Zu jedem Wertepaar (u, v) gehört ein Punkt P der Fläche (1), ein Punkt C_1 des ersten Mantels (2) und ein Punkt C_2 des zweiten Mantels (3) der Centrafläche.

Es wird sich nun offenbar empfehlen, als **Parameterlinien** (u) **und** (v) **auf der Fläche** (1) **die Krümmungscurven zu wählen.** Es seien alsdann die Curven (v) die Krümmungscurven der ersten Art, die Curven (u) die der zweiten Art, sodass also die Punkte C_1 die Schnittpunkte unendlich benachbarter Normalen längs der Curven (v) sein sollen. Auch gelten dann die Formeln der Tafel XIX.

Wir wollen die auf die beiden Mäntel der Centrafläche bezüglichen Elemente berechnen; es seien $E_1, F_1, G_1, L_1, M_1, N_1$ die Fundamentalgrössen des ersten Mantels und X_1, Y_1, Z_1 die Richtungscosinus seiner Normalen. Beim zweiten Mantel wenden wir den Index 2 an. Zunächst folgt aus (2):

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = x_u + R_1 X_u + X \frac{\partial R_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = x_v + R_1 X_v + X \frac{\partial R_1}{\partial v}$$

oder nach XIX (F):

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = X \frac{\partial R_1}{\partial u}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial v} = X \frac{\partial R_1}{\partial v} + \frac{R_2 - R_1}{R_2} x_v. \tag{4}$$

Hierin darf x mit y oder z und X mit Y oder Z vertauscht werden. Hieraus folgt nach XI (F), dass

$$X_1 : Y_1 : Z_1 = (Y z_v - Z y_v) : (Z x_v - X z_v) : (X y_v - Y x_v)$$

oder also nach XI (K) und wegen $F = 0$, nach XIX (A):

$$X_1 : Y_1 : Z_1 = x_u : y_u : z_u. \tag{5}$$

Ganz entsprechend ergiebt sich:

$$X_2 : Y_2 : Z_2 = x_v : y_v : z_v. \tag{6}$$

Diese Formeln haben eine einfache geometrische Bedeutung: Es seien nämlich die beiden durch den Punkt P oder (u, v) der gegebenen Fläche (1) gehenden Krümmungscurven (v) und (u)

mit k_1 und k_2 bezeichnet. Die Normale n von P (siehe Fig. 86 auf S. 456) enthält die Punkte C_1 und C_2 der beiden Mäntel der Centrafläche und berührt in ihnen die beiden Mäntel. Die Normalen der gegebenen Fläche längs k_1 umhüllen eine Curve γ_1 auf dem ersten Mantel, die Normalen längs k_2 eine Curve γ_2 auf dem zweiten Mantel. Die Curve γ_1 hat als Gratlinie diejenige Ebene zur Schmiegungsebene, die die Normale n und die Tangente t_1 von k_1 in P enthält, d. h. die Ebene des ersten Hauptkrümmungskreises von P. Ebenso hat γ_2 in C_2 die Ebene durch die Normale n und durch die Tangente t_2 von k_2 zur Schmiegungsebene. Nun sagt (5) aus, dass diejenige Normale ν_1 des ersten Mantels der Centrafläche, die von C_1 ausgeht, zur Tangente t_1 parallel ist, und aus (6) folgt, dass diejenige Normale ν_2 des zweiten Mantels, die von C_2 ausgeht, zur Tangente t_2 parallel ist. Also:

Satz 27: Sind C_1 und C_2 die zu einem Flächenpunkte P gehörigen Punkte der beiden Mäntel der Centrafläche, so ist die Normale der Centrafläche in C_1 bez. C_2 der betreffenden Hauptkrümmungstangente von P parallel.

Aber noch mehr, wir sehen, dass die Normale ν_1 in der Schmiegungsebene von γ_1 liegt, also die Hauptnormale von γ_1 ist. Die Curve γ_1 ist folglich nach S. 402 eine geodätische Curve des ersten Mantels. Ebenso ist die Normale ν_2 des zweiten Mantels Hauptnormale von γ_2, sodass γ_2 eine geodätische Curve des zweiten Mantels ist. Also:

Satz 28: Diejenigen Curven, die von den Normalen einer Fläche längs je einer Krümmungscurve umhüllt werden, sind geodätische Curven auf der Centrafläche.

Nach Satz 27 berührt, wie noch ausdrücklich erwähnt sein möge, jeder der beiden Hauptkrümmungsschnitte eines Flächenpunktes P denjenigen Mantel der Centrafläche, der ihm nicht zugehört, in demjenigen Hauptkrümmungsmittelpunkt, der ihm ebenfalls nicht zugehört.

Ehe wir weitergehen, wollen wir die Frage beantworten, wann einer der beiden Mäntel der Centrafläche ausartet. Dabei werden wir die Gleichung benutzen, die aussagt, dass die Strecke PC_1 gleich R_1 ist, nämlich:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R_1^2. \tag{7}$$

Aus ihr geht durch Differentiation nach v hervor:

$$\mathsf{S}\,(x - x_1)\left(x_v - \frac{\partial x_1}{\partial v}\right) = R_1 \frac{\partial R_1}{\partial v}$$

oder, da $x - x_1$, $y - y_1$, $z - z_1$ proportional X, Y, Z sind und also $\mathbf{S}(x - x_1)x_v$ nach XI (I) gleich Null ist:

$$(8) \qquad -\mathbf{S}(x - x_1)\frac{\partial x_1}{\partial v} = R_1 \frac{\partial R_1}{\partial v},$$

eine Formel, die wir auch mittels (2), (4), XI (H) und XI (I) verificieren können.

Der erste Mantel der Centrafläche enthält nun ∞^1 Curven γ_1. Jeder Curve γ_1 entspricht eine Krümmungscurve k_1 oder (v) der gegebenen Fläche. Bei der Parameterdarstellung (2) des ersten Mantels sind also die Parameterlinien (v) die geodätischen Curven γ_1. Soll der erste Mantel in eine Curve degenerieren, so ist dies auf zwei Arten denkbar: Entweder schrumpft jede einzelne Curve γ_1 in einen Punkt zusammen oder alle Curven γ_1 fallen in eine einzige zusammen. Aber die zweite Möglichkeit ist deshalb ausgeschlossen, weil alle Tangenten aller Curven γ_1 identisch sind mit allen Normalen der gegebenen Fläche, sodass die Fläche (1) dann nur ∞^1 Normalen hätte. Es bleibt also nur die eine Möglichkeit, dass sich jede Curve γ_1 oder (v) des ersten Mantels (2) auf einen Punkt reduciert. Alsdann müssen x_1, y_1, z_1 unverändert bleiben, wenn sich nur u ändert, d. h. sie sind dann Functionen von v allein. Aus der ersten Gleichung (4) und den beiden analogen Gleichungen für y und z folgt ferner, da X, Y, Z nicht sämtlich gleich Null sind, dass auch R_1 eine Function von v allein sein muss.

Halten wir jetzt v fest und variieren nur u, d. h. beschreibt der Punkt P oder (x, y, z) eine Krümmungscurve k_1, so sind in (7) und (8) nur x, y, z veränderlich. Aber (7) stellt für die Punkte (x, y, z) eine Kugel, (8) eine Ebene dar, d. h. jede Curve k_1 ist ein Kreis. Die Normalen n längs k_1 gehen beständig nach der Mitte (x_1, y_1, z_1) oder C_1 der betreffenden Kugel, anders ausgesprochen: Die Fläche (1) wird längs des Kreises k_1 von einer Kugel berührt.

Insgesamt haben wir ∞^1 Kugeln, da die Coordinaten x_1, y_1, z_1 der Mitten und die Radien R_1 Functionen der Grösse v sind.

Wird umgekehrt eine Schar von ∞^1 Kugeln gegeben, so kann dies analytisch dadurch geschehen, dass wir die Coordinaten x_1, y_1, z_1 der Mitten und die Radien R_1 der Kugeln als Functionen eines Parameters v geben. Soll alsdann eine Fläche vorhanden sein, die jede dieser Kugeln längs einer Curve berührt, so müssen die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z der Punkte der Fläche ausser von v noch von einem Parameter abhängen, sodass die Parameterlinie (v) der fraglichen Fläche auf der zu v gehörigen Kugel liegt

und die Kugel die Fläche längs dieser Curve berührt. Also ist zu fordern, dass einerseits

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = R_1^2 \tag{9}$$

sei und andererseits die Tangentenrichtungen der Fläche auf der Kugel liegen, also:

$$(x - x_1) x_u + (y - y_1) y_u + (z - z_1) z_u = 0 \tag{10}$$

und

$$(x - x_1) x_v + (y - y_1) y_v + (z - z_1) z_v = 0 \tag{11}$$

sei. Aber (9) giebt wie oben nach v differenziert:

$$\mathbf{S}(x - x_1)\left(x_v - \frac{\partial x_1}{\partial v}\right) = R_1 \frac{\partial R_1}{\partial v},$$

also wegen (11):

$$- \mathbf{S}(x - x_1) \frac{\partial x_1}{\partial v} = R_1 \frac{\partial R_1}{\partial v}, \tag{12}$$

was wieder aussagt, dass die Parameterlinien (v) der fraglichen Fläche in Ebenen liegen, also Kreise sind.

Jetzt können wir so sagen: Wir verstehen unter x, y, z drei Functionen, die den Gleichungen (9) und (12) genügen, also, da dies nur zwei Bedingungen sind, ausser v noch eine Veränderliche u enthalten können, sodass sie die analytische Darstellung einer Fläche geben, die wir auch durch Elimination von v aus (9) und (12), wo v in x_1, y_1, z_1 und R_1 und ihren Ableitungen auftritt, in der Form

$$F(x, y, z) = 0$$

erhalten würden. Diese Fläche erfüllt ausser den Gleichungen (9), (12) alle durch Differentiation nach u und v daraus hervorgehenden Gleichungen. Aber die Differentiation von (9) nach u giebt (10), da x_1, y_1, z_1, R_1 von u frei sind, und die Differentiation von (9) nach v giebt mit Rücksicht auf (12) gerade (11). Die gefundene Fläche hat also die gewünschte Eigenschaft: Sie berührt jede der ∞^1 Kugeln längs einer Curve, und wir haben überdies gesehen, dass die Curven Kreise sein müssen. Wir wollen zunächst dies Ergebnis formulieren:

Satz 29: Eine stetige Schar von ∞^1 Kugeln erzeugt stets eine Fläche, die von jeder Kugel der Schar längs einer Curve berührt wird. Diese Berührungscurven sind Kreise. (Siehe Fig 87, S. 461.)

Man sagt, dass diese Fläche die Umhüllende, Einhüllende oder Enveloppe der ∞^1 Kugeln sei. Man kann nämlich, wenn eine stetige Schar von ∞^1 beliebigen Flächen vorliegt, ebenfalls beweisen, dass es eine solche Fläche giebt, die jede Fläche der Schar längs einer Curve berührt, worauf wir jedoch nicht eingehen wollen. Der Beweis ist — abgesehen davon, dass sich vorhin insbesondere Kreise ergaben — ganz analog dem obigen.[1]

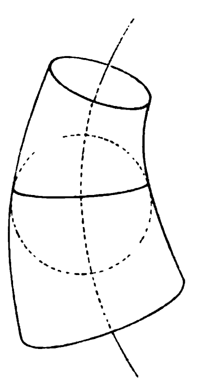


Fig. 87.

Insbesondere nennt man die Umhüllende einer Schar von ∞^1 Kugeln eine Canalfläche.[2] Die ∞^1 Kreise, in denen sie von den ∞^1 Kugeln berührt wird, sind ihre Krümmungscurven der einen Schar, da die Normalen längs jedes dieser Kreise zugleich Normalen der betreffenden Kugel sind und also eine Kegelfläche bilden, sodass Satz 54, S. 176, angewandt werden kann. Zu den Canalflächen gehören insbesondere die in dem 2. Beispiel auf S. 181 erwähnten Röhrenflächen. Jede Rotationsfläche ist augenscheinlich auch eine Canalfläche; hier sind die Kugelmitten die Schnittpunkte der Normalen mit der Drehaxe und die Kugelradien diese Normalen selbst.

Kehren wir nun wieder zu den Centraflächen zurück, so können wir sagen:

Satz 30: Ein Mantel der Centrafläche artet nur dann in eine Curve aus, wenn die Fläche eine Canalfläche ist. In diesem Falle ist der Ort der Mitten derjenigen Kugeln, die von der Canalfläche umhüllt wird, der ausgeartete Mantel.

Eine andere Ausartung tritt ein, wenn der eine Mantel der Centrafläche unendlich fern ist, d. h. wenn die Normalen längs

---

[1] Während man in der Ebene nur ∞^1 Curven zu betrachten hat, wenn man die Umüllungstheorie aufstellen will, hat man dagegen im Raume zwei Fälle zu unterscheiden: Es können ∞^1 oder ∞^2 Flächen vorliegen. Eine erschöpfende Behandlung der Umhüllungstheorie im Raume führt naturgemäss zu der Theorie der partieellen Differntialgleichungen erster Ordnung, auf die wir grundsätzlich nicht eingehen wollen, und deshalb hauptsächlich unterlassen wir es, die Umhüllenden von Flächenscharen zu untersuchen. Wir wollen aber anmerken, dass Monge ihre Theorie in seiner „Application" geschaffen hat, wodurch er zugleich in die von Lagrange herrührende analytische Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung anschauliche geometrische Vorstellungen hineinbrachte.

[2] Sie wurden zuerst von Monge in seiner „Application" untersucht.

jeder Curve k_1 einander parallel sind, die Curven k_1 also Geraden sind und die Fläche abwickelbar ist. Diesen Fall erwähnten wir schon oben in dem 4. Beispiele. Man kann die abwickelbaren Flächen als Canalflächen auffassen, deren erzeugende Kugeln unendlich ferne Mitten haben, also zu Ebenen geworden sind, nämlich zu den ∞^1 Tangentenebenen der abwickelbaren Fläche.

Da der erste Mantel der Centrafläche nur dann ausartet, wenn sich jede Curve γ_1 auf einen Punkt reduciert, also R_1 längs jeder Curve k_1 oder (v) constant ist, und da umgekehrt daraus, dass R_1 nur von v abhängt, nach (4) folgt, dass x_1, y_1, z_1 nur von v abhängen, also jede Curve γ_1 nur ein Punkt ist, so können wir auch diesen Satz formulieren:

Satz 31: Die Flächen, bei denen der eine Hauptkrümmungsradius längs jeder zugehörigen Krümmungscurve constant ist, sind die Canalflächen; auf ihnen bilden die Kreise diese eine Schar von Krümmungscurven.

Es können auch beide Mäntel der Centrafläche ausarten; doch hierauf wollen wir erst weiter unten gelegentlich zurückkommen, um jetzt nicht zu weit von der allgemeinen Theorie der Centraflächen fortgeführt zu werden. (Siehe S. 473, 474.)

Kehren wir jetzt zur Aufstellung allgemeiner Formeln für die Centraflächen zurück. Aus (4) können wir nach XI (A) sofort die Fundamentalgrössen erster Ordnung E_1, F_1, G_1 des ersten Mantels ableiten. Wegen XI (H) und XI (I) kommt:

$$(13)\quad E_1 = \left(\frac{\partial R_1}{\partial u}\right)^2, \quad F_1 = \frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial R_1}{\partial v}, \quad G_1 = \left(\frac{\partial R_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}\right)^2 G.$$

Ferner ist

$$D_1^2 = E_1 G_1 - F_1^2 = \left(\frac{\partial R_1}{\partial u}\right)^2 \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}\right)^2 G.$$

Also setzen wir in Gemässheit der Bestimmung auf S. 18:

$$(14)\qquad D_1 = \varepsilon_1 \frac{\partial R_1}{\partial u} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_2} \cdot \sqrt{G},$$

wo $\varepsilon_1 = \pm 1$ ist und im reellen Falle so gewählt werden soll, dass D_1 positiv wird. Dabei sei dann im reellen Falle unter $\sqrt{G}$ die positive Quadratwurzel verstanden.

Wie wir schon oben fanden, ist nach (4):

$$\frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} - \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial v} = \frac{R_2 - R_1}{R_1} \cdot \frac{\partial R_1}{\partial u} \cdot (Y z_v - Z y_v)$$

oder nach XI (K), da $F = 0$ ist:

$$\frac{\partial y_1}{\partial u}\frac{\partial z_1}{\partial v} - \frac{\partial z_1}{\partial u}\frac{\partial y_1}{\partial v} = -\frac{R_2 - R_1}{R_1}\cdot\frac{\partial R_1}{\partial u}\cdot\frac{G}{D}x_u.$$

Wegen (14) ergiebt sich deshalb aus XI (F) für den Richtungscosinus X_1 der Normalen des ersten Mantels:

$$X_1 = -\varepsilon_1\frac{\sqrt{G}}{D}x_u.$$

Es ist aber $D = \sqrt{E}\cdot\sqrt{G}$, wo wir im reellen Falle beide Wurzeln positiv wählen; also kommt:

$$(15)\qquad X_1 = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E}}x_u,\quad Y_1 = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E}}y_u,\quad Z_1 = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E}}z_u.$$

Mithin ist:

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E}}x_{uu} + \frac{\varepsilon_1 E_u}{2\sqrt{E}^3}x_u,\qquad \frac{\partial X_1}{\partial v} = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E}}x_{uv} + \frac{\varepsilon_1 E_v}{2\sqrt{E}^3}x_u,$$

sodass hieraus und aus (4) nach XII (C) für die Fundamentalgrössen L_1, M_1, N_1 des ersten Mantels folgt:

$$L_1 = \varepsilon_1\,\mathbf{S}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}x_{uu} - \frac{E_u}{2\sqrt{E}^3}x_u\right)X\frac{\partial R_1}{\partial u},$$

$$M_1 = \varepsilon_1\,\mathbf{S}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}x_{uv} - \frac{E_v}{2\sqrt{E}^3}x_u\right)X\frac{\partial R_1}{\partial u},$$

$$N_1 = \varepsilon_1\,\mathbf{S}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}x_{uv} - \frac{E_v}{2\sqrt{E}^3}x_u\right)\left(X\frac{\partial R_1}{\partial v} + \frac{R_2 - R_1}{R_2}x_v\right).$$

Rechnet man diese Summen mit Hülfe von XII (A), XI (I), XVI (C) aus, so kommt, weil überdies $F = M = 0$ nach XIX (A) ist:

$$L_1 = \frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E}}L\frac{\partial R_1}{\partial u},\qquad M_1 = 0,\qquad N_1 = \tfrac{1}{2}\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E}}\frac{R_2 - R_1}{R_2}G_u$$

oder nach XIX (D):

$$L_1 = \frac{\varepsilon_1\sqrt{E}}{R_1}\frac{\partial R_1}{\partial u},\qquad M_1 = 0,\qquad N_1 = \tfrac{1}{2}\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E}}\frac{R_2 - R_1}{R_2}G_u.$$

Der Wert von N_1 lässt sich noch umformen, denn nach XIX (C) ist:

$$\tfrac{1}{2}\frac{G_u}{G} = \frac{R_1}{R_2(R_1 - R_2)}\frac{\partial R_2}{\partial u},$$

sodass wir schliesslich finden:

$$(16)\quad L_1 = \varepsilon_1\sqrt{E}\frac{\partial \log R_1}{\partial u},\qquad M_1 = 0,\qquad N_1 = -\varepsilon_1\frac{G}{\sqrt{E}}\cdot\frac{R_1}{R_2}\cdot\frac{\partial \log R_2}{\partial u}.$$

Aus $M_1 = 0$ folgt nach Satz 70, S. 186, dass die Curven (u) und (v) auf dem ersten Mantel der Centrafläche zu einander conjugiert sind. Die Curven (v) sind die oben mit γ_1 bezeichneten Curven. Eine Curve (u) wird von denjenigen Hauptkrümmungscentren C_1 gebildet, die auf den Normalen der ursprünglichen Fläche längs einer Krümmungscurve k_2 liegen. Da Entsprechendes für den zweiten Mantel der Centrafläche gilt, so folgt:

Satz 32: Auf jedem Mantel der Centrafläche sind die Curven, in deren Punkten er von den Normalen der ursprünglichen Fläche längs der Krümmungscurven berührt wird, zu einander conjugiert.

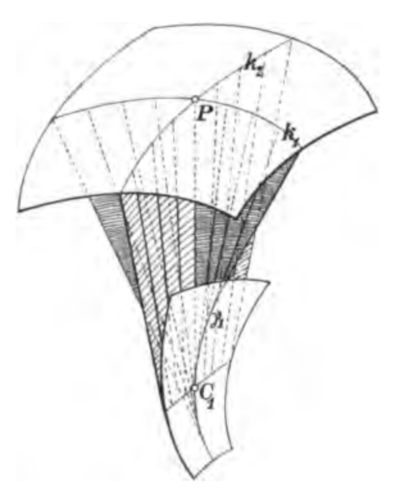


Fig. 88.

Die zu den Curven γ_1 des ersten Mantels conjugierten Curven unterscheiden sich wesentlich von den Curven γ_1: Die Curven γ_1, die geodätisch sind, haben die Normalen der ursprünglichen Fläche zu Tangenten, die anderen Curven nicht, obgleich ihre Punkte Berührungspunkte der Normalen mit dem Mantel sind. Dies soll durch Fig. 88 erläutert werden, in der eine Curve der zweiten Art auf dem ersten Mantel der Centrafläche dargestellt ist.

Nach (13) ist das Quadrat des Bogenelementes ds_1 des ersten Mantels der Centrafläche:

$$(17)\quad ds_1^{\,2} = \left(\frac{\partial R_1}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2\,\frac{\partial R_1}{\partial u}\,\frac{\partial R_1}{\partial v}\,du\,dv + \left[\left(\frac{\partial R_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}\right)^2 G\right] dv^2,$$

wofür wir auch schreiben können:

$$(18)\qquad ds_1^{\,2} = dR_1^{\,2} + \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}\right)^2 G\,dv^2.$$

Ist dieser Mantel der Centrafläche nicht ausgeartet, so ist R_1 längs der Krümmungscurven (v) oder k_1, wie wir oben sahen, nicht constant, d. h. R_1 ist eine von v unabhängige Function von u und v. Wir können daher statt u und v auch

$$(19)\qquad \bar{u} = R_1, \qquad \bar{v} = v$$

als Parameter auf diesem Mantel einführen. Alsdann stellt sich ds_1^2 nach (18) so dar:

$$ds_1^2 = d\bar{u}^2 + \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}\right)^2 G\,d\bar{v}^2, \tag{20}$$

wo wir natürlich den Factor von $d\bar{v}^2$ als Function von $\bar{u}$ und $\bar{v}$ auffassen können. Nach Satz 19, S. 440, folgt hieraus, dass die Curven $(\bar{v})$ geodätische Curven und die Curven $(\bar{u})$ ihre orthogonalen Trajectorien auf dem ersten Mantel der Centrafläche sind. Dass die Parameterlinien $(\bar{v})$, die ja nach (19) die Linien (v) oder γ_1 sind, geodätisch sind, wird also hier aufs Neue bewiesen. Die Curven $(\bar{u})$ sind nach (19) diejenigen Curven, für die R_1 constant ist. Man erhält sie, wenn man auf der ursprünglichen Fläche (1) längs einer solchen Curve fortschreitet, für deren Punkte der erste Hauptkrümmungsradius R_1 constant ist, und zwar sind sie dann die Örter der Berührungspunkte C_1 der Normalen mit dem ersten Mantel der Centrafläche.

Entsprechendes gilt auf dem zweiten Mantel. Also:

Satz 33: Beschreibt man auf einer Fläche eine Curve, für deren Punkte der erste oder zweite Hauptkrümmungsradius constant ist, so ist der Ort der zugehörigen Hauptkrümmungsmittelpunkte eine solche Curve auf dem ersten bez. zweiten Mantel der Centrafläche, die jene geodätischen Linien orthogonal schneidet, die den Krümmungscurven der ersten bez. zweiten Art entsprechen.

Wir sehen aber noch mehr: Nach Satz 19, S. 440, ist ferner $\bar{u}$ in (20) oder also R_1 die Bogenlänge der geodätischen Curven γ_1 zwischen den Curven $(\bar{u} = 0)$ und $(\bar{u})$. Da der Fall, dass $\bar{u} = R_1 = 0$ ist, im allgemeinen nicht eintritt, ist es besser, so zu sagen: Die Differenz der beiden Werte, die R_1 für zwei Punkte einer Krümmungscurve k_1 hat, ist gleich dem Bogen des zugehörigen Stückes der geodätischen Curve γ_1. Also:

Satz 34: Beschreibt ein Punkt eine Krümmungscurve der ersten oder zweiten Art auf einer Fläche, so ist die Bogenlänge der Curve des zugehörigen Hauptkrümmungsmittelpunktes auf dem ersten bez. zweiten Mantel der Centrafläche gleich der Differenz der Werte des ersten bez. zweiten Hauptkrümmungsradius für die beiden Endpunkte des Weges.

Zur Erläuterung diene die Fig. 89, S. 466, für eine Krümmungscurve k_1.

Dieser Satz 34 ist in gewissem Sinne als eine Verallgemeinerung des Satzes über Evoluten und Evolventen in der Ebene aufzufassen, nach dem die Bogenlänge der Evolute gleich der Differenz der Normalen der Evolvente in den Endpunkten ist (vgl. Satz 39, I S. 63, und (4), I S. 295).

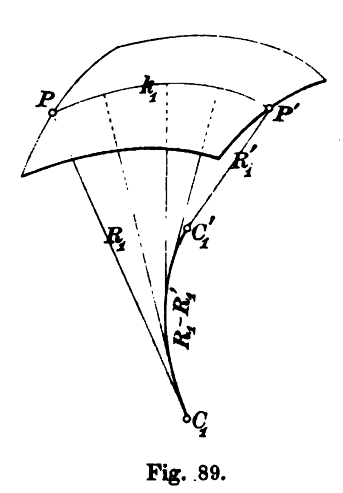


Fig. 89.

Schliesslich wollen wir noch das Krümmungsmaass K_1 für den ersten Mantel der Centrafläche berechnen. Nach XII (K) ist:

$$K_1 = \frac{L_1 N_1 - M_1^2}{D_1^2},$$

sodass aus (14) und (16) folgt:

$$(21) \qquad K_1 = -\frac{1}{(R_2 - R_1)^2} \cdot \frac{\frac{\partial R_2}{\partial u}}{\frac{\partial R_1}{\partial u}}.$$

Ein entsprechender Wert ergiebt sich für das Krümmungsmaass K_2 des zweiten Mantels, wie ja überhaupt aus den auf den ersten Mantel bezüglichen Formeln die für den zweiten gültigen Formeln einfach dadurch hervorgehen, dass man überall die Indices 1 und 2, ferner u und v, daher auch E und G und endlich L und N vertauscht, also z. B. E_1 durch G_2 ersetzt u. s. w.

In den entwickelten Formeln kommen einige Nenner vor, deren Verschwinden Anstoss erregen könnte; aber wenn wir von den Fällen, in denen der eine oder andere Mantel der Centrafläche ausartet, ganz absehen, so hat dies nichts auf sich, denn dann sind R_1, R_2 und $\frac{\partial R_1}{\partial u}$, $\frac{\partial R_2}{\partial v}$ von Null verschieden, sodass nur die Formel (21) noch zu einer Bemerkung nötigt: Hier würde sich für K_1 ein unendlich grosser Wert ergeben, wenn $R_1 = R_2$ wäre. Dann aber hätte die Fläche lauter Nabelpunkte und wäre eine Kugel, nach Satz 12, S. 120, die zu den ausgeschlossenen Canalflächen gehört.

Wegen der Werte (16) und nach XII (X) lässt sich die Differentialgleichung der Haupttangentencurven des ersten Mantels in der symmetrischen Form schreiben:

$$(22) \qquad E R_2^2 \frac{\partial R_1}{\partial u} du^2 - G R_1^2 \frac{\partial R_2}{\partial u} dv^2 = 0.$$

Analog gilt auf dem zweiten Mantel die Gleichung:

$$(23) \qquad E R_2^2 \frac{\partial R_1}{\partial v} du^2 - G R_1^2 \frac{\partial R_2}{\partial v} dv^2 = 0$$

für die Haupttangentencurven.

Zum Schluss wollen wir die Formeln über Centraflächen auf eine besonders interessante Flächenfamilie anwenden, nämlich auf diejenigen Flächen, die wir schon in § 11 des 3. Abschnittes betrachtet haben.

Beispiel: Es bestehe auf der ursprünglichen Fläche (1) eine Relation

$$(24) \qquad \Omega(R_1, R_2) = 0$$

zwischen ihren Hauptkrümmungsradien. Alsdann sind R_1 und R_2 von einander abhängige Functionen von u und v, für die also die Functionaldeterminante (vgl. I S. 81) gleich Null ist:

$$(25) \qquad \frac{\partial R_1}{\partial u} \frac{\partial R_2}{\partial v} - \frac{\partial R_2}{\partial u} \frac{\partial R_1}{\partial v} = 0.$$

Da nun das Krümmungsmaass K_2 des zweiten Mantels der Centrafläche analog (21) den Wert

$$K_2 = -\frac{1}{(R_1 - R_2)^2} \cdot \frac{\frac{\partial R_1}{\partial v}}{\frac{\partial R_2}{\partial v}}$$

hat, so folgt aus (25), dass

$$K_1 K_2 = \frac{1}{(R_1 - R_2)^4}$$

ist. In (22) und (23) haben wir ferner die Differentialgleichungen der Haupttangentencurven auf beiden Mänteln der Centrafläche aufgestellt. Nach (25) sind diese beiden Gleichungen jetzt mit einander identisch. Daher haben wir den

Satz 35: Besteht auf einer Fläche eine Relation zwischen ihren Hauptkrümmungsradien, so ist das Product der Krümmungen ihrer beiden Centraflächenmäntel in solchen Punkten, die auf derselben Normalen der Fläche liegen, gleich dem reciproken Wert der vierten Potenz der Differenz der beiden Radien. Ausserdem liegen die Haupttangentencurven auf beiden Mänteln so, dass diejenigen Normalen, die nach den Punkten einer Haupttangentencurve des einen Mantels gehen, auch auf dem anderen Mantel eine Haupttangentencurve bestimmen.

Wir sahen ferner, dass wir das Quadrat des Bogenelementes ds_1 des ersten Mantels der Centrafläche durch Einführung der in (19) angegebenen Parameter $\bar{u}$, $\bar{v}$ auf die Form (20) bringen können. Wegen (24) ist aber jetzt R_2 eine gewisse Function von R_1:

$$(26) \qquad R_2 = \varphi(R_1),$$

und ausserdem kann nach (9), S. 360, G als Function von R_1 und R_2, also auch als Function von R_1 allein aufgefasst werden, sodass wegen $R_1 = \bar{u}$ aus (20) folgt:

$$(27) \qquad d s_1^2 = d \bar{u}^2 + \psi(\bar{u}) d \bar{v}^2 .$$

Nun gehören zu ein und derselben Relation (24) unendlich viele Flächen. Aber bei allen ist die Function φ dieselbe, also lässt sich für alle das Quadrat des Bogenelementes des ersten Mantels der Centrafläche auf eine gemeinsame Form (27) bringen. Nach Satz 5, S. 275, sind daher diese ersten Mäntel der Centraflächen aller jener unendlich vielen Flächen auf einander verbiegbar. Dasselbe gilt natürlich für die zweiten Mäntel. Demnach folgt

Satz 36: Besteht auf zwei Flächen dieselbe Relation zwischen ihren Hauptkrümmungsradien, so sind ihre Centraflächen auf einander verbiegbar, und zwar entsprechende Mäntel auf einander.

Aber noch mehr: Die Form (27) erinnert an das Quadrat des Bogenelementes einer Rotationsfläche. Sind nämlich:

$$\bar{x} = p(\bar{u}) \cos \bar{v}, \qquad \bar{y} = p(\bar{u}) \sin \bar{v}, \qquad \bar{z} = \int \sqrt{1 - p'(\bar{u})}\, d\bar{u}$$

die Gleichungen einer Rotationsfläche wie in Satz 16, S. 296, so ist

$$d \bar{s}^2 = d \bar{u}^2 + p^2(\bar{u}) d \bar{v}^2$$

das Quadrat ihres Bogenelementes $d\bar{s}$. Wir können nun $p(\bar{u})$ so wählen:

$$p(\bar{u}) = \sqrt{\psi(\bar{u})} .$$

Alsdann stimmt die Form (27) von $d s_1^2$ mit der von $d \bar{s}^2$ überein, sodass der schon einmal citierte Satz 5, S. 275, ergiebt:

Satz 37: Besteht auf einer Fläche eine Relation zwischen ihren Hauptkrümmungsradien, so ist jeder der beiden Mäntel ihrer Centrafläche auf je eine Rotationsfläche verbiegbar. Dabei gehen die geodätischen Curven des ersten Mantels, die den Krümmungscurven erster Art der Fläche entsprechen, in die Meridiane und diejenigen Curven des ersten Mantels, die den Orten gleichen Wertes des ersten Hauptkrümmungsradius zugehören, in die Breitenkreise der einen Rotationsfläche über; und für den zweiten Mantel lässt sich Entsprechendes aussagen.[1]

Denn man hat nur zu bedenken, dass die Curven $(\bar{u})$ nach (19) denjenigen Curven der ursprünglichen Fläche entsprechen, für die $R_1 = \text{Const.}$ ist, und dass die Curven $(\bar{v})$ nach (19) die geodätischen Curven (v) des ersten Mantels sind, die wir als die Curven γ_1 bezeichnet hatten.

---

[1] Theorem von Weingarten, von dem überhaupt die angegebenen Sätze über diese sogenannten Weingarten'schen Flächen herrühren. Vgl. die Anm. zu S. 355.

§ 6. Geradenscharen, die als Normalenscharen aufgefasst werden können.

In gewissem Sinne ist die Centrafläche einer Fläche die natürliche Verallgemeinerung des aus der Theorie der ebenen Curven geläufigen Begriffes der Evolute einer Curve. In der Ebene haben wir damals auch die Umkehrung untersucht: Zu einer gegebenen Evolute die Evolvente zu finden. (Vgl. I S. 65.) Entsprechend giebt es auch in der Flächentheorie eine Umkehrung:

Zu einer gegebenen Centrafläche die zugehörige Urfläche zu bestimmen.

Doch dies Problem lässt sich verschiedenartig fassen: Da nämlich die Centrafläche aus zwei Mänteln besteht, so kann man entweder annehmen, beide Mäntel seien gegeben, oder man kann annehmen, dass nur ein Mantel gegeben sei.

Wir betrachten zunächst das erste Problem: Es seien beide Mäntel der Centrafläche gegeben, gesucht wird die Urfläche. In diesem Falle kann man ohne Mühe die Normalen der Urfläche finden, da sie beide Mäntel der Centrafläche berühren müssen. Wir wählen nämlich auf dem einen Mantel einen Punkt C_1 beliebig. Dann muss es eine Normale der Urfläche geben, die den Mantel in C_1 berührt, also in der Tangentenebene von C_1 liegt. Diese Tangentenebene schneidet den zweiten Mantel in einer Curve, und die gesuchte von C_1 ausgehende Normale muss auch den zweiten Mantel, mithin diese Curve berühren. Von C_1 wird nun im allgemeinen eine Tangente oder eine endliche Anzahl von Tangenten an die Curve gehen. Unter ihnen muss die gesuchte Normale enthalten sein.

Man sieht so, dass es leicht ist, diejenigen Geraden zu bestimmen, die Normalen der gesuchten Fläche sein könnten. Da der eine Mantel ∞^2 Punkte C_1 enthält, erhalten wir gerade ∞^2 Geraden, ebenso viele wie es Normalen geben müsste. Die Frage ist also jetzt auf die andere Frage zurückgeführt:

Unter welchen Bedingungen ist eine stetige Schar von ∞^2 Geraden als die Schar der Normalen einer Fläche aufzufassen?

Hätten wir diese Frage beantwortet, so würden wir die Bedingungen auf die soeben construierte Geradenschar anwenden. Wären sie erfüllt, so würden wir die Flächen zu suchen haben, die die Geraden der Schar senkrecht schneiden.

Man sieht hieraus, dass die Schwierigkeit des Problems einmal in der soeben formulierten Frage und dann in der zweiten Frage liegt, wie man die Flächen bestimmt, die die ∞^2 Geraden zu Normalen haben. Wir legen uns daher das Problem vor:

Gegeben sei eine stetige Schar von ∞^2 Geraden; gefragt wird, ob sie die Normalen einer Fläche sein können und, wenn sie es sind, wie man diese Fläche findet.

Eine stetige Schar von ∞^2 Geraden nennt man auch (vgl. I S. 141) ein Strahlensystem.[1] Wir fragen also nach den Bedingungen, unter denen ein Strahlensystem das Normalensystem einer Fläche ist. Dabei sehen wir von vornherein selbstverständlich von dem Falle ab, dass die Geraden des Strahlensystems Minimalgeraden seien.

Eine Gerade mit der Richtungscosinus f, g, h kann, wenn $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ ein bestimmter Punkt auf ihr ist, in den laufenden Coordinaten x, y, z mittels eines Parameters t so dargestellt werden:

$$(1) \qquad x = \mathfrak{x} + f t, \quad y = \mathfrak{y} + g t, \quad z = \mathfrak{z} + h t.$$

In (1) liegen ∞^2 Geraden, also ein Strahlensystem, vor, sobald wir unter $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, f, g, h$ Functionen von zwei Parametern u und v verstehen. Denn dann gehören zu jedem Wertepaar u, v bestimmte Werte von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}, f, g, h$, also auch eine bestimmte Gerade (1). Da wir insbesondere unter f, g, h die Richtungscosinus

---

[1] Die Strahlensysteme wurden zuerst von Malus systematisch untersucht, siehe seine Note: „Optique“ in der Correspondance de l'École polyt. I (1806) und seine Abhandlung: „Optique“ im Journal de l'École polyt., 14. cah. (1808). Insbesondere fand er, dass sich die Geraden eines Strahlensystems in zwei Weisen zu Scharen von je ∞^1 Geraden zusammenfassen lassen, die abwickelbare Flächen erzeugen, also so, wie es bei der Normalen einer Fläche der Fall ist, wenn man die Normalen längs je einer Krümmungscurve herausgreift (vgl. die Fig. 86 auf S. 456). Die Gratlinien dieser abwickelbaren Flächen bilden auch bei beliebigen Strahlensystemen zwei Flächenmäntel, die sogenannten Brennflächen. Malus fand so, dass die Geraden eines jeden Strahlensystems Doppeltangenten einer aus zwei Mänteln bestehenden Fläche sind. Wenn insbesondere jene beiden Scharen von abwickelbaren Flächen einander senkrecht schneiden, so liegt ein Strahlensystem vor, das das Normalensystem einer Fläche ist. Man könnte dem Satze 38 auf S. 472 diese begriffliche Deutung geben. Sie wurde ebenfalls von Malus erkannt, aber erst von Bertrand, „Mémoire sur la théorie des surfaces“, Journ. de Math. pures et appl., 1. série t. IX (1844), vollständig ausgesprochen und bewiesen.

der Geraden verstehen wollten, so können wir uns dabei auf solche Functionen f, g, h von u und v beschränken, für die

$$f^2 + g^2 + h^2 = 1 \tag{2}$$

ist.

Soll es eine Fläche geben, die die ∞^2 Geraden (1) zu Normalen hat, so muss auf jeder Geraden (1) ein Punkt der Fläche liegen. Nun wird ein Punkt (x, y, z) auf der Geraden (1) durch die Angabe des Wertes des Parameters t festgelegt, der nebenbei bemerkt den Abstand des Punktes (x, y, z) vom Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z})$ vorstellt. Die Gerade (1) selbst wird durch ein Wertepaar u, v festgelegt. Für jede einzelne der ∞^2 Geraden (1), d. h. für jedes einzelne Wertepaar u, v, wird jener Abstand t für den fraglichen Fusspunkt (x, y, z) der Normalen einen besonderen Wert haben; mit anderen Worten: Wir haben unter t eine noch unbekannte Function von u und v zu verstehen, sodass x, y, z in (1) Functionen von u und v allein werden.

Die Frage ist jetzt diese: Können wir für t eine Function von u und v setzen, sodass alle durch (1) bestimmten Punkte (x, y, z) eine solche Fläche in den Parametern u, v erfüllen, deren Normalen die gegebenen Richtungscosinus f, g, h haben? Wenn t in (1) als Function von u und v aufgefasst wird, so ist also zu fordern, dass

$$\mathbf{S}\, x_u f = 0, \quad \mathbf{S}\, x_v f = 0$$

sei, wo sich die Summenzeichen natürlich auch auf die cyklische Vertauschung von f, g, h beziehen. Nun aber ist nach (1):

$$x_u = \mathfrak{x}_u + f t_u + f_u t, \quad x_v = \mathfrak{x}_v + f t_v + f_v t,$$

sodass die Bedingungen diese werden:

$$\mathbf{S}(\mathfrak{x}_u + f t_u + f_u t) f = 0, \quad \mathbf{S}(\mathfrak{x}_v + f t_v + f_v t) f = 0.$$

Es ist jedoch nach (2) sowohl $\mathbf{S}\, f^2 = 1$ als auch $\mathbf{S}\, f f_u = \mathbf{S}\, f f_v = 0$, sodass bleibt:

$$t_u = - \mathbf{S}\, \mathfrak{x}_u f, \quad t_v = - \mathbf{S}\, \mathfrak{x}_v f. \tag{3}$$

In diesen beiden Gleichungen stehen rechts g e g e b e n e Functionen von u und v, links die partiellen Ableitungen einer Function t von u und v, deren Vorhandensein gefordert wird und die dann und nur dann wirklich vorhanden ist, wenn die Werte (3) von t_u und t_v der Bedingung

$$\frac{\partial t_u}{\partial v} = \frac{\partial t_v}{\partial u}$$

genügen, d. h. wenn

$$\frac{\partial}{\partial v}\mathbf{S}\mathfrak{x}_u f = \frac{\partial}{\partial u}\mathbf{S}\mathfrak{x}_v f \tag{4}$$

ist. Ist diese Bedingung für alle Werte von u und v erfüllt, so folgt aus (3) durch Quadratur:

$$t = -\int(\mathbf{S}\mathfrak{x}_u f\,du + \mathbf{S}\mathfrak{x}_v f\,dv) + \text{Const.} \tag{5}$$

Wird dieser Wert in (1) eingesetzt, so giebt (1) die Gleichung einer Fläche, die die gegebenen ∞^2 Geraden zu Normalen hat.

Da in (5) noch eine additive willkürliche Constante auftritt, so giebt es, wenn überhaupt eine Fläche der gewünschten Art vorhanden ist, deren sogar ∞^1, die aus der einen Fläche dadurch hervorgehen, dass man auf ihren Normalen, den Geraden (1), noch ein constantes Stück aufträgt, also Flächen, die die Parallelflächen der einen Fläche sind. Dies war nach Satz 83, S. 205, vorauszusehen.

Die Bedingung (4), die Bedingung dafür, dass die in (3) angegebenen Werte von t_u und t_v so beschaffen sind, dass $t_u\,du + t_v\,dv$ ein vollständiges Differential in u und v ist, kann auch so ausgesprochen werden: Es muss der in (5) unter dem Integralzeichen stehende Ausdruck ein vollständiges Differential sein. Und dieser Ausdruck lässt sich kürzer so schreiben:

$$\mathbf{S}f\,d\mathfrak{x}.$$

Also haben wir den

Satz 38:[1] Ist eine Schar von ∞^2 Geraden, die keine Minimalgeraden sind, dadurch gegeben, dass in den Gleichungen einer Geraden mit den laufenden Coordinaten x, y, z und dem Parameter t:

$$x = \mathfrak{x} + ft, \quad y = \mathfrak{y} + gt, \quad z = \mathfrak{z} + ht$$

die Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ eines Punktes der Geraden und die Richtungscosinus f, g, h der Geraden als Functionen zweier Parameter u und v angenommen werden, wobei also

$$f^2 + g^2 + h^2 = 1$$

ist, so ist die Schar dann und nur dann die Schar der Normalen einer Fläche, wenn der Ausdruck

$$f\,d\mathfrak{x} + g\,d\mathfrak{y} + h\,d\mathfrak{z}$$

[1] Satz von Hamilton, „Supplements to an essay on the theory of systems of rays“, Transactions of the R. Irish Acad., vol. 16 (1830).

ein vollständiges Differential in u und v ist. Es giebt dann ∞^1 parallele Flächen, die alle jene ∞^2 Geraden senkrecht schneiden. Analytisch werden sie in den laufenden Coordinaten x, y, z mittels der Parameter u, v dargestellt, wenn der durch Quadratur hervorgehende Wert

$$t = -\int (f\,d\mathfrak{x} + g\,d\mathfrak{y} + h\,d\mathfrak{z}) + \text{Const.}$$

in die Gleichungen der Geraden eingesetzt wird.

Wir erinnern beiläufig daran, dass wir schon auf S. 168 hervorgehoben haben, dass nicht jede Schar von ∞^2 Geraden als die Schar der Normalen einer Fläche aufgefasst werden kann.

Beispiel: Vorgelegt seien ∞^2 Geraden, die sämtlich eine Curve treffen, die keine Minimalcurve ist. Die Gleichungen der Curve seien in den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und mittels der Bogenlänge u gegeben:

$$(6) \qquad \mathfrak{x} = \varphi(u), \qquad \mathfrak{y} = \chi(u), \qquad \mathfrak{z} = \psi(u).$$

Von jedem Punkte (u) dieser Curve sollen also ∞^1 gegebene Geraden ausgehen, deren Richtungscosinus f, g, h also ausser von u noch von einem zweiten Parameter v abhängen. Wählen wir f, g, h als Functionen von u und v so, dass die Bedingung (2) erfüllt ist, so stellt (1) die ∞^2 Geraden dar, vorausgesetzt, dass darin für $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Werte (6) eingesetzt werden. Jetzt sind $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{y}_u$, $\mathfrak{z}_u$ die Richtungscosinus α, β, γ der Tangente der Curve (6), nach III (B), während $\mathfrak{x}_v = \mathfrak{y}_v = \mathfrak{z}_v = 0$ ist, sodass die Bedingung (4) so lautet:

$$\frac{\partial}{\partial v} \mathrm{S}\,\alpha f = 0.$$

Nun ist $\mathrm{S}\,\alpha f$ der Cosinus des Winkels, den die zu u, v gehörige Gerade mit der Tangente der Curve (6) in ihrem Ausgangspunkte (u) auf der Curve bildet. Er soll hiernach frei von v sein, d. h. die von ein und demselben Punkte (u) der Curve (6) ausgehenden ∞^1 Geraden der Schar sollen sämtlich mit der Tangente dieses Punktes denselben Winkel bilden. Dieser Winkel darf sich aber ändern, wenn der Punkt (u) auf der Curve (6) fortschreitet. Die Geraden des Strahlensystems müssen demnach ∞^1 Rotationskegel bilden, deren Spitzen eine Curve (6) und deren Axen die zugehörigen Tangenten der Curve (6) sein müssen. Nur dann giebt es Flächen, die jene Geraden zu Normalen haben. Da die Rotationskegel abwickelbar sind, so sind ihre Schnittcurven mit den Flächen nach Satz 54, S. 176, Krümmungscurven. Der eine Mantel der Centrafläche ist daher die Curve (6). Wir kommen somit zu den auf S. 461 betrachteten Canalflächen.

Wenn die Schar der ∞^2 Geraden aus allen denjenigen Geraden besteht, die zwei gegebene Curven treffen, so folgt hieraus, dass die von einem Punkt einer jeden der beiden Curven ausgehenden Geraden, die die andere Curve treffen, einen Rotationskegel bilden müssen, wenn anders das Strahlensystem ein Normalensystem sein soll. Jede der beiden Curven liegt dann auf unendlich vielen Rotationskegeln und ist folglich ein Kegelschnitt. Um also alle Flächen zu finden, die in doppelter Weise Canalflächen sind, hat

man zwei Kegelschnitte c und k so zu bestimmen, dass jeder der Kegel, der von irgend einem Punkte der einen Curve ausgeht und die andere Curve enthält, ein Rotationskegel wird. Solche Paare von Kegelschnitten giebt es bekanntlich, wie in der analytischen Geometrie gelehrt wird. Ist z. B. c eine Ellipse, so ist k diejenige Hyperbel, deren Ebene die Ebene der Ellipse senkrecht längs der grossen Axe der Ellipse schneidet, deren Brennpunkte die Hauptscheitel der Ellipse und deren Scheitel die Brennpunkte der Ellipse sind. Die Geraden, die zwei solche Kegelschnitte, sogenannte Focalkegelschnitte, treffen, sind also die Normalen derjenigen Flächen, die in doppelter Weise als Canalflächen aufgefasst werden können oder deren beide Centraflächenmäntel in Curven ausgeartet sind. Nach Satz 30 und 31, S. 461, 462, werden diese Flächen von zwei Scharen von je ∞^1 Kugeln umhüllt, und die Krümmungscurven jeder Schar sind Kreise. Die Kugeln haben ihre Mitten auf den beiden Focalkegelschnitten. Man nennt diese Flächen, die in doppelter Weise als Canalflächen aufgefasst werden können, Cykliden.[1] Ist der eine Kegelschnitt ein Kreis, so ist der andere das Mittellot zur Kreisebene, die Flächen sind dann solche Flächen, die je eine um jenes Mittellot rotierende Kugel umhüllen, die sogenannten Ringflächen. Sie können auch als die Rotationsflächen definiert werden, die durch Drehung eines Kreises um eine in seiner Ebene liegende Gerade hervorgehen. Wir wollen auf die Theorie der Cykliden nicht weiter eingehen und nur noch bezüglich der Gestalt der Cykliden bemerken, dass sie allgemein ringförmig sind, wenn auch keine Rotationsflächen, und dass die Stärke des Canals an einer Stelle des Ringes ein Maximum, gegenüber ein Minimum hat.

Wir wollen uns jetzt zu dem zweiten oben angedeuteten Problem wenden:

Es liege nur eine Fläche gegeben vor; gefragt wird, ob es Flächen giebt, für die diese eine Fläche der eine Mantel der Centrafläche ist.

Nach Satz 28, S. 458, müssen den Krümmungscurven der einen Schar der gesuchten Fläche geodätische Curven auf der gegebenen Fläche entsprechen. Wir werden daher annehmen, es sei auf der gegebenen Fläche eine Schar von geodätischen Curven ausgewählt und das zugehörige geodätische Parametersystem (vgl. S. 441) eingeführt, sodass das Quadrat des Bogenelementes der gegebenen Fläche die Form:

$$ds^2 = du^2 + G(u,v)\,dv^2 \tag{7}$$

habe. Die Curven (v) sind dann die geodätischen Curven. Ihre Tangenten müssten nun die Normalen der gesuchten Fläche sein.

Umgekehrt ist es klar, dass, wenn es eine Fläche giebt, die diese Tangenten zu Normalen hat, alsdann die gegebene Fläche der

[1] Die Cykliden wurden von Dupin entdeckt und untersucht. Siehe seine „Applications de géométrie et de méchanique à la marine et aux ponts et chaussées", Paris 1822.

eine Mantel der Centrafläche ist, denn dann bilden ja die Normalen längs einer solchen Curve der fraglichen Fläche, die einer der geodätischen Curven (v) entspricht, eine abwickelbare Fläche, sodass die Curve nach Satz 54, S. 176, eine Krümmungscurve ist, für die die Hauptkrümmungscentra der einen Art die geodätische Curve bilden.

Unser Problem kommt also auf das in Satz 38 erledigte Problem zurück. Um es mit Hülfe dieses Satzes zu beantworten, wollen wir die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte der gegebenen Fläche mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnen. Die vom Punkte (u, v) oder ($\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$) ausgehende Tangente der geodätischen Curve (v) habe dann die Richtungscosinus f, g, h. Es ist:

$$f:g:h = \mathfrak{x}_u : \mathfrak{y}_u : \mathfrak{z}_u,$$

also, da $\mathfrak{x}_u^2 + \mathfrak{y}_u^2 + \mathfrak{z}_u^2$ als Fundamentalgrösse erster Ordnung nach (7) gleich Eins ist, direct:

$$f = \mathfrak{x}_u, \quad g = \mathfrak{y}_u, \quad h = \mathfrak{z}_u,$$

sodass die Bedingung des Satzes 38 oder (4) so lautet:

$$\frac{\partial}{\partial v} \mathbf{S}\,\mathfrak{x}_u^2 = \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{S}\,\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v.$$

Die Summe links ist aber, wie schon soeben gesagt wurde, gleich Eins und die Summe rechts nach (7) als Fundamentalgrösse erster Ordnung gleich Null. Also ist die Bedingung erfüllt. Daher folgt:

Satz 39: Eine beliebige Fläche kann auf unendlich viele Arten als der eine Mantel der Centrafläche einer anderen Fläche aufgefasst werden. Wenn man nämlich auf der Fläche eine Schar von ∞^1 geodätischen Curven beliebig auswählt, so sind ihre ∞^2 Tangenten die Normalen von ∞^1 Parallelflächen, für die die gegebene Fläche der eine Mantel der Centrafläche ist. Die Krümmungscurven der einen Schar auf den Parallelflächen sind die Filarevolventen der ausgewählten geodätischen Curven.

Das Letztere folgt unmittelbar aus der Definition der Filarevolventen in I S. 295, 296.

§ 7. Krümmung und Torsion einer Flächencurve.

Nachdem wir bisher eine Reihe von besonderen Curvenarten auf einer Fläche besprochen haben, nämlich die Minimalcurven, die Krümmungscurven, die Haupttangentencurven und schliesslich die

geodätischen Curven, wollen wir jetzt als Abschluss unserer flächentheoretischen Betrachtungen beliebige Curven auf der Fläche ins Auge fassen.

Es seien u, v die Parameter auf der Fläche, E, F, G, L, M, N ihre Fundamentalgrössen und X, Y, Z die Richtungscosinus der Normale. Wenn wir nun u und v als Functionen eines neuen Parameters t irgendwie wählen, so wird dadurch nach S. 11 eine Curve auf der Fläche definiert. Das Bogenelement ds dieser Curve von der Stelle (t) bis zur Stelle $(t + dt)$ wird dann aus

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2$$

bestimmt, wo du und dv die Incremente der Functionen u und v von t bedeuten, die zu dem Zuwachs dt von t gehören. Es ist also die Bogenlänge der Curve vom Punkte $(t = 0)$ bis zu einem beliebigen Punkte (t):

$$(1) \qquad s = \int_0^t \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\,\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Hierbei hat man sich in E, F, G für u und v immer die Functionen von t gesetzt zu denken. Durch diese Formel wird s als Function von t definiert. Denken wir uns die Quadratur ausgeführt und die Gleichung dann nach t aufgelöst, so wird sich t als Function von s darstellen. Setzen wir diese Function t von s in u und v für t ein, so ergeben sich u und v als Functionen der Bogenlänge s der Curve.

Man sieht, dass der Parameter t selbst die Bogenlänge ist, sobald das Integral den Wert $\pm t$ hat, d. h. sobald für alle Werte von t

$$E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\,\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 1$$

ist.

Wir wollen nun voraussetzen, wir hätten u und v in der angegebenen Weise als Functionen der Bogenlänge s der Curve bestimmt. Alsdann soll die Differentiation nach der Bogenlänge durch Striche angedeutet werden. Wir haben dann nach der letzten Formel:

$$(2) \qquad E u'^2 + 2F u' v' + G v'^2 = 1$$

für alle Werte von s. Indem wir wie in der Curventheorie im ersten Bande die Curve im reellen Falle im Sinne wachsender Bogenlänge s durchlaufen, sind die Richtungscosinus α, β, γ; l, m, n;

λ, μ, ν ihrer Tangente, Haupt- und Binormale an der Stelle (s) oder (u, v) völlig definiert (vgl. I S. 174 u. f.). Wie in I S. 179 rechnen wir dabei die Krümmung $1:r$ der Curve stets positiv.

Dies scheint in Widerspruch mit der Festsetzung zu stehen, die wir auf S. 104 trafen. Aber damals kam es uns mehr darauf an, die Art der Krümmung der Fläche an einer Stelle, nicht die Art der Krümmung der Curven auf der Fläche zu erkennen, und deshalb war es damals zweckmässig, die in der Curventheorie getroffene Festsetzung für den Augenblick aufzuheben. Oder auch so: Damals haben wir mit r nicht den Krümmungsradius der Curve bezeichnet, der eben in der Curventheorie als stets positiv angenommen wurde, sondern den Abstand des Krümmungsmittelpunktes vom betrachteten Curvenpunkte, und zwar rechneten wir dabei diesen Abstand positiv oder negativ, je nachdem der Krümmungsmittelpunkt auf der positiven oder negativen Seite der Tangentenebene der Fläche lag. Ja, wir haben es damals ausdrücklich hervorgehoben, dass in den abzuleitenden Formeln r nur seinem absoluten Werte nach den Krümmungsradius bedeute.

Jetzt also soll r wieder wie in der Curventheorie den absolut genommenen Krümmungsradius der Curve vorstellen. Ferner sei ω der Winkel der (positiven) Hauptnormale der Curve mit der (positiven) Flächennormale und zwar gemessen im Sinne der Drehung von der Hauptnormale zur Binormale hin. Die Formel (4), S. 103, gilt auch jetzt; sie wurde ja vor jener besonderen Festsetzung aufgestellt. Sie kann nach XII (A) so geschrieben werden:

$$\frac{\cos\omega}{r} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}$$

oder auch, da u und v Functionen von s sind, für die (2) gilt,

$$\frac{\cos\omega}{r} = Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2. \tag{3}$$

Dieser Ausdruck hat eine geometrische Bedeutung, die bisher noch nicht zur Sprache gekommen ist. Um diese Bedeutung abzuleiten, stellen wir jedoch vorher einen Satz über die Krümmung der Projection einer Curve auf: Sind

$$x = \varphi(s), \quad y = \chi(s), \quad z = \psi(s)$$

die Gleichungen einer Raumcurve c, ausgedrückt mittels der Bogenlänge s, so hat die senkrechte Projection $\bar{c}$ der Curve auf eine Ebene, z. B. auf die xy-Ebene, die Gleichungen:

$$\bar{x} = \varphi(s), \quad \bar{y} = \chi(s), \quad \bar{z} = 0,$$

in denen der Parameter s aber nicht mehr die Rolle der Bogenlänge spielt. Sind α, β, γ; l, m, n; λ, μ, ν die Richtungscosinus der Tangente, Haupt- und Binormale der Curve an der Stelle (s), so ist das Bogenelement $d\bar{s}$ der Projection $\bar{c}$ gleich dem Bogenelement ds der Curve c multipliciert mit γ. Wir wollen insbesondere annehmen, dass die Ebene, auf die wir die Curve c projicieren, der Tangente der betrachteten Stelle parallel sei; auch rechnen wir die Bogenlänge der Projection $\bar{c}$ im selben Sinne wie die der Curve c, sodass wir $\gamma = +1$ und $d\bar{s} = ds$ finden. Da $\bar{x}, \bar{y}$ mit x, y übereinstimmen, so folgt dann auch, dass an der betrachteten Stelle — mit Rücksicht auf III (B) —

$$\bar{\alpha} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{s}} = \frac{dx}{ds} = \alpha, \qquad \bar{\beta} = \beta, \qquad \text{aber } \bar{\gamma} = 0,$$

also auch:

$$\frac{\bar{l}}{\bar{r}} = \frac{d^2\bar{x}}{d\bar{s}^2} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{l}{r}, \qquad \frac{\bar{m}}{\bar{r}} = \frac{m}{r}, \qquad \text{aber } \bar{n} = 0$$

ist, wenn die überstrichenen Buchstaben für die Projection $\bar{c}$ gelten und wenn $1:r$ die Krümmung der Curve c an der betrachteten Stelle bedeutet. Quadrieren und Addieren der drei letzten Gleichungen giebt, weil $l^2 + m^2 = 1 - n^2$ ist:

$$\frac{1}{\bar{r}^2} = \frac{1 - n^2}{r^2}.$$

Dabei ist n der Cosinus des Winkels, den die Hauptnormale der betrachteten Stelle mit der zur Projectionsebene senkrechten z-Axe bildet. Nun haben wir zwar, wie wir vorhin hervorhoben, die Krümmung bei reellen Raumcurven positiv angenommen, jedoch haben wir bei **ebenen** Curven der Krümmung ein Vorzeichen beigelegt, sobald wir die Ebene der Curve von einer bestimmten Seite her — die xy-Ebene von der z-Axe her — betrachten.[1] Das Vorzeichen hing davon ab, ob der Contingenzwinkel, der im Sinne der Drehung von der x-Axe zur y-Axe, also im Sinne der positiven Drehung um die z-Axe gemessen wird, zunahm oder abnahm, sobald die Curve in dem ihr vorgeschriebenen Sinne durchlaufen wurde (vgl. I S. 37). Dies Vorzeichen wollen wir nun bei der Projection $\bar{c}$ der Raumcurve c auf die Ebene berücksichtigen. Die Figg. 90, 91, in denen die Projectionstafel statt parallel zur Tangente der betrachteten Stelle P direct durch die Tangente t der Stelle

[1] Man vergleiche hierzu die Anmerkung zu I S. 189.

gelegt worden ist, was ja nichts wesentliches ausmacht, lehren nun unmittelbar, dass die Krümmung der Projection $\bar{c}$ in P positiv oder negativ ist, je nachdem die positive Normale der Tafel, d. h. also diejenige Normale, von der aus die Projection betrachtet wird, auf

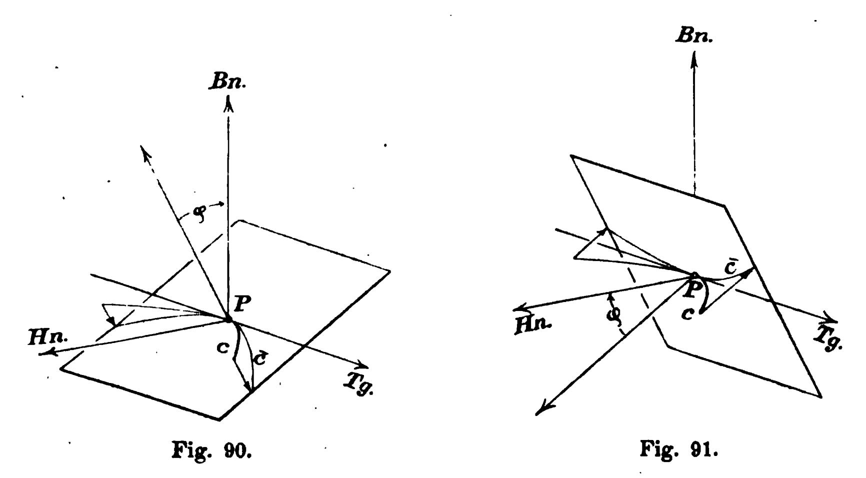


Fig. 90. Fig. 91.

derselben Seite der Schmiegungsebene liegt wie die Binormale oder nicht, je nachdem also der Winkel φ der positiven Normale der Ebene mit der positiven Binormale $\lesseqgtr \frac{1}{2}\pi$ ist. Nun ist $n^2 = \sin^2\varphi$, also giebt unsere letzte Formel:

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{\cos\varphi}{r},$$

und diese Formel ist jetzt auch im Vorzeichen exact.

Wir können mithin den folgenden Hülfssatz aufstellen:

Satz 40: Wird eine Curve auf eine zur Tangente einer Stelle P parallele Ebene senkrecht projiciert und bildet die Binormale dieser Stelle mit der Normale der Ebene den Winkel φ, so ist die Krümmung $1:\bar{r}$ der Projection von P gleich der Krümmung $1:r$ von P selbst multipliciert mit dem Cosinus von φ:

$$\frac{1}{\bar{r}} = \frac{\cos\varphi}{r},$$

und zwar giebt diese Formel im reellen Falle auch das für ebene Curven festgesetzte Vorzeichen der Krümmung $1:\bar{r}$, sobald die Projection der Raumcurve in demselben Sinne wie die Raumcurve selbst durchlaufen und überdies die Ebene von derjenigen Seite her betrachtet wird, auf

der jene Normale liegt, die mit der Binormale den Winkel φ bildet.

Wir wenden diesen Satz nun auf die Flächencurve an, für die wir oben die Formel (3) aufgestellt haben. Wird die Flächencurve auf diejenige Ebene projiciert, die durch die Tangente des Curvenpunktes P oder (u, v) und durch die Flächennormale geht, so ist die Normale dieser Ebene in P die zu jener Tangente der Curve senkrechte Flächentangente. Wir wollen diese Normale in dem Sinne positiv nennen, dass die positive Curventangente, die positive Flächennormale und diese Normale zur Ebene so wie die Coordinatenaxen gegen einander orientiert sind. (Siehe Fig. 92.) Dann bildet die Normale der Ebene mit der Binormale den Winkel ω, sodass die Formel (3) nach unserem Satze die Krümmung der Projection der Curve auf die Ebene durch die Tangente und Flächennormale, auch ihrem Vorzeichen nach, darstellt. Deshalb nennt man diesen Ausdruck (3) auch die normale Krümmung der Flächencurve in dem Punkte P oder (u, v).

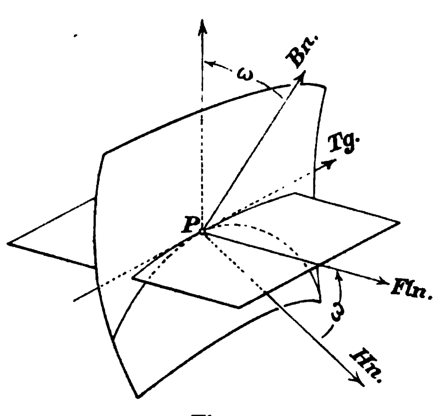


Fig. 92.

Zweitens wollen wir die Flächencurve auf die Tangentenebene der Fläche an der Stelle P projicieren. Diese Ebene betrachten wir natürlich von der positiven Flächennormale her. Da der Winkel ω der Flächennormale mit der Hauptnormale im Sinne der Drehung von der positiven Hauptnormale zur positiven Binormale gemessen worden ist, so ist der Cosinus des Winkels, den die Binormale mit der Flächennormale bildet, gleich $\sin \omega$, sodass nach unserem Satze

$$\frac{\sin \omega}{r}$$

die mit Vorzeichen versehene Krümmung der Projection der Flächencurve auf die Tangentenebene des Punktes P für diese Stelle P selbst ist. Man nennt diesen Ausdruck deshalb die tangentiale Krümmung der Flächencurve in dem Punkte P oder (u, v). Wir wollen sie berechnen.

Da die Flächennormale die Cosinus X, Y, Z, die Binormale die

Cosinus λ, μ, ν hat, so ist der Cosinus des Winkels beider, also $\sin\omega$, so auszudrücken:

(4) $$\sin\omega = \mathbf{S}\, X\lambda,$$

wofür wir nach III (*B*) schreiben können:

(5) $$\frac{\sin\omega}{r} = \begin{vmatrix} X & x' & x'' \\ Y & y' & y'' \\ Z & z' & z'' \end{vmatrix}.$$

Hierin ist nun:

(6) $$x' = \frac{dx}{ds} = x_u u' + x_v v',$$

also:

(7) $$x'' = \frac{dx'}{ds} = x_{uu} u'^2 + 2x_{uv} u'v' + x_{vv} v'^2 + x_u u'' + x_v v'',$$

worin wir die Werte XVI (*B*) der zweiten Ableitungen x_{uu}, x_{uv}, x_{vv} eintragen können. Dann ergiebt sich für x'' ein ziemlich umständlicher Ausdruck, den wir abgekürzt für den Augenblick so schreiben:

$$x'' = X(Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2) + Ax_u + Bx_v,$$

wobei

(8) $$\begin{cases} A = u'' + \frac{1}{2D^2}[(E_u G + E_v F - 2F_u F)u'^2 + 2(E_v G - G_u F)u'v' + \\ \qquad + (-G_v F - G_u G + 2F_v G)v'^2], \\ B = v'' + \frac{1}{2D^2}[(-E_u F - E_v E + 2F_u E)u'^2 + 2(-E_v F + G_u E)u'v' + \\ \qquad + (G_v E + G_u F - 2F_v F)v'^2] \end{cases}$$

ist. Setzen wir die Werte (6) und (8) und die entsprechenden Werte für y', y'', z', z'' in (5) ein, so kommt:

$$\frac{\sin\omega}{r} = \begin{vmatrix} X & x_u u' + x_v v' & Ax_u + Bx_v \\ Y & y_u u' + y_v v' & Ay_u + By_v \\ Z & z_u u' + z_v v' & Az_u + Bz_v \end{vmatrix}$$

oder:

$$\frac{\sin\omega}{r} = (Bu' - Av')\begin{vmatrix} x_u & x_v & X \\ y_u & y_v & Y \\ z_u & z_v & Z \end{vmatrix},$$

wofür wir nach XI (*L*) schreiben können:

$$\frac{\sin\omega}{r} = D(Bu' - Av').$$

Setzen wir die Werte (8) von A und B ein, so kommt:

$$\frac{\sin\omega}{r} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} u' & D^2 u'' + \frac{1}{2}(E_u G + E_v F - 2F_u F)u'^2 + \\ & +(E_v G - G_u F)u'v' + \frac{1}{2}(-G_v F - G_u G + 2F_v G)v'^2 \\ v' & D^2 v'' + \frac{1}{2}(-E_u F - E_v E + 2F_u E)u'^2 + \\ & +(-E_v F + G_u E)u'v' + \frac{1}{2}(G_v E + G_u F - 2F_v F)v'^2 \end{vmatrix}.$$

Diese Determinante erinnert uns an eine andere ähnlich gebaute Determinante, nämlich an die in Satz 4, S. 407, für die geodätischen Curven. Dies ist nicht nur äusserlich: Ist nämlich die Flächencurve eine Curve, deren Hauptnormalen mit den Flächennormalen zusammenfallen (vgl. S. 402), so ist $\sin\omega = 0$, also die vorstehende Determinante auch gleich Null. Mithin muss das Nullsetzen der obigen Determinante die Differentialgleichung der geodätischen Curven ergeben. Dies kann man auch rechnerisch sofort bestätigen; man findet, dass die obige Determinante genau denselben Wert wie die Determinante in Satz 4, S. 407, hat, sodass wir schreiben können:[1]

$$(9)\quad \frac{\sin\omega}{r} = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} Eu' + Fv' & \frac{1}{2}E_u u'^2 + E_v u'v' + (F_v - \frac{1}{2}G_u)v'^2 + Eu'' + Fv'' \\ Fu' + Gv' & (F_u - \frac{1}{2}E_v)u'^2 + G_u u'v' + \frac{1}{2}G_v v'^2 + Fu'' + Gv'' \end{vmatrix}.$$

Wir können diese tangentiale Krümmung der Flächencurve auch dann, wenn die Curve keine geodätische Curve ist, in enge Beziehung zu den geodätischen Curven bringen.

Wenn man nämlich bedenkt, dass die geodätischen Curven auf der Fläche die naturgemässe Verallgemeinerung der geraden Linien in der Ebene sind, so wird man dazu geführt, Constructionen, die man in der Ebene mittels gerader Linien bei einer Curve ausgeführt hat, auf die Fläche zu übertragen, indem man die ebene Curve durch eine Flächencurve, die Geraden durch geodätische Curven ersetzt. So haben wir in der Ebene in I S. 36 die Krümmung einer Curve als Quotienten aus Contingenzwinkel $d\tau$ und Bogenelement definiert, und der Contingenzwinkel war dabei der Winkel der Tangenten in den Endpunkten P und P_1 des Bogenelementes ds. Übertragen wir dies auf die Fläche, so verfahren wir so: In zwei unendlich benachbarten Punkten P und P_1 einer Flächencurve c construieren wir die berührenden geodätischen

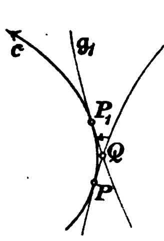


Fig. 93.

[1] Diese Formel findet sich bei MINDING, „Bemerkung über die Abwickelung krummer Linien von Flächen“, Journal f. d. r. u. a. Math. Bd. 6 (1830).

Curven g und g_1. (Siehe Fig. 93.) Sie werden sich etwa in Q unter einem unendlich kleinen Winkel $d\tau$, dem geodätischen Contingenzwinkel[1] des Bogenelementes PP_1 oder ds der Curve c, schneiden. Alsdann ist der Quotient

$$\frac{d\tau}{ds}$$

die Übertragung des Krümmungsbegriffs von der ebenen Curve auf die Flächencurve. Wird das Bogenelement ds in dem auf der Curve c festgesetzten Sinne durchlaufen, so ist noch die Art der Messung des Winkels $d\tau$ festzustellen. Sie soll im positiven Sinne auf der Fläche (vgl. S. 30 und Fig. 5) stattfinden. Jener Quotient heisst dann die geodätische Krümmung der Flächencurve an der Stelle P.[2]

Um den Quotienten $d\tau : ds$ zu berechnen, können wir uns eines besonderen Parametersystems bedienen, da ja der Begriff dieses Quotienten geometrisch, also unabhängig von der gewählten Parameterdarstellung ist. Wir benutzen geodätische Parameter u, v, indem wir nämlich diejenigen ∞^1 geodätischen Curven als Parameterlinien (v) einführen, die die gegebene Curve c senkrecht schneiden, sodass die Curven (u) die orthogonalen Trajectorien jener ∞^1 geodätischen Curven sind und insbesondere die Curve c zu ihnen gehört. Vgl. S. 441. Die allgemeine Curve (u) können wir dann also als die Curve c betrachten. P habe die Parameter u, v, dagegen hat dann P_1 die Parameter $u, v + dv$. (Siehe Fig. 94). Wir können dabei voraussetzen, dass v in der Richtung von P nach P_1 zunehme (vgl. S. 442). Das Quadrat des Bogenelementes ist nun auf der Fläche allgemein:

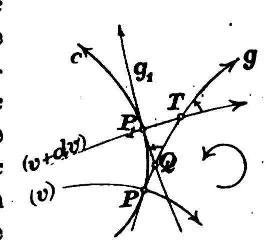


Fig. 94.

$$ds^2 = du^2 + G(u, v)\,dv^2,$$

sodass das Bogenelement ds oder PP_1 von c den Wert hat:

$$ds = \sqrt{G}\,dv,$$

[1] Die Bezeichnung rührt von Liouville her: „Sur la théorie générale des surfaces", Journ. de Math. p. et appl. t. XVI (1851).

[2] Nach einem Vorschlage von Liouville, vgl. den Schluss seiner Note I: „Sur les courbes à double courbure" zu Monge's „Application" (1850). Diesen Vorschlag hat Bonnet in seiner Abhandlung im Journal de l'École polyt. cah. 32 (1848) angenommen. Liouville selbst hat die geodätische Krümmung in der schon in der Anm. zu S. 420 erwähnten Note III zu Monge's „Application" genauer untersucht.

wobei die Wurzel im reellen Falle positiv ist. Die Wurzel kann auch mit D bezeichnet werden, da $D^2 = EG - F^2 = G$ ist; also:

$$(10) \qquad ds = D\,dv.$$

Die geodätische Curve g, die c in P berührt, durchlaufen wir in entsprechendem Sinne wie c, d. h. im Sinne des wachsenden Parameters v. Für ihre Winkel α mit der Curve (v) gilt dann nach Satz 20, S. 443, die Formel:

$$d\alpha = -D_u\,dv.$$

Dabei ist α an der Stelle P gleich $\frac{1}{2}\pi$, sodass also die Curve g die Curve $(v + dv)$ durch P_1 in einem Punkte T so schneidet, dass dort der Winkel gleich

$$\tfrac{1}{2}\pi - D_u\,dv$$

ist. Das unendlich kleine Dreieck TP_1Q ist in P_1 rechtwinklig und hat in Q den Winkel $d\tau$, in T den Winkel $\frac{1}{2}\pi - D_u\,dv$. Da ein unendlich kleines Flächendreieck als eben aufgefasst werden kann, wenn man von unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung absieht, so folgt, dass

$$(11) \qquad d\tau = D_u\,dv + \ldots$$

ist, wo die Punkte unendlich kleine Glieder andeuten, die mit höheren Potenzen von dv behaftet sind. Hiernach und nach (10) ist die geodätische Krümmung in P:

$$(12) \qquad \frac{d\tau}{ds} = \frac{D_u}{D}.$$

Andererseits ist, da jetzt $E = 1$, $F = 0$, $G = D^2$ ist, nach (9) die tangentiale Krümmung der Curve c in P leicht zu berechnen, denn für die Curve c oder (u) ist $u' = u'' = 0$ und nach (10):

$$v' = \frac{dv}{ds} = \frac{1}{D},$$

sodass kommt:

$$\frac{\sin\omega}{r} = \frac{1}{2}\frac{G_u}{D^2} = \frac{D_u}{D},$$

wie in (12). Hieraus folgt:

Satz 41: Die tangentiale Krümmung einer Flächencurve ist dasselbe wie ihre geodätische Krümmung.

Wie die geodätische Krümmung auf der Fläche die naturgemässe Verallgemeinerung der Krümmung in der Ebene ist, so giebt der Kreis in der Ebene als Curve constanter Krümmung (vgl.

Satz 29, I S. 41) Anlass zu einer naturgemässen Verallgemeinerung; er führt uns zu den Curven constanter geodätischer Krümmung auf der Fläche. Man kann sie geodätische Kreise nennen,[1] muss aber dabei beachten, dass der Kreisbegriff auch eine andere naturgemässe Verallgemeinerung zulässt, nämlich zu den Curven constanter geodätischer Entfernung auf der Fläche führt, die deshalb auch geodätische Kreise genannt worden sind, wie wir auf S. 444 bemerkt haben. Dass sich beide Begriffe im allgemeinen nicht decken, ist leicht zu sehen. Ist nämlich die Fläche auf geodätische Polarcoordinaten u, v bezogen, so sind die Curven (u) Curven constanter geodätischer Entfernung von dem Pole A (siehe S. 445). Aber nach (12) ist für sie die geodätische Krümmung nur dann constant, wenn längs ihrer

$$\frac{\partial \log D}{\partial u} = \text{Const.},$$

d. h. also nur von u abhängig ist, was im allgemeinen nicht gerade der Fall sein wird.

Die Formeln (8) und (9) für die normale und für die tangentiale oder geodätische Krümmung unterscheiden sich wesentlich dadurch, dass die erste auch die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung, L, M, N, enthält, die zweite nicht. Hieraus lässt sich schliessen, dass der allgemeine Ausdruck der geodätischen Krümmung für Curven auf zwei verschiedenen Flächen derselbe ist, sobald beide Flächen auf Parameter u, v so bezogen werden können, dass sie dieselben Fundamentalgrössen erster Ordnung haben, d. h. sobald die beiden Flächen auf einander verbiegbar sind, nach Satz 5, S. 275. Betrachten wir irgend eine Curve von Punkten (u, v) auf der einen Fläche, fassen wir also u und v als irgendwelche derartige Functionen eines Parameters s auf, für die

$$Eu'^2 + 2Fu'v' + Gv'^2 = 1$$

ist, sodass s die Bogenlänge bedeutet, so entspricht ihr eine Curve von Punkten (u, v) auf der anderen Fläche, und s ist auch auf der anderen Fläche die Bogenlänge, weil E, F, G auf beiden Flächen übereinstimmen. Daher haben beide Curven in entsprechenden

[1] So that es LIE in der Abhandlung: „Bestimmung des Bogenelementes aller Flächen, deren geodätische Kreise eine infinitesimale Berührungstransformation gestatten", Archiv for Math. og Naturvidenskab Bd. IX (1884), in der insbesondere für die geodätischen Kreise auf Flächen constanter Krümmung wichtige Sätze aufgestellt werden.

Punkten (u, v) nach (9) auch dieselbe geodätische Krümmung, weil schliesslich auch u', v', u'', v'' bei beiden übereinstimmen. Somit folgt:

Satz 42:[1] Bei der Verbiegung einer Fläche bleibt die geodätische Krümmung einer jeden Curve auf der Fläche ungeändert.

Insbesondere gehen Curven constanter geodätischer Krümmung wieder in Curven constanter geodätischer Krümmung über. Ein noch speciellerer Fall ist der der geodätischen Curven, die ja die Curven von der geodätischen Krümmung Null sind. (Vgl. S. 482.) Dass die Curven constanter geodätischer Entfernung von einer Stelle (vgl. S. 444) bei Verbiegung in ebensolche Curven übergehen, leuchtet, nebenbei bemerkt, sofort ein. Dass die geodätische Krümmung bei Verbiegung ungeändert bleibt, geht rein geometrisch auch aus ihrer Definition auf der Fläche durch den Quotienten $d\tau : ds$ hervor, wenn man bedenkt, dass die Verbiegung eine in den kleinsten Teilen congruente Abbildung ist (nach S. 274).

Die Formeln (3) und (9) für die normale und für die geodätische Krümmung einer Flächencurve beziehen sich auf den Fall, dass längs der Curven die Parameter u, v als Functionen der Bogenlänge s gegeben seien. Ist dem nicht so, sind u und v vielmehr als Functionen irgend eines Parameters t gegeben, so werden die Formeln umständlicher. Wir wollen angeben, wie man sie aus den Formeln (3) und (9) ableiten kann: Deutet der Strich wie bisher die Differentiation nach der Bogenlänge s an, so ist:

$$u' = \frac{du}{dt} t', \qquad v' = \frac{dv}{dt} t', \tag{13}$$

also:

$$u'' = \frac{d^2 u}{dt^2} t'^2 + \frac{du}{dt} t'', \qquad v'' = \frac{d^2 v}{dt^2} t'^2 + \frac{dv}{dt} t''. \tag{14}$$

t' und t'' werden aus (1) abgeleitet, denn (1) liefert:

$$t' = \frac{1}{\sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}}, \tag{15}$$

woraus durch nochmalige Differentiation nach s folgt, indem die rechte Seite zuerst nach t differenziert und dann das Ergebnis mit t' multipliciert wird:

---

[1] In Minding's oben, S. 482, genannter Arbeit zwar nicht ausdrücklich formuliert, aber doch implicite enthalten.

(16) $$t'' = -\frac{1}{2\left[E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2\right]^2}\cdot$$

$$\cdot\left[E_u\left(\frac{du}{dt}\right)^3 + (E_v + 2F_u)\left(\frac{du}{dt}\right)^2\frac{dv}{dt} + (2F_v + G_u)\frac{du}{dt}\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + G_v\left(\frac{dv}{dt}\right)^3 + 2\left(E\frac{du}{dt} + F\frac{dv}{dt}\right)\frac{d^2u}{dt^2} + 2\left(F\frac{du}{dt} + G\frac{dv}{dt}\right)\frac{d^2v}{dt^2}\right].$$

Setzen wir diese Werte (15) und (16) in (13) und (14) ein, so werden u', v', u'', v'' durch die ersten und zweiten Differentialquotienten von u und v nach t ausgedrückt. Die Substitution dieser Ausdrücke in (3) und (9) giebt die allgemeinen Formeln für die normale und die geodätische Krümmung. —

Nachdem wir in (3) und (9) die normale und die geodätische Krümmung

$$\frac{\cos\omega}{r} \quad \text{und} \quad \frac{\sin\omega}{r}$$

berechnet haben, finden wir daraus auch leicht $\operatorname{tg}\omega$ und die absolute Krümmung $1:r$ der Curve. Es kommt:

(17) $$\operatorname{tg}\omega = \frac{\begin{vmatrix} Eu' + Fv' & \frac{1}{2}E_u u'^2 + E_v u'v' + (F_v - \frac{1}{2}G_u)v'^2 + Eu'' + Fv'' \\ Fu' + Gv' & (F_u - \frac{1}{2}E_v)u'^2 + G_u u'v' + \frac{1}{2}G_v v'^2 + Fu'' + Gv'' \end{vmatrix}}{D(Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2)}$$

und:

(18) $$\left(\frac{1}{r}\right)^2 = (Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2)^2 +$$

$$+ \frac{1}{D^2}\begin{vmatrix} Eu' + Fv' & \frac{1}{2}E_u u'^2 + E_v u'v' + (F_v - \frac{1}{2}G_u)v'^2 + Eu'' + Fv'' \\ Fu' + Gv' & (F_u - \frac{1}{2}E_v)u'^2 + G_u u'v' + \frac{1}{2}G_v v'^2 + Fu'' + Gv'' \end{vmatrix}^2.$$

Im reellen Falle giebt die positive Quadratwurzel hieraus den Wert der Krümmung.

Schliesslich wollen wir noch die Torsion $1:\varrho$ der Flächencurve berechnen. Sie tritt auf, wenn wir die Formel (4), nämlich:

$$\sin\omega = \mathbf{S}X\lambda$$

nach der Bogenlänge s differenzieren, weil dann nach III (C) kommt:

$$\omega'\cos\omega = \mathbf{S}X'\lambda + \frac{1}{\varrho}\mathbf{S}Xl$$

oder, da $\mathbf{S}Xl = \cos\omega$ ist, und wenn wir die Gleichung nach $1:\varrho$ auflösen:

(19) $$\frac{1}{\varrho} = \omega' - \frac{\mathbf{S}X'\lambda}{\cos\omega}.$$

In (17) liegt $\operatorname{tg}\omega$ vor; daraus lässt sich $\cos\omega$ und ω' bestimmen. Es erübrigt also nur noch die Berechnung der Summe $\mathbf{S}\, X'\lambda$. Diese finden wir so: Wenn wir aus III (B) die Werte von λ, μ, ν entnehmen, so kommt:

$$\mathbf{S}\, X'\lambda = r \begin{vmatrix} X' & x' & x'' \\ Y' & y' & y'' \\ Z' & z' & z'' \end{vmatrix}.$$

Zur Vereinfachung multiplicieren wir, was ja oft nützlich ist, diese Gleichung mit D, indem wir rechts statt D die in XI (L) angegebene Determinante benutzen. Es ergiebt sich dann zunächst:

$$\mathbf{S}\, X'\lambda = \frac{r}{D} \begin{vmatrix} X' & x' & x'' \\ Y' & y' & y'' \\ Z' & z' & z'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_u & x_v & X \\ y_u & y_v & Y \\ z_u & z_v & Z \end{vmatrix}.$$

Multiplicieren wir in beiden Determinanten Reihe mit Reihe, so geht eine Determinante hervor, in der in einer Reihe die Elemente

$$\mathbf{S}\, X'X, \quad \mathbf{S}\, x'X$$

auftreten, die wegen $x' = x_u u' + v_v v'$, XI (H) und XI (I) gleich Null sind. Daher kommt:

$$\mathbf{S}\, X'\lambda = \frac{r\,\mathbf{S}\, x''X}{D} \begin{vmatrix} \mathbf{S}\, X'x_u & \mathbf{S}\, X'x_v \\ \mathbf{S}\, x'x_u & \mathbf{S}\, x'x_v \end{vmatrix}.$$

Nach XII (C) ist aber wegen $X' = X_u u' + X_v v'$:

$$\mathbf{S}\, X'x_u = -Lu' - Mv', \quad \mathbf{S}\, X'x_v = -Mu' - Nv'$$

und nach XI (A):

$$\mathbf{S}\, x'x_u = Eu' + Fv', \quad \mathbf{S}\, x'x_v = Fu' + Gv',$$

endlich noch nach III (B):

$$r\,\mathbf{S}\, x''X = \mathbf{S}\, Xl = \cos\omega,$$

sodass die Formel hervorgeht:

$$\mathbf{S}\, X'\lambda = -\frac{\cos\omega}{D} \begin{vmatrix} Lu' + Mv' & Mu' + Nv' \\ Eu' + Fv' & Fu' + Gv' \end{vmatrix}.$$

Erinnern wir uns an XII (U) und XII (V), so finden wir:

$$\mathbf{S}\, X'\lambda = \frac{\cos\omega}{D} \begin{vmatrix} v'^2 & E & L \\ -u'v' & F & M \\ u'^2 & G & N \end{vmatrix}.$$

Setzen wir diesen Wert in (19) ein, so ergiebt sich für die Torsion der Wert:

$$(20) \qquad \frac{1}{\varrho} = \omega' - \frac{1}{D}\begin{vmatrix} v'^2 & E & L \\ -u'v' & F & M \\ u'^2 & G & N \end{vmatrix},$$

in den wir, wie schon gesagt wurde, den aus (17) durch Differentiation nach s hervorgehenden Wert von ω' einsetzen können.

Wir erwähnen schliesslich einige einfache Schlüsse, die sich an die Formeln (3), (9) und (20) anknüpfen:

Ist die Flächencurve eine Krümmungscurve, so liegt zunächst ein Irrtum nahe, auf den hingewiesen werden muss: Der zu einem Punkte der Curve gehörige Hauptkrümmungskreis der Fläche ist durchaus nicht immer der Krümmungskreis der Krümmungscurve. Er wäre es nur dann, wenn die Flächennormale die Hauptnormale wäre, also wenn die Krümmungscurve zugleich geodätische Curve wäre. Nach XII (U) ist für die Krümmungscurven die in (20) auftretende Determinante gleich Null, sodass bei ihnen die Torsion

$$\frac{1}{\varrho} = \omega'$$

ist.

Für eine geodätische Curve ist die normale Krümmung die Krümmung der Curve selbst, da dann die Hauptnormale zugleich Flächennormale ist, während die geodätische Krümmung, wie gesagt, gleich Null ist.

Liegt eine Haupttangentencurve vor, so ist ihre Hauptnormale eine Tangente der Fläche, nach Satz 64, S. 182, sodass $\omega = \pm \frac{1}{2}\pi$ ist. Daher:

Satz 43: Die Haupttangentencurven einer Fläche sind diejenigen Curven, deren normale Krümmung gleich Null ist.

Aus (20) folgt ferner für eine Haupttangentencurve als Wert der Torsion, da ω längs der Curve constant ist:

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{1}{D}\begin{vmatrix} v'^2 & E & L \\ -u'v' & F & M \\ u'^2 & G & N \end{vmatrix}.$$

Benutzen wir als Parameterlinien die Haupttangentencurven, so ist nach Satz 67, S. 184, $L = N = 0$, sodass noch einfacher kommt:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{D}(G v'^2 - E u'^2).$$

Zugleich ist dann entweder $u' = 0$ oder $v' = 0$. Für die Haupttangentencurve (u) ist also die Torsion

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{MG}{D} v'^2,$$

wobei

$$v'^2 = \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 = \frac{dv^2}{G\,dv^2} = \frac{1}{G}$$

ist, sodass kommt:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{D}.$$

Für die Haupttangentencurve (v) dagegen ergiebt sich auf dieselbe Weise, weil dann $u'^2 = 1 : E$ und $v' = 0$ ist:

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{M}{D}.$$

Fassen wir einen Punkt (u, v) der Fläche ins Auge, so sehen wir also, dass die Torsion der einen Haupttangentencurve in diesem Punkte entgegengesetzt gleich der der anderen Haupttangentencurve in diesem Punkte ist, und zwar ist das Product beider gleich

$$-\frac{M^2}{D^2}.$$

Dies aber ist nach XII (K) gerade das Krümmungsmaass K der Fläche im Punkte (u, v), weil ja jetzt $L = N = 0$ ist. Hieraus folgt:[1]

Satz 44: Die Torsionen der beiden durch einen Flächenpunkt gehenden Haupttangentencurven sind dort einander entgegengesetzt gleich, und ihr Product ist gleich dem Krümmungsmaass der Fläche an der betrachteten Stelle.

Insbesondere folgt hieraus:

Satz 45: Auf einer Fläche constanter Krümmung haben alle Haupttangentencurven der einen Schar überall dieselbe Torsion und alle Haupttangentencurven der anderen Schar überall die entgegengesetzte Torsion.

Die Haupttangentencurven der Flächen constanter Krümmung sind also Curven constanter Torsion, von denen in Satz 43, I S. 252, die Rede war.

---

[1] Satz von Enneper, „Über asymptotische Linien", Göttinger Nachrichten 1870.

Schliesslich erinnern wir daran, dass der Satz 44 — abgesehen von der Vorzeichenbestimmung — schon in unserem früheren Satz 51, S. 170, als specieller Fall enthalten ist, weil die Flächennormale bei einer Haupttangentencurve Binormale ist und die Torsion als das Verhältnis $dB:ds$ aus dem Winkel dB, um den sich die Binormale beim Fortschreiten längs der Curve dreht, und aus dem zugehörigen Bogenelement ds definiert werden kann, wie in I S. 183. —

In den Tafeln XXI und XXIII sind die wichtigsten Formeln über geodätische und andere Flächencurven, die wir im gegenwärtigen Abschnitte gewonnen haben, zusammengestellt. Tafel XXII betrifft die Centraflächen.

Endlich soll die Tafel XXIV dazu dienen, dem Leser den Übergang zu anderen Lehrbüchern der Flächentheorie zu erleichtern; es sind in Tafel XXIV die Bezeichnungen angegeben, die in den wichtigeren Lehrbüchern für die Fundamentalgrössen u. s. w. gebraucht werden.

Zu weiterer Vertiefung in die Theorie der Curven und Flächen empfehlen wir dem Leser das Studium der öfters erwähnten Lehrbücher von Bianchi und Darboux sowie der in den Anmerkungen genannten Abhandlungen.

Anhang.

(Fortsetzung des Anhangs zum ersten Band.)

Tafel XI.

Formeln für die Fundamentalgrössen erster Ordnung und für die Richtungscosinus der Normalen.

x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten des Flächenpunktes.
u, v seine Parameter.
ds das Bogenelement der Fläche.
E, F, G die Fundamentalgrössen erster Ordnung.
X, Y, Z die Richtungscosinus der Flächennormale.
ω Winkel der Parameterlinien.

(*A*) (S. 15)[1] $$E = \mathbf{S}\, x_u^2, \quad F = \mathbf{S}\, x_u x_v, \quad G = \mathbf{S}\, x_v^2.$$

(*B*) (S. 15) $$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

(*C*) (S. 17) $$D = \sqrt{EG - F^2},$$

im reellen Falle positiv zu nehmen.

Gleichung der Tangentenebene in den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$:

(*D*) (S. 20) $$\begin{vmatrix} \mathfrak{x} - x & x_u & x_v \\ \mathfrak{y} - y & y_u & y_v \\ \mathfrak{z} - z & z_u & z_v \end{vmatrix} = 0$$

oder:

(*E*) $$X(\mathfrak{x} - x) + Y(\mathfrak{y} - y) + Z(\mathfrak{z} - z) = 0.$$

(*F*) (S. 27) $$X = \frac{y_u z_v - z_u y_v}{D}, \quad Y = \frac{z_u x_v - x_u z_v}{D}, \quad Z = \frac{x_u y_v - y_u x_v}{D}.$$

(*G*) (S. 18) $$D^2 = \mathbf{S}\,(y_u z_v - z_u y_v)^2.$$

---

[1] Bezeichnung der Seite, auf der die Formeln zum ersten Male vorkommen.

(*H*) (S. 27) $\mathbf{S} X^2 = 1, \quad \mathbf{S} X X_u = 0, \quad \mathbf{S} X X_v = 0.$

(*I*) (S. 27) $\mathbf{S} X x_u = 0, \quad \mathbf{S} X x_v = 0.$

(*K*) (S. 28)
$$\begin{cases} Y z_u - Z y_u = \frac{E x_v - F x_u}{D}, & Y z_v - Z y_v = \frac{F x_v - G x_u}{D}, \\ Z x_u - X z_u = \frac{E y_v - F y_u}{D}, & Z x_v - X z_v = \frac{F y_v - G y_u}{D}, \\ X y_u - Y x_u = \frac{E z_v - F z_u}{D}, & X y_v - Y x_v = \frac{F z_v - G z_u}{D}. \end{cases}$$

(*L*) (S. 28)
$$\begin{vmatrix} x_u & x_v & X \\ y_u & y_v & Y \\ z_u & z_v & Z \end{vmatrix} = D.$$

(*M*) (S. 31) $\sin\omega = \frac{D}{\sqrt{EG}}, \quad \cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}},$

wo die Wurzeln im reellen Falle positiv zu nehmen sind.

Für den Winkel α der zu
$$\frac{dv}{du} = k \quad \text{und} \quad \frac{dv}{du} = \varkappa$$
gehörigen Fortschreitungsrichtungen ist:

(*N*) (S. 32) $\cos\alpha = \frac{E + F(k + \varkappa) + Gk\varkappa}{\sqrt{(E + 2Fk + Gk^2)(E + 2F\varkappa + G\varkappa^2)}}.$

Differentialgleichung der Minimalcurven:

(*O*) (S. 36) $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0$

oder zerlegt:

(*P*) (S. 63) $[E\,du + (F + iD)\,dv][E\,du + (F - iD)\,dv] = 0.$

Tafel XII.

Formeln für die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung und für die Krümmung.

L, M, N die Fundamentalgrössen zweiter Ordnung.

k_1, k_2 die Werte von $dv:du$ für die beiden Hauptkrümmungsrichtungen.

$\varkappa_1$, $\varkappa_2$ die Werte von $dv:du$ für die beiden Haupttangentenrichtungen.

R der Krümmungsradius des zu irgend einer Fortschreitungsrichtung $(dv:du)$ oder (k) gehörigen Normalschnittes.

φ der Winkel seiner Ebene mit der Normalebene durch die erste Hauptkrümmungsrichtung.

R_1, R_2 die Hauptkrümmungsradien.

K das Krümmungsmaass.

H die mittlere Krümmung.

(*A*) (S. 106) $L = \mathbf{S} X x_{uu}, \quad M = \mathbf{S} X x_{uv}, \quad N = \mathbf{S} X x_{vv}.$

(*B*) (S. 106) $L = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_{uu} & x_u & x_v \\ y_{uu} & y_u & y_v \\ z_{uu} & z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad M = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_{uv} & x_u & x_v \\ y_{uv} & y_u & y_v \\ z_{uv} & z_u & z_v \end{vmatrix}, \quad N = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} x_{vv} & x_u & x_v \\ y_{vv} & y_u & y_v \\ z_{vv} & z_u & z_v \end{vmatrix}.$

(*C*) (S. 106) $L = -\mathbf{S} X_u x_u, \quad M = -\mathbf{S} X_u x_v = -\mathbf{S} X_v x_u, \quad N = -\mathbf{S} X_v x_v.$

(*D*) (S. 109) $\frac{1}{R} = \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2} = \frac{L + 2Mk + Nk^2}{E + 2Fk + Gk^2}.$

(*E*) (S. 116) $\left.\begin{array}{l} (EM - FL) - (GL - EN)k + (FN - GM)k^2 = 0 \\ \text{oder:} \\ \begin{vmatrix} k^2 & E & L \\ -k & F & M \\ 1 & G & N \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right\}$ für $k = k_1, k_2$.

(*F*) (S. 117) $k_1 + k_2 = \frac{GL - EN}{FN - GM}, \quad k_1 k_2 = \frac{EM - FL}{FN - GM}.$

(*G*) (S. 117) $\begin{cases} E + F(k_1 + k_2) + G k_1 k_2 = 0, \\ L + M(k_1 + k_2) + N k_1 k_2 = 0. \end{cases}$

(*H*) (S. 117) $k_1 = -\frac{MR_1 - F}{NR_1 - G}, \quad k_2 = -\frac{MR_2 - F}{NR_2 - G}.$

(*I*) (S. 118) $(LN - M^2)R^2 - (EN - 2FM + GL)R + (EG - F^2) = 0$ für $R = R_1, R_2$.

(*K*) (S. 118) $\begin{cases} K = \frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{LN - M^2}{D^2}, \\ H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2} = \frac{EN - 2FM + GL}{D^2}. \end{cases}$

(*L*) (S. 127) $L + 2M\varkappa + G\varkappa^2 = 0$ für $\varkappa = \varkappa_1, \varkappa_2$.

$$(\text{S. }130)\ (M)\quad LN - M^2 = D \begin{vmatrix} X & X_u & X_v \\ Y & Y_u & Y_v \\ Z & Z_u & Z_v \end{vmatrix},$$

$$(\text{S. }131)\quad LN - M^2 = D\,\frac{Y_u Z_v - Z_u Y_v}{X} = D\,\frac{Z_u X_v - X_u Z_v}{Y} = D\,\frac{X_u Y_v - Y_u X_v}{Z}.$$

Für die Winkel α der Haupttangenten mit der ersten Hauptkrümmungsrichtung ist:

$$(N)\ (\text{S. }135)\qquad \operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{-\frac{R_2}{R_1}}.$$

Gleichung der Indicatrix im Abstande ε von der Tangentenebene:

$$(O)\ (\text{S. }142)\qquad L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 2\varepsilon.$$

$$(P)\ (\text{S. }134)\qquad \frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}.$$

Sind α und β die Winkel conjugierter Richtungen mit der ersten Hauptkrümmungsrichtung, so ist:

$$(Q)\ (\text{S. }156)\qquad \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = -\frac{R_2}{R_1}.$$

$$(R)\ (\text{S. }159)\quad \begin{cases} X_u = \dfrac{1}{D^2}[(FM - GL)x_u + (FL - EM)x_v], \\ Y_u = \dfrac{1}{D^2}[(FM - GL)y_u + (FL - EM)y_v], \\ Z_u = \dfrac{1}{D^2}[(FM - GL)z_u + (FL - EM)z_v]; \\ X_v = \dfrac{1}{D^2}[(FN - GM)x_u + (FM - EN)x_v], \\ Y_v = \dfrac{1}{D^2}[(FN - GM)y_u + (FM - EN)y_v], \\ Z_v = \dfrac{1}{D^2}[(FN - GM)z_u + (FM - EN)z_v]. \end{cases}$$

$$(S)\ (\text{S. }159)\quad \begin{cases} \mathbf{S}\,X_u^2 = \dfrac{1}{D^2}[GL^2 - 2FLM + EM^2] = HL - KE, \\ \mathbf{S}\,X_u X_v = \dfrac{1}{D^2}[GLM + EMN - FM^2 - FLN] = HM - KF, \\ \mathbf{S}\,X_v^2 = \dfrac{1}{D^2}[EN^2 - 2FMN + GM^2] = HN - KG. \end{cases}$$

(T) (S. 161) $\mathbf{S}\, dX dx = -(L du^2 + 2M du dv + N dv^2)$.

Differentialgleichung der Krümmungscurven:

(U) (S. 174)
$$\begin{vmatrix} dv^2 & E & L \\ -du dv & F & M \\ du^2 & G & N \end{vmatrix} = 0$$

oder:

(V) (S. 176)
$$\begin{vmatrix} E du + F dv & L du + M dv \\ F du + G dv & M du + N dv \end{vmatrix} = 0$$

oder:

(W) (S. 175)
$$\begin{vmatrix} dx & X & dX \\ dy & Y & dY \\ dz & Z & dZ \end{vmatrix} = 0.$$

Differentialgleichung der Haupttangentencurven:

(X) (S. 174) $\quad L du^2 + 2M du dv + N dv^2 = 0.$

Tafel XIII.

Formeln für die Darstellung: $z = f(x, y)$ der Fläche.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

(A) (S. 15) $\quad E = 1 + p^2, \quad F = pq, \quad G = 1 + q^2.$

(B) (S. 18) $\quad D = \sqrt{1 + p^2 + q^2},$

im reellen Falle positiv zu nehmen.

(C) $$X = \frac{-p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad Y = \frac{-q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad Z = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

(D) (S. 108) $$L = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad M = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad N = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

(E) $$\frac{1}{R} = \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}} \cdot \frac{r dx^2 + 2s dx dy + t dy^2}{(1 + p^2) dx^2 + 2pq dx dy + (1 + q^2) dy^2}.$$

$$(F)\quad \begin{cases} K = \dfrac{rt - s^2}{(1+p^2+q^2)^2}, \\ H = \dfrac{(1+p^2)t - 2pqs + (1+q^2)r}{\sqrt{1+p^2+q^2}^3}. \end{cases}$$

Differentialgleichung der Minimalcurven:

$$(G)\qquad (1+p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1+q^2)\,dy^2 = 0.$$

Differentialgleichung der Krümmungscurven:

$$(H)\qquad \begin{vmatrix} dy^2 & 1+p^2 & r \\ -dx\,dy & pq & s \\ dx^2 & 1+q^2 & t \end{vmatrix} = 0.$$

Differentialgleichung der Haupttangentencurven:

$$(I)\qquad r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0.$$

Tafel XIV.

Sphärische Abbildung einer Fläche.

Die lateinischen Buchstaben beziehen sich auf die Fläche, die deutschen auf die Bildkugel.

(*A*) (S. 204) $\quad \mathfrak{x} = X, \quad \mathfrak{y} = Y, \quad \mathfrak{z} = Z.$

(*B*) (S. 206) $\quad d\mathfrak{s}^2 = dX^2 + dY^2 + dZ = \mathfrak{E}\,du^2 + 2\mathfrak{F}\,du\,dv + \mathfrak{G}\,dv^2.$

$$(C)\ (S.\ 206,\ 209)\quad \begin{cases} \mathfrak{E} = \mathbf{S}X_u^2 = HL - KE = \frac{1}{D^2}[EM^2 - 2FLM + GL^2], \\ \mathfrak{F} = \mathbf{S}X_uX_v = HM - KF = \frac{1}{D^2}[EMN - F(LN+M^2) + GLM], \\ \mathfrak{G} = \mathbf{S}X_v^2 = HN - KG = \frac{1}{D^2}[EN^2 - 2FMN + GM^2]. \end{cases}$$

(*D*) (S. 209) $\quad \mathfrak{D} = \sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{G} - \mathfrak{F}^2} = \varepsilon K D,$

wo $\varepsilon = \pm 1$ ist und zwar im reellen Falle, je nachdem $K \gtrless 0$ ist.

(*E*) (S. 210) $\quad \mathfrak{X} = \varepsilon X, \quad \mathfrak{Y} = \varepsilon Y, \quad \mathfrak{Z} = \varepsilon Z.$

(*F*) (S. 211) $\quad \mathfrak{L} = -\varepsilon\mathfrak{E}, \quad \mathfrak{M} = -\varepsilon\mathfrak{F}, \quad \mathfrak{N} = -\varepsilon\mathfrak{G}.$

Tafel XV.

Parallelflächen einer gegebenen Fläche.

Die überstrichenen Buchstaben beziehen sich auf die Elemente der Parallelfläche im Abstande a.

(*A*) (S. 238) $\bar{x} = x + aX, \quad \bar{y} = y + aY, \quad \bar{z} = z + aZ.$

(*B*) (S. 238)
$$\begin{cases} \bar{E} = (1 - a^2 K)E - a(2 - aH)L, \\ \bar{F} = (1 - a^2 K)F - a(2 - aH)M, \\ \bar{G} = (1 - a^2 K)G - a(2 - aH)N. \end{cases}$$

(*C*) (S. 239)
$$\begin{cases} \bar{L} = aKE + (1 - aH)L, \\ \bar{M} = aKF + (1 - aH)M, \\ \bar{N} = aKG + (1 - aH)N. \end{cases}$$

(*D*) (S. 238) $\bar{D} = (1 - aH + a^2 K)D,$

wo das Vorzeichen so gewählt ist, dass im reellen Falle die Formel für die Null benachbarten Werte von a positives $\bar{D}$ giebt.

(*E*) (S. 240)
$$\begin{cases} \bar{K} = \dfrac{K}{1 - aH + a^2 K}, \\ \bar{H} = \dfrac{H - 2aK}{1 - aH + a^2 K}. \end{cases}$$

Tafel XVI.

Die zweiten Differentialquotienten der rechtwinkligen Punktcoordinaten einer Fläche.

(*A*) (S. 264)
$$\begin{cases} x_{uu} = \dfrac{L}{D}(y_u z_v - z_u y_v) + \dfrac{1}{2D^2}(E_u G + E_v F - 2F_u F)x_u + \\ \qquad + \dfrac{1}{2D^2}(-E_u F - E_v E + 2F_u E)x_v, \\ x_{uv} = \dfrac{M}{D}(y_u z_v - z_u y_v) + \dfrac{1}{2D^2}(E_v G - G_u F)x_u + \\ \qquad + \dfrac{1}{2D^2}(-E_v F + G_u E)x_v, \\ x_{vv} = \dfrac{N}{D}(y_u z_v - z_u y_v) + \dfrac{1}{2D^2}(-G_v F - G_u G + 2F_v G)x_u + \\ \qquad + \dfrac{1}{2D^2}(G_v E + G_u F - 2F_v F)x_v \end{cases}$$

oder:

$$(B)\ (\text{S. }268)\quad\begin{cases} x_{uu} = LX + \frac{1}{2D^2}[(E_u G + E_v F - 2F_u F)x_u + \\ \qquad + (-E_u F - E_v E + 2F_u E)x_v], \\ x_{uv} = MX + \frac{1}{2D^2}[(E_v G - G_u F)x_u + (-E_v F + G_u E)x_v], \\ x_{vv} = NX + \frac{1}{2D^2}[(-G_v F - G_u G + 2F_v G)x_u + \\ \qquad + (G_v E + G_u F - 2F_v F)x_v]. \end{cases}$$

Die Formeln (A) und (B) gelten auch, wenn x und X durch y und Y oder durch z und Z ersetzt werden.

$$(C)\ (\text{S. }262)\quad\begin{cases} \mathbf{S}\, x_{uu}x_u = \frac{1}{2}E_u, & \mathbf{S}\, x_{uv}x_u = \frac{1}{2}E_v, & \mathbf{S}\, x_{vv}x_u = F_v - \frac{1}{2}G_u, \\ \mathbf{S}\, x_{uu}x_v = F_u - \frac{1}{2}E_v, & \mathbf{S}\, x_{uv}x_v = \frac{1}{2}G_u, & \mathbf{S}\, x_{vv}x_v = \frac{1}{2}G_v. \end{cases}$$

Tafel XVII.

Die drei Fundamentalgleichungen der Flächentheorie.

(A) (S. 270)

$$L_v - M_u = \frac{1}{2D^2}[E_v G - G_u F]L - \\ - \frac{1}{2D^2}[E_u G - G_u E + 2(E_v - F_u)F]M - \\ - \frac{1}{2D^2}[-E_u F - E_v E + 2F_u E]N.$$

(B) (S. 270)

$$\frac{LN - M^2}{D^2} = K = \frac{1}{2D^2}(2F_{uv} - E_{vv} - G_{uu}) + \\ + \frac{E}{4D^4}(G_u^2 + E_v G_v - 2G_v F_u) + \\ + \frac{G}{4D^4}(E_v^2 + E_u G_u - 2E_u F_v) + \\ + \frac{F}{4D^4}(E_u G_v - E_v G_u - 2F_u G_u - 2F_v E_v + 4F_u F_v).$$

(C) (S. 271)

$$N_u - M_v = \frac{1}{2D^2}[G_u E - E_v F]N - \\ - \frac{1}{2D^2}[G_v E - E_v G + 2(G_u - F_v)F]M - \\ - \frac{1}{2D^2}[-G_v F - G_u G + 2F_v G]L.$$

Andere Form der zweiten Fundamentalgleichung (B):

(D) (S. 320)
$$\frac{LN - M^2}{D} = \frac{\partial}{\partial v}\,\frac{-E_u F - E_v E + 2F_u E}{2DE} - \frac{\partial}{\partial u}\,\frac{-E_v F + G_u E}{2DE}.$$

Tafel XVIII.

Formeln für Flächen, deren Parameterlinien die Minimalcurven sind.

(A)
$$E = G = 0, \quad D = iF.$$

Fundamentalgleichungen:

(B) (S. 268)
$$\begin{cases} L_v - M_u = -\dfrac{F_u}{F} M, \\[2mm] \dfrac{LN - M^2}{F} = \dfrac{\partial^2 \log F}{\partial u\, \partial v}, \\[2mm] N_u - M_v = -\dfrac{F_v}{F} M. \end{cases}$$

(C)
$$K = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{LN - M^2}{-F^2}, \qquad H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{2M}{F}.$$

(D) (S. 266)
$$\begin{cases} x_{uu} = -\dfrac{iL}{F}(y_u z_v - z_u y_v) + \dfrac{F_u}{F} x_u = LX + \dfrac{F_u}{F} x_u, \\[2mm] x_{uv} = -\dfrac{iM}{F}(y_u z_v - z_u y_v) \qquad = MX, \\[2mm] x_{vv} = -\dfrac{iN}{F}(y_u z_v - z_u y_v) + \dfrac{F_v}{F} x_v = NX + \dfrac{F_v}{F} x_v. \end{cases}$$

Diese Formeln (D) gelten auch, wenn x und X durch y und Y oder durch z und Z ersetzt werden.

(E) (S. 266)
$$\begin{cases} X_u = -\dfrac{1}{F}(M x_u + L x_v), \qquad X_v = -\dfrac{1}{F}(N x_u + M x_v), \\[2mm] Y_u = -\dfrac{1}{F}(M y_u + L y_v), \qquad Y_v = -\dfrac{1}{F}(N y_u + M y_v), \\[2mm] Z_u = -\dfrac{1}{F}(M z_u + L z_v), \qquad Z_v = -\dfrac{1}{F}(N z_u + M z_v). \end{cases}$$

(F)
$$\mathsf{S}\, X_u^2 = \frac{2LM}{F}, \quad \mathsf{S}\, X_u X_v = \frac{LN + M^2}{F}, \quad \mathsf{S}\, X_v^2 = \frac{2MN}{F}.$$

Differentialgleichung der Krümmungscurven:

(G)
$$L\,du^2 - N\,dv^2 = 0.$$

Tafel XIX.

Formeln für Flächen, deren Parameterlinien die Krümmungscurven sind.

(*A*) (S. 355) $F = M = 0, \quad D = \sqrt{EG}.$

Fundamentalgleichungen:

(*B*) (S. 356)

$$\begin{cases} L_v = \frac{1}{2} E_v \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G} \right), \\ LN = -\frac{1}{2} E_{vv} - \frac{1}{2} G_{uu} + \frac{1}{4} \frac{E_v^2 + E_u G_u}{E} + \frac{1}{4} \frac{G_u^2 + E_v G_v}{G}, \\ N_u = \frac{1}{2} G_u \left(\frac{L}{E} + \frac{N}{G} \right) \end{cases}$$

oder:

(*C*) (S. 356)

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{\sqrt{E}}{R_1} = \frac{1}{R_2 - R_1} \frac{\partial R_1}{\partial v}, \\ -\frac{\sqrt{EG}}{R_1 R_2} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right), \\ \frac{\partial}{\partial u} \log \frac{\sqrt{G}}{R_2} = \frac{1}{R_1 - R_2} \frac{\partial R_2}{\partial u}. \end{cases}$$

(*D*) (S. 356) $R_1 = \frac{E}{L}, \quad R_2 = \frac{G}{N}.$

(*E*)

$$\begin{cases} x_{uu} = \frac{L}{D}(y_u z_v - z_u y_v) + \frac{E_u}{2E} x_u - \frac{E_v}{2G} x_v = LX + \frac{E_u}{2E} x_u - \frac{E_v}{2G} x_v, \\ x_{uv} = \frac{E_v}{2E} x_u + \frac{G_u}{2G} x_v, \\ x_{vv} = \frac{N}{D}(y_u z_v - z_u y_v) - \frac{G_u}{2E} x_u + \frac{G_v}{2G} x_v = NX - \frac{G_u}{2E} x_u + \frac{G_v}{2G} x_v. \end{cases}$$

Diese Formeln (*E*) gelten auch, wenn x und X durch y und Y oder durch z und Z ersetzt werden.

(*F*) (S. 356)

$$\begin{cases} X_u = -\frac{x_u}{R_1}, \quad Y_u = -\frac{y_u}{R_1}, \quad Z_u = -\frac{z_u}{R_1}; \\ X_v = -\frac{x_v}{R_2}, \quad Y_v = -\frac{y_v}{R_2}, \quad Z_v = -\frac{z_v}{R_2}. \end{cases}$$

(*G*) $\mathbf{S} X_u^2 = \frac{E}{R_1^2}, \quad \mathbf{S} X_u X_v = 0, \quad \mathbf{S} X_v^2 = \frac{G}{R_2^2}.$

(*H*) $\mathbf{S} X_u^2 = \frac{L^2}{E}, \quad \mathbf{S} X_u X_v = 0, \quad \mathbf{S} X_v^2 = \frac{N^2}{G}.$

Differentialgleichung der Minimalcurven:

$$(I) \qquad E\,du^2 + G\,dv^2 = 0.$$

Differentialgleichung der Haupttangentencurven:

$$(K) \qquad L\,du^2 + N\,dv^2 = 0.$$

Tafel XX.

Differentialparameter.

$$(A)\ (\text{S. } 383) \qquad \Delta_{ff} = \frac{E f_v^2 - 2F f_u f_v + G f_u^2}{D^2}.$$

$$(B)\ (\text{S. } 387) \qquad \Delta_{fg} = \frac{E f_v g_v - F(f_u g_v + f_v g_u) + G f_u g_u}{D^2}.$$

$$(C)\ (\text{S. } 387) \qquad \Delta_{fg} = \Delta_{gf}.$$

Werden $\bar{u} = f(u, v)$ und $\bar{v} = g(u, v)$ als Parameter auf der Fläche benutzt, so sind die zugehörigen Fundamentalgrössen erster Ordnung:

$$(D)\ (\text{S. } 389) \qquad \bar{E} = \frac{\Delta_{gg}}{\Delta_{ff}\Delta_{gg} - \Delta_{fg}^2}, \quad \bar{F} = \frac{-\Delta_{fg}}{\Delta_{ff}\Delta_{gg} - \Delta_{fg}^2}, \quad \bar{G} = \frac{\Delta_{ff}}{\Delta_{ff}\Delta_{gg} - \Delta_{fg}^2}.$$

Insbesondere ist:

$$(E)\ (\text{S. } 388) \qquad E = \frac{\Delta_{vv}}{\Delta_{uu}\Delta_{vv} - \Delta_{uv}^2}, \quad F = \frac{-\Delta_{uv}}{\Delta_{uu}\Delta_{vv} - \Delta_{uv}^2}, \quad G = \frac{\Delta_{uu}}{\Delta_{uu}\Delta_{vv} - \Delta_{uv}^2}.$$

Tafel XXI.

Geodätische Curven.

Differentialgleichung der geodätischen Curven, wenn u und v Functionen eines Parameters sind und nach diesem differenziert wird:

$$(A)\ (\text{S. } 406) \qquad \begin{vmatrix} Eu' + Fv' & \frac{1}{2}E_u u'^2 + E_v u'v' + (F_v - \frac{1}{2}G_u)v'^2 + Eu'' + Fv'' \\ Fu' + Gv' & (F_u - \frac{1}{2}E_v)u'^2 + G_u u'v' + \frac{1}{2}G_v v'^2 + Fu'' + Gv'' \end{vmatrix} = 0.$$

Oder, wenn u als Parameter längs der Curven benutzt wird:

$$(B)\ (\text{S. } 408) \qquad \begin{vmatrix} E + F\frac{dv}{du} & \frac{1}{2}E_u + E_v\frac{dv}{du} + (F_v - \frac{1}{2}G_u)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + F\frac{d^2v}{du^2} \\ F + G\frac{dv}{du} & F_u - \frac{1}{2}E_v + G_u\frac{dv}{du} + \frac{1}{2}G_v\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + G\frac{d^2v}{du^2} \end{vmatrix} = 0,$$

wobei jedoch die Curven (u) ausgeschlossen sind.

Bedingung für die orthogonalen Trajectorien $\lambda(u, v) = \text{Const.}$ von ∞^1 geodätischen Curven:

(*C*) (S. 439) $$\Delta_{\lambda\lambda} = f(\lambda).$$

Bogenelement-Quadrat bei geodätischem Parametersystem:

(*D*) (S. 440) $$ds^2 = du^2 + G(u, v)\,dv^2,$$

wobei $D = \sqrt{G}$ im reellen Falle positiv zu wählen ist.

Für den Winkel α einer beliebigen geodätischen Curve mit den geodätischen Curven (v) ist im Falle (*D*):

(*E*) (S. 443) $$\frac{d\alpha}{dv} = -D_u.$$

Bei der Annahme (*D*) ist:

(*F*) (S. 446) $$K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2} = -\frac{D_{uu}}{D}.$$

Liegen geodätische Polarcoordinaten vor, so ist in (*D*) noch:

(*G*) (S. 445, 448) $$\Big[G\Big]_{u=0} = \Big[D^2\Big]_{u=0} = 0, \quad \left[\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right]_{u=0} = \Big[D_u\Big]_{u=0} = 1.$$

Tafel XXII.

Centraflächen.

Die Parameterlinien (u), (v) auf der Urfläche (x, y, z) sollen die Krümmungscurven sein. Die auf den ersten oder zweiten Mantel der Centrafläche bezüglichen Grössen haben den Index 1 oder 2.

(*A*) (S. 457) $$x_1 = x + R_1 X, \quad y_1 = y + R_1 Y, \quad z_1 = z + R_1 Z.$$

(*B*) (S. 457) $$x_2 = x + R_2 X, \quad y_2 = y + R_2 Y, \quad z_2 = z + R_2 Z.$$

(*C*) (S. 457) $$\begin{cases} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = X\dfrac{\partial R_1}{\partial u}, & \dfrac{\partial y_1}{\partial u} = Y\dfrac{\partial R_1}{\partial u}, \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = X\dfrac{\partial R_1}{\partial v} + \dfrac{R_2 - R_1}{R_2}x_v, & \dfrac{\partial y_1}{\partial v} = Y\dfrac{\partial R_1}{\partial v} + \dfrac{R_2 - R_1}{R_2}y_v, \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial u} = Z\dfrac{\partial R_1}{\partial u}. & \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial v} = Z\dfrac{\partial R_1}{\partial v} + \dfrac{R_2 - R_1}{R_2}z_v. & \end{cases}$$

$$(D)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial x_2}{\partial u} = X\dfrac{\partial R_2}{\partial u} + \dfrac{R_1 - R_2}{R_1} x_u, & \dfrac{\partial y_2}{\partial u} = Y\dfrac{\partial R_2}{\partial u} + \dfrac{R_1 - R_2}{R_1} y_u, \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial v} = X\dfrac{\partial R_2}{\partial v}, & \dfrac{\partial y_2}{\partial v} = Y\dfrac{\partial R_2}{\partial v}, \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial u} = Z\dfrac{\partial R_2}{\partial u} + \dfrac{R_1 - R_2}{R_1} z_u. \\ \dfrac{\partial z_2}{\partial v} = Z\dfrac{\partial R_2}{\partial v}. \end{cases}$$

(E) (S. 462) $$E_1 = \left(\frac{\partial R_1}{\partial u}\right)^2, \quad F_1 = \frac{\partial R_1}{\partial u}\frac{\partial R_1}{\partial v}, \quad G_1 = \left(\frac{\partial R_1}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}\right)^2 G.$$

(F) $$E_2 = \left(\frac{\partial R_2}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1}\right)^2 E, \quad F_2 = \frac{\partial R_2}{\partial u}\frac{\partial R_2}{\partial v}, \quad G_2 = \left(\frac{\partial R_2}{\partial v}\right)^2.$$

(G) (S. 462) $$D_1 = \varepsilon_1 \frac{\partial R_1}{\partial u} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_2} \cdot \sqrt{G},$$

wo im reellen Falle $\sqrt{G}$ positiv sein soll und $\varepsilon_1 = \pm 1$ so zu wählen is, dass D_1 positiv wird.

(H) $$D_2 = \varepsilon_2 \frac{\partial R_2}{\partial v} \cdot \frac{R_1 - R_2}{R_1} \cdot \sqrt{E},$$

wo im reellen Falle $\sqrt{E}$ positiv sein soll und $\varepsilon_2 = \pm 1$ so zu wählen ist, dass D_2 positiv wird.

(I) (S. 463) $$X_1 = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E}} x_u, \quad Y_1 = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E}} y_u, \quad Z_1 = -\frac{\varepsilon_1}{\sqrt{E}} z_u.$$

(K) $$X_2 = -\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{G}} x_v, \quad Y_2 = -\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{G}} y_v, \quad Z_2 = -\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{G}} z_v.$$

(L) (S. 463) $$L_1 = \varepsilon_1 \sqrt{E}\,\frac{\partial \log R_1}{\partial u}, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = -\varepsilon_1 \frac{G}{\sqrt{E}} \cdot \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{\partial \log R_2}{\partial u}.$$

(M) $$L_2 = -\varepsilon_2 \frac{E}{\sqrt{G}} \cdot \frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{\partial \log R_1}{\partial v}, \quad M_2 = 0, \quad N_2 = \varepsilon_2 \sqrt{G}\,\frac{\partial \log R_2}{\partial v}.$$

(N) (S. 464) $$d s_1^2 = d R_1^2 + \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2}\right)^2 G\, d v^2.$$

(O) $$d s_2^2 = d R_2^2 + \left(\frac{R_1 - R_2}{R_1}\right)^2 E\, d u^2.$$

(P) (S. 466 u. 467) $$K_1 = -\frac{1}{(R_2 - R_1)^2} \cdot \frac{\dfrac{\partial R_2}{\partial u}}{\dfrac{\partial R_1}{\partial u}}, \quad K_2 = -\frac{1}{(R_1 - R_2)^2} \cdot \frac{\dfrac{\partial R_1}{\partial v}}{\dfrac{\partial R_2}{\partial v}}.$$

Differentialgleichung der Haupttangentencurven auf dem ersten Mantel:

(Q) (S. 466) $$E R_2^2 \frac{\partial R_1}{\partial u} d u^2 - G R_1^2 \frac{\partial R_2}{\partial u} d v^2 = 0,$$

auf dem zweiten Mantel:

(R) (S. 467) $$E R_2^2 \frac{\partial R_1}{\partial v} d u^2 - G R_1^2 \frac{\partial R_2}{\partial v} d v^2 = 0.$$

Tafel XXIII.

Flächencurven.

Die Parameter u, v seien als Functionen der Bogenlänge s der Curve gegeben, sodass

(A) (S. 476) $$E u'^2 + 2 F u' v' + G v'^2 = 1$$

ist, wenn die Striche die Differentiation nach s andeuten.

ω der Winkel der Hauptnormale mit der Flächennormale, $1:r$ die Krümmung, $1:\varrho$ die Torsion.

Normale Krümmung:

(B) (S. 477) $$\frac{\cos\omega}{r} = L u'^2 + 2 M u' v' + N v'^2.$$

Tangentiale oder geodätische Krümmung:

(C) (S. 482) $$\frac{\sin\omega}{r} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} E u' + F v' & \frac{1}{2} E_u u'^2 + E_v u' v' + (F_v - \frac{1}{2} G_u) v'^2 + E u'' + F v'' \\ F u' + G v' & (F_u - \frac{1}{2} E_v) u'^2 + G_u u' v' + \frac{1}{2} G_v v'^2 + F u'' + G v'' \end{vmatrix}.$$

(D) (S. 487) $$\operatorname{tg}\omega = \frac{\begin{vmatrix} E u' + F v' & \frac{1}{2} E_u u'^2 + E_v u' v' + (F_v - \frac{1}{2} G_u) v'^2 + E u'' + F v'' \\ F u' + G v' & (F_u - \frac{1}{2} E_v) u'^2 + G_u u' v' + \frac{1}{2} G_v v'^2 + F u'' + G v'' \end{vmatrix}}{D (L u'^2 + 2 M u' v' + N v'^2)}.$$

(E) (S. 487) $$\left(\frac{1}{r}\right)^2 = (L u'^2 + 2 M u' v' + N v'^2)^2 + \\ + \frac{1}{D^2} \begin{vmatrix} E u' + F v' & \frac{1}{2} E_u u'^2 + E_v u' v' + (F_v - \frac{1}{2} G_u) v'^2 + E u'' + F v'' \\ F u' + G v' & (F_u - \frac{1}{2} E_v) u'^2 + G_u u' v' + \frac{1}{2} G_v v'^2 + F u'' + G v'' \end{vmatrix}^2.$$

Im reellen Falle ist $1:r$ die positive Quadratwurzel hieraus.

(*F*) (S. 489) $$\frac{1}{\varrho} = \omega' - \frac{1}{D} \begin{vmatrix} v'^2 & E & L \\ -u'v' & F & M \\ u'^2 & G & N \end{vmatrix}.$$

Tafel XXIV.

Bezeichnungen.

In der nachstehenden Tabelle sind die Bezeichnungen angegeben, die in sieben Werken über Flächentheorie statt der unsrigen benutzt worden sind, soweit in ihnen überhaupt stehende Bezeichnungen für die betreffenden Grössen gebraucht worden sind. In alphabetischer Anordnung sind die sieben Werke diese:

Bianchi, „Vorlesungen über Differentialgeometrie". Deutsch von Lukat, Leipzig 1899.

Darboux, „Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal". I.—IV. partie, Paris 1887—1896.

Gauss, „Disquisitiones generales circa superficies curvas". Commentationes Soc. Scient. Gottingensis recentiores Vol. VI (ad a. 1823—1827), Göttingen 1828. Siehe auch Gauss' Werke, 4. Bd., und die Übersetzung in Ostwald's Klassikern Nr. 5.

Hoppe, „Lehrbuch der analytischen Geometrie in zwei Teilen. Zweiter Teil: Principien der Flächentheorie". 2. Aufl., Leipzig 1890.

Joachimsthal, „Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen und der Linien doppelter Krümmung". 3. Aufl., bearb. von Natani, Leipzig 1890.

Knoblauch, „Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen". Leipzig 1888.

Stahl und Kommerell, „Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie". Leipzig 1893.

	Bianchi	Darboux	Gauss	Hoppe	Joachimsthal	Knoblauch	Stahl und Kommerell
$u\,v$	$u\,v$	$u\,v$	$p\,q$	$u\,v$	$u\,v$	$u\,v$	$u\,v$
$E\,F\,G$	$E\,F\,G$	$E\,F\,G$ [1]	$E\,F\,G$	$e\,f\,g$	$E\,F\,G$	$E\,F\,G$	$e\,f\,g$
D	—	H [2]	Δ	t	—	T	δ
$X\,Y\,Z$	$X\,Y\,Z$	$c\,c'\,c''$	$X\,Y\,Z$	$p\,q\,r$	$\lambda\,\mu\,\nu$ [3]	$X\,Y\,Z$ [4]	$a\,b\,c$
$L\,M\,N$	$D\,D'\,D''$	$\frac{D}{H}\,\frac{D'}{H}\,\frac{D''}{H}$	$\frac{D}{\Delta}\,\frac{D'}{\Delta}\,\frac{D''}{\Delta}$	$E\,F\,G$	[5]	$L\,M\,N$	$d\,d'\,d''$
$R_1\,R_2$	$r_1\,r_2$	$R\,R'$	—	$\varrho_1\,\varrho_2$	$\varrho_1\,\varrho_2$	$\varrho_1\,\varrho_2$	$r_1\,r_2$
K	K	—	k	—	—	K	k
H	H	—	—	—	—	H	h

[1] Auch A^2, $A\,C\cos\alpha$, C^2.

[2] Auch Δ.

[3] Auch $\frac{A}{\sqrt{EG-F^2}}$, $\frac{B}{\sqrt{EG-F^2}}$, $\frac{C}{\sqrt{EG-F^2}}$.

[4] Auch $\frac{A}{T}$, $\frac{B}{T}$, $\frac{C}{T}$.

[5] Benutzt dieselben Fundamentalgrössen zweiter Ordnung wie Gauss, vgl. die Anm. zu S. 106.

Sachregister.

A

B

C

D

G

L

M

S

T

Berichtigungen und Zusätze.

Zum I. Band.

Seite 17, Zeile 9 von oben lies: t statt: τ.
„ 21, Zeile 2 von unten füge hinzu: ($\lambda_1 \neq 0$).
„ 69, letzte Zeile lies: r statt: r.
„ 96, Satz 63. Diesen Satz findet man schon bei Cesàro, „Lezioni di geometria intrinseca“, Neapel 1896. Vgl. die Anmerkung zu S. 353 des vorliegenden Bandes. In der in I S. 96, Anmerkung, genannten Arbeit werden dagegen weitere Sätze aufgestellt, die tiefer liegen.
„ 109, Formel (7) vertausche φ mit ψ.
„ 161, Zeile 7 von unten schalte nach: xy-Ebene ein: und die xz-Ebene.
„ 168, Formeln (4) lies in der letzten Quadratwurzel + statt: =.
„ 194, Satz 17, und Seite 197, Satz 19. Diese Sätze rühren her von Schell. Siehe seine „Allgemeine Theorie der Curven doppelter Krümmung in rein geometrischer Darstellung“, Leipzig 1859, 2. Aufl. 1898.
„ 197, § 11. Die in diesem Paragraphen untersuchte unendlich kleine Schraubung wurde zuerst von Beltrami, „Intorno ad una proprietà delle curve a doppia curvatura“, Giornale di Matem. vol. V (1867), betrachtet. In seiner Abhandlung: „Del moto geometrico di un solido che ruzzola sopra un altro solido“, ebenda vol. X (1872), kommt das auf S. 196 bestimmte Cylindroid vor.
„ 207, Zeile 14 von oben lies: Grössen statt: Grösse.
„ 216, Formeln (5). Man beachte hierzu die Anmerkung auf S. 334 des gegenwärtigen Bandes.
„ 261, in der dritten Formel (2) lies: $\mathfrak{z} =$ statt: $\mathfrak{z} +$.
„ 330, Zeile 15 u. 12 von unten lies: $\sqrt{3}$ statt: 3.
„ 331, Zeile 11 von unten lies: 2 statt: 1.
„ 357, letzte Zeile links lies: Ellipse.

Zum II. Band.

Seite 56, Zeile 8 von oben setze einen Punkt statt des Doppelpunktes.
„ 159, Formel (4) lies: M^2 statt: L^2.
„ 171, Satz 52 rührt von Hamilton her, vgl. die Anmerkung zu S. 472.
„ 172, Zeile 7 von oben lies: Man thut statt: Es ist.

Seite 181, Zeile 21 von oben lies: eine Curve statt: die Curve.
„ 205, Zeile 10 von unten lies: solche statt: diejenigen.
„ 245, schalte in Satz 112 nach: ändern, ein: mit einem ihrer Punkte.
„ 257, Zeile 11 von oben lies: Function.
„ 288. Zu dem hier erwähnten Modelle ist allerdings zu bemerken, dass es nur bei einer beschränkten Anzahl von Vierecken beweglich ist. Zwei beliebig lange an einander stossende Streifen von Vierecken sind ebenfalls beweglich.
„ 394, Zeile 8 von unten fehlt ein Komma nach: Krümmung.
„ 404, Fig. 76 lies: P_0 und P_1 statt: P und P.
„ 453. Zu den Schlussbemerkungen des § 4 ist die Abhandlung von Beltrami zu nennen: „Saggio d'interpretazione della geometria noneuclidea", Giornale di Mat. vol. VI (1868).
„ 479, Fig. 91. Hier ist φ falsch eingeschrieben; φ ist der Winkel der Normale zur Ebene mit der Binormale, vgl. Fig. 90.

